ANNALES DU CAPES INTERNE DE MATHEMATIQUES 1987 à 2001

avec de nombreuses solutions

Énoncé de la première composition du CAPES interne 1987

L'épreuve est organisée en deux parties dont la première prend en compte la réflexion sur la pratique enseignante, notamment par la production d'un texte d'exercice dans la séquence 1. Les objectifs sont précisés par les titres des séquences et en tête des parties.
Toutes les fonctions envisagées sont définies uniquement sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs ou nuls et sont à valeurs réelles. On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. Lorsqu'une fonction w est dérivable, sa dérivée est notée w'. Pour α et β réels on pose :

$$\inf(\alpha, \beta) = \alpha \quad \text{si} \quad \alpha \leq \beta \quad \text{et} \quad \inf(\alpha, \beta) = \beta \quad \text{si} \quad \alpha > \beta\,;$$
$$\sup(\alpha, \beta) = \alpha \quad \text{si} \quad \alpha \geq \beta \quad \text{et} \quad \sup(\alpha, \beta) = \beta \quad \text{si} \quad \alpha < \beta.$$

PREMIÈRE PARTIE

Cette partie conduit, par des méthodes de pratique courante, à des résultats techniques et à des outils de comparaison utiles dans le problème constituant la deuxième partie.

1. Inégalités élémentaires

Les question 1.1. et 1.2. sont indépendantes ; elles se situent dans le cadre d'activités, réalisables en classe, associant la géométrie et le calcul afin de familiariser les élèves avec les inégalités.

1.1. Le but est de donner un support géométrique à la double inégalité suivante :
Pour a et b positifs, $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$.
En se servant d'objets très simples (cercle, rectangle, carré...), concevoir une figure où ces trois expressions soient en situation. Rédiger, sans corrigé, le texte d'un exercice amenant, à partir des réels positifs a et b, à réaliser cette figure et à y observer la double inégalité.

1.2. L'utilisation de la distance dans le plan permet de prouver l'inégalité :
Pour a, b, c positifs, c supérieur à b, $\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2} \leq c-b$.

a. Expliquer comment.
b. Obtenir brièvement ce même résultat sans recourir à la géométrie.

2. Effet d'une homothétie sur une propriété différentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = e^x - x - 1$ et sa courbe réprésentative $\mathcal{G}$ dans un repère orthonormal ; à chaque point $P(x,\, y)$ de $\mathcal{G}$ on associe le point $Q(x+y, 0)$.

2.1. Soit I le point $(0,\, 1)$. Démontrer que la droite IQ et la tangente à $\mathcal{G}$ en P sont perpendiculaires.
Étudier la fonction g, sa convexité, et tracer la courbe $\mathcal{G}$ en plaçant quelques tangentes.
Démontrer que la fonction g est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 de l'équation différentielle $y' = x + y$.

2.2. Pour tout λ strictement positif, on note $\mathcal{G}_\lambda$ la transformée de $\mathcal{G}$ par l'homothétie de centre 0, origine du repère, et de rapport λ ; $\mathcal{G}_\lambda$ est la courbe représentative d'une fonction qu'on note g_λ.

a. Exprimer $g_\lambda(x)$ pour x dans $\mathbb{R}_+$.
Les réels λ et μ vérifiant $\mu > \lambda$, examiner le signe de $g_\lambda - g_\mu$ et contrôler le résultat par un raisonnement de convexité.
b. Comparer $x + g_\lambda(x)$ et $g'_\lambda(x)$.
Comme ci-dessus pour g, caractériser g_λ comme solution sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0 d'une équation différentielle.

3. Intervention d'inéquations différentielles

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ et nulles en 0.

3.1.

a. Pour y dans $\mathcal{E}$, montrer que si $y'(x) \geq x$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, alors $y(x) \geq \dfrac{x^2}{2}$.
La réciproque est-elle vraie ?

b. Pour y dans $\mathcal{E}$, montrer que si $y'(x) \leq x + y(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, alors $y \leq g$ où g est la fonction définie dans la séquence 2.
On utilisera le changement de fonction inconnue consistant à poser $y = z\, e^x$.

3.2. On note h la fonction définie par :

$$h\,(x) = \sup\, \left(\frac{x^2}{2}\,, \sqrt{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} - 1\right) - x \right) \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

a. Pour y dans $\mathcal{E}$, montrer que si pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ on a à la fois

$$y'(x) \geq x \qquad \text{et} \qquad y'(x) \geq \frac{x + y(x)}{\sqrt{2}}, \qquad \text{alors } y \geq h.$$

b. Pour expliciter h on a besoin du signe de :

$$d(x) = \sqrt{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} - 1\right) - x - \frac{x^2}{2}.$$

Étudier les variations de la fonction d et montrer que l'équation $d(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution x_0.
Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de $d\,(1,3)$ et $d\,(1,4)$.
Justifier l'encadrement :

$$1,4 - \frac{d(1,4)}{10\,[d(1,4) - d(1,3)]} \leq x_0 \leq 1,4 - \frac{d(1,4)}{d'(1,4)}.$$

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0.

3.3. On cherche maintenant à préciser à partir d'inéquations différentielles le comportement asymptotique d'une fonction de $\mathcal{E}$.

a. Soit y dans $\mathcal{E}$ vérifiant $y(x) \leq y'(x) \leq y(x) + x$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.
Quel est le sens de variation de la fonction $x \mapsto y(x)e^{-x}$?
Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (y(x)e^{-x})$ existe. On note K cette limite ; montrer que $0 \leq K \leq 1$.
Quelle majoration obtient-on pour la fonction y ?

b. Soit M un réel strictement positif donné.
Pour y dans $\mathcal{E}$ vérifiant $y'(x) \leq y(x) + M$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, quel est le sens de variation de la fonction $x \mapsto (y(x) + M)e^{-x}$?
On note p_M la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$p_M(x) = e^x - x - 1 \text{ si } 0 \leq x \leq M \text{ et } p_M(x) = (1 - e^{-M})e^x - M \text{ si } x > M.$$

Pour y dans $\mathcal{E}$, montrer que si l'on a :

$$y(x) \leq y'(x) \leq y(x) + \inf(x,\, M) \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+,$$

alors, en posant $K = \lim\limits_{x \to +\infty} (y(x)e^{-x})$, on a :

$$K\, e^x - M \leq y(x) \leq p_M(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

DEUXIÈME PARTIE

On envisage l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On se propose l'étude de la solution nulle en 0 de cette équation (cette solution n'est pas exprimable à l'aide des fonctions élémentaires) ; les séquences **4** et **5**, indépendantes l'une de l'autre, établissent son existence et son unicité. L'objectif est ensuite d'obtenir, dans l'esprit de la séquence **3**, des encadrements globaux ; la séquence **6** qui y conduit ne dépend pas des séquences **4** et **5**.

4. Existence de la solution nulle en 0

On définit la suite (f_n) de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ par $f_0(x) = 0$ et,

$$\text{pour } n \geq 1, \quad f_n(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f_{n-1}^2(t)}dt.$$

4.1. Montrer que chaque f_n ainsi définie est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0, strictement croissante si $n \geq 1$. Calculer $f_1(x)$.
Montrer qu'on a, pour $n \geq 1$:

$$0 \leq f_n(x) - f_{n-1}(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

4.2. Montrer que la suite (f_n) converge vers une fonction f vérifiant :

$$\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq e^x - x - 1 \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

Montrer que f est continue.

4.3. Montrer que la suite (f'_n) des dérivées vérifie pour $n \geq 1$:

$$0 \leq f'_{n+1}(x) - f'_n(x) \leq f_n(x) - f_{n-1}(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, nulle en 0, vérifiant :

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)} \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Unicité de la solution nulle en 0

On suppose que y_1 et y_2 sont des solutions sur $\mathbb{R}_+$ nulles en 0 de $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.
On pose $\delta = (y_1 - y_2)^2$.
Montrer que la fonction $x \mapsto \delta(x)e^{-2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Conclure.

6. Des encadrements de f

6.1. En utilisant les études antérieures **3.1.b.** et **3.2.a.** dont on reprendra les notations, montrer que $h \leq f \leq g$.

Ce résultat améliore l'encadrement obtenu en 4.2.
Justifier l'existence de $\lim_{x\to+\infty}(f(x)e^{-x})$. On notera L cette limite.

6.2. On pose $\varphi = f' - f$, et, pour x dans $\mathbb{R}_+$, $\theta(x) = (1-x)f'(x) + f(x)$.
On observera qu'on a, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{f(x)+f'(x)}$.

a. Montrer qu'on a, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = f(x) + \dfrac{x}{f'(x)}$ et par suite $\varphi'(x) = \dfrac{x\theta(x)}{f'(x)(f(x)+f'(x))}$.

b. Étudier les variations de θ sur $\mathbb{R}_+$ et la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En définitive, montrer l'existence d'un unique nombre γ strictement supérieur à 1 vérifiant $\theta(\gamma) = 0$.

c. Étudier les variations de φ.
On note M le nombre $\varphi(\gamma)$. Montrer qu'on a $M \leq 1$.
Utilisant **3.3.b.**, écrire à l'aide cette fois de L, M et p_M un encadrement de f.

6.3. Montrer que φ vérifie, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x}{x^2+\varphi^2(x)} - 1.$$

6.4. On définit la fonction a sur $\mathbb{R}_+$, par :

$$u(x) = \frac{\varphi^2(x)}{x^2}\, e^x \qquad \text{si} \qquad x > 0 \qquad \text{et} \qquad u(0) = 1.$$

Exprimer $u'(x)$ à l'aide de $\dfrac{2-x}{2+x}e^x - u(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.
Tracer la représentation graphique de la fonction q définie sur $\mathbb{R}_+$ par $q(x) = \dfrac{2-x}{2+x}\, e^x$.
Montrer qu'on a $u(x) \leq 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.
Pour cela on supposera qu'il existe x_1 vérifiant $0 < x_1 < 2$ et $u(x_1) > 1$; on montrera qu'on alors $u'(x_1) < 0$ et on aboutira à une contradiction.
Déduire de cette étude qu'on a $\varphi(x) \leq xe^{-\frac{x}{2}}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.
Quelle majoration en résulte-t-il pour f ?

6.5. On définit la fonction v sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$v(x) = u(x)\, e^{\frac{x^3}{48}}.$$

Montrer qu'on a $v \geq 1$.
Quelle minoration en résulte-t-il pour f ?
Montrer qu'on a $\dfrac{4}{9}\left(1 - \dfrac{2}{27}\right) \leq L \leq \dfrac{4}{9}$.

CAPES interne de Mathématiques
session 1987
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag4e]

PREMIERE PARTIE

Les séquences 1 et 2 éclairent, en les prenant au niveau de la pratique en classe, des outils et des situations de la géométrie du triangle et du cercle.

Cette mise en place se relie, dans la séquence 3, à la résolution de problèmes de construction.

1. Orthocentre et cercle circonscrit

Etant donné un triangle ABC et son cercle circonscrit Γ, on désigne par :

O le centre de Γ,

H le point de concours des hauteurs du triangle (orthocentre),

G le point de concours des médianes (centre de gravité).

Soit à prouver, de différentes manières, l'égalité :

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1.1. On pose $\vec{h} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Considérant successivement chaque côté du triangle, établir que $\vec{h}$ est la somme de deux vecteurs orthogonaux à ce côté. En déduire que $\vec{h} = \vec{0}$.

1.2. Exprimer $\vec{h}$ à l'aide des seuls points O, H, G et montrer que $\vec{h} = \vec{0}$.

1.3. Le point A_1 étant défini par $\overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OA}$ et le point H étant supposé distinct de B et de C, examiner la nature du quadrilatère BA_1CH et en déduire que $\vec{h} = \vec{0}$.

Prouver que le symétrique de H par rapport à la droite BC est sur Γ.

1.4. Prouver que l'égalité $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ caractérise le triangle équilatéral.

2. Milieux d'arcs

Etant donné un triangle ABC, les demi-droites d'origine A qui portent les côtés AB et AC s'échangent entre elles dans une symétrie dont l'axe est par définition la bissectrice en A du triangle; on définit de même les deux autres bissectrices. On note encore Γ le cercle circonscrit au triangle, et O son centre. Les trois bissectrices recoupent Γ respectivement en A', B', C'.

2.1. On veut comparer les distances de A' à B et à C en ne se servant que des propriétés des symétries.

Soit E le symétrique de C par rapport à la médiatrice du segment AA'.

Montrer que E est un point de Γ, que les droites AB et A'E sont parallèles, que les segments A'B, AE et A'C ont même longueur.

Ainsi A' est sur la médiatrice BC; à quelle propriété du cercle ce résultat est-il lié ?

2.2. On désigne par I le point de concours des bissectrices du triangle ABC.

Quelles sont les images des droites AI et BI dans la symétrie d'axe A'B' ? Quelle est l'image de I dans cette symétrie ?

Quel rôle joue le point I dans le triangle A'B'C' ?

3. Etude de problème de construction

On se bornera à donner une marche à suivre et à préciser les conditions de possibilité et le nombre des solutions.

Le cercle Γ étant donné, déterminer dans chacun des cas qui suivent un triangle ABC admettant Γ pour cercle circonscrit.

3.1. Le sommet A et l'orthocentre H sont donnés.

3.2. Les intersections des bissectrices du triangle avec Γ sont trois points donnés A', B', C'.

3.3. Les médiatrices des côtés du triangle sont trois diamètres distincts donnés de Γ.

3.4. Les côtés du triangle sont parallèles à ceux d'un triangle donné $A_oB_oC_o$.

Les problèmes 3.3. et 3.4. sont équivalents; on se servira pour 3.4. du cercle Γ_o circonscrit au triangle $A_oB_oC_o$ et d'une transformation changeant Γ_o en Γ.

DEUXIEME PARTIE

Le plan est orienté. Par des moyens nouveaux (similitude directe et outil complexe) on approfondit dans la séquence 4 l'étude de configuration commencée dans la séquence 2. Les séquences 5 et 6 constituent deux problèmes indépendants sur un même thème.

4. Configuration de deux triangles et similitudes

On reprend avec les mêmes notations la configuration de la séquence 2, formée par le cercle Γ et les huit points A, B, C, O, A', B', C', I.

4.1. On note s_1 la similitude directe définie par les conditions :

$s_1(B') = C, \quad s_1(C') = B.$

Etablir, par des considérations d'angles, que $s_1(A) = I$.

Prouver que A' est le centre du cercle circonscrit au triangle BCI; en déduire que $s_1(O) = A'$.

En exprimant de deux manières le rapport de similitude démontrer l'égalité $\frac{A'I}{R} = \frac{r}{\frac{1}{2}AI}$, où R désigne le rayon de Γ et r la distance de I à la droite BC.

En déduire la relation $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

4.2. On suppose qu'on est dans le plan complexe, que O est l'origine de ce plan et Γ le cercle unité; les affixes a, b, c, a', b', c' de A, B, C, A', B', C' sont donc six nombres de module 1.

Etablir les relations : $a'^2 = bc$, $b'^2 = ca$, $c'^2 = ab$, $a'b'c' = -abc$.

Montrer que les six affixes sont exprimables à l'aide de trois nombres complexes α, β, γ convenables, définis globalement au signe près, par :

$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2, \quad c = \gamma^2, \quad a' = -\beta\gamma, \quad b' = -\gamma\alpha, \quad c' = -\alpha\beta.$

4.3. Calculer en fonction de α, β, γ, à partir des expressions précédentes de a, b, c, a', b', c', les coefficients λ et μ de l'application complexe $z \longmapsto \lambda z + \mu$ associée à la similitude directe s_1. Vérifier par le calcul que $s_1(A) = I$.

On note s_2, s_3 les similitudes directes dont les définitions se déduisent de celle de s_1 en permutant A, B, C, et par conséquent aussi A', B', C'. Montrer que si s_1 est une translation, alors s_2 et s_3 sont des translations, la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est nulle et le triangle ABC est équilatéral.

4.4. On suppose que le triangle ABC n'est pas équilatéral.

Montrer que les trois similitudes s_1, s_2, s_3 admettent le même centre qu'on note J et dont on calculera l'affixe z_J.

Etablir l'égalité : $z_I \overline{z_J} = 1$,

où z_I est l'affixe de I et $\overline{z_J}$ le conjugué de z_J; interpréter géométriquement ce résultat.

Démontrer les égalités : $\frac{B'A}{B'J} = \frac{C'A}{C'J} = \frac{OA}{OJ}$.

4.5. Les données sont le cercle Γ de centre O, un point A de Γ, un point I intérieur à Γ et distinct de O.

Montrer qu'on peut déterminer sur Γ des points B et C de façon que le triangle ABC admette I pour point de concours de ses bissectrices. (Il est conseillé de placer le point J, puis de chercher B' et C'.)

5. Variation d'un triangle obtenu à partir de deux cercles

Les notations A, B, C, A', I sont celles des séquences 2 et 4.

Les données sont le cercle Γ, de centre O et de rayon R, et un cercle Ω, de centre ω et de rayon ρ, intérieur à Γ.

On impose aux points A, B, C d'appartenir à Γ et aux droites AB, AC d'être tangentes à Ω ; en particulier la droite AA' passe donc par ω. On s'intéresse au point mobile I.

5.1. A partir de l'une des relations contenant r obtenues dans 4.1, établir l'égalité

$$A'I \cdot A\omega = 2\rho R . \quad \left(\text{On comparera } \frac{r}{AI} \text{ et } \frac{\rho}{A\omega}.\right)$$

5.2. Démontrer qu'il existe un réel k ne dépendant que des données, tel que $\overrightarrow{A'I} = k\,\overrightarrow{A'\omega}$.

Que se passe-t-il si k = 1 ?

5.3. Lorsque $k \neq 1$, on pose $\overrightarrow{OO'} = k\,\overrightarrow{O\omega}$

Montrer que I décrit un cercle de centre O'.

6. Images d'alignements par l'application complexe $z \longmapsto z^2$

Le cercle Γ est à nouveau le cercle unité du plan complexe, O est l'origine et on désigne par S l'image de 1. On considère sur l'axe OS des réels un point F d'affixe x_o, où x_o est un réel vérifiant $0 < x_o < 1$. Les points U et V d'affixes α et β, avec $\alpha + \beta \neq 0$, décrivent Γ en restant alignés avec F.

6.1. Former une condition entre x_o, α, β exprimant cet alignement.

On pourra établir d'abord que la relation $z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$ est une équation complexe de la droite UV.

6.2. On considère sur l'axe des réels le point K d'affixe x_o^2, et sur Γ les points M d'affixe α^2, N d'affixe β^2. On désigne par σ la similitude directe dont l'application complexe associée est $z \longmapsto (\alpha + \beta)z - \alpha\beta$.

Préciser $\sigma(U)$ et $\sigma(V)$. On pose $\sigma(F) = T$.

Exprimer au moyen seulement de x_o et du produit $\alpha\beta$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{KT}$; démontrer que ce vecteur est orthogonal à la droite MN et que KT = KS.

Qu'en résulte-t-il pour la droite MN quand la droite UV varie ?

6.3. On désigne par U' le point de Γ d'affixe $-\alpha$.

Soit V', d'affixe β', le point de Γ aligné avec F et U'; former une relation entre β et β'.

Soit N' le point d'affixe β'^2. Comment varie la droite NN' ?

CAPES interne 1987 de Mathématiques seconde composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag4s] v1.00

fig 1

1.1 $\vec{h} = \vec{OH} - \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{AH} - (\vec{OB} + \vec{OC})$

$\vec{AH} \perp \vec{BC}$ et $(\vec{OB} + \vec{OC}) \perp \vec{BC}$ puisque :

$$(\vec{OB} + \vec{OC})\vec{BC} = (\vec{OB} + \vec{OC})(\vec{OC} - \vec{OB}) = OC^2 - OB^2 = 0$$

car $OB = OC$

Ainsi $\vec{h}$ est orthogonal à $\vec{BC}$ et à $\vec{AB}$, donc $\vec{h} = \vec{0}$ puisque $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont indépendants.

1.2 $\vec{h} = \vec{OH} - \underbrace{(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})}_{3\vec{OG}} = \vec{OH} - 3\vec{OG}$

Soient A'', B'', C'' les milieux de BC, CA, AB. L'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie A sur A'', B sur B'' et C sur C'', donc envoie l'orthocentre H de ABC sur l'orthocentre de A''B''C'' qui n'est autre que O

(En effet, la réc. de Thalès donne $B''C'' \parallel BC$, et $OA'' \perp BC$ car OA'' est la médiatrice de BC, donc $OA'' \perp B''C''$. Et ainsi de suite ...)

Donc $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH} \Leftrightarrow \vec{OH} = 3\vec{OG}$

Donc $\vec{h} = \vec{0}$.

1.3 * AA_1 est un diamètre de Γ et $C \in \Gamma$ donc $A_1C \perp AC$. Comme $BH \perp AC$ on en déduit $A_1C \parallel BH$.

De même, $BA_1 \perp AB$ et comme $CH \perp AB$, on aura $BA_1 \parallel CH$

<u>BA_1CH est donc un parallélogramme</u>

* On en déduit :

$$\vec{h} = \vec{CH} - \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{A_1B} - \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{A_1O} - \vec{OA} = \vec{0}$$

* <u>Par symétrie</u> : $\widehat{H_1B, H_1C} = -\widehat{HB, HC}$. Comme BA_1CH est un parallélogramme : $\widehat{HB, HC} = \widehat{A_1C, A_1B}$ d'où $\widehat{H_1B, H_1C} = \widehat{A_1B, A_1C} \Rightarrow H_1 \in \Gamma$

NB : 2^e solution (pour montrer que $H_1 \in \Gamma$)

En termes d'angles de dtes :

$$\widehat{H_1B, H_1H} = -\widehat{HB, HH_1} = \widehat{AH, HB} = \widehat{BC, AC}$$

car $\begin{cases} AH \perp BC \\ HB \perp AC \end{cases}$

donc $\widehat{H_1B, H_1A} = \widehat{CB, CA} \iff H_1 \in \Gamma$

CQFD

fig. 2

1.4 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0} \iff \vec{h} = \vec{OH} = \vec{0} \iff O = H \overset{(*)}{\iff}$ ABC équilatéral.

NB : Justifions (*). O = H revient à dire que les 3 médiatrices des côtés du triangle ABC coïncident avec les hauteurs de ce triangle, ie, par symétrie, que AB = AC = BC ie ABC équilatéral.

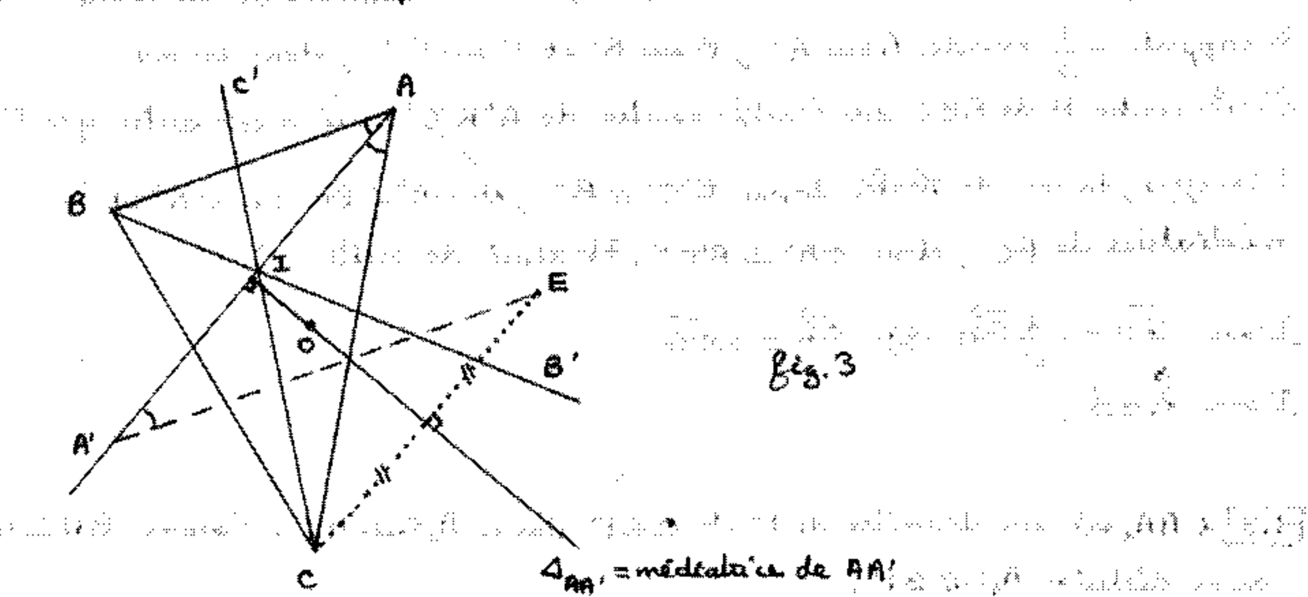


fig. 3

2.1 * Montrons que AB // A'E :

$$\widehat{AA', A'E} \underset{\text{sym. /r } \Delta_{AA'}}{=} -\widehat{A'A, AC} \underset{AA' \text{ biss. de } \hat{A}}{=} \widehat{AA', AB} \quad \text{entraîne } AB \,//\, A'E$$

2^e méthode : La symétrie par rapport à la médiatrice $\Delta_{AA'}$ de AA' transforme la droite AB en la dte passant par A' et parallèle à AC (en effet, $\Delta_{AA'}$ est perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{BAC}$, donc parallèle à la 2^e bissectrice de cet angle ...) et la droite AE en la dte AC. La symétrie conservant le parallélisme, on en déduit AB // A'E.

* De $AB \parallel A'E$ on déduit $A'B = AE$ (puisque les segments $A'B$ et AE sont symétriques /à la médiatrice de AB). Enfin $AE = A'C$ par symétrie /à $\Delta_{AA'}$.
Finalement : $A'B = AE = A'C$ et A' sera sur la médiatrice de BC.

* Ce résultat est lié aux propriétés angulaires :

$$\begin{cases} \widehat{\vec{AB},\vec{AA'}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\vec{OB},\vec{OA'}} \\ \widehat{\vec{AA'},\vec{AC}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\vec{OA'},\vec{OC}} \end{cases}$$

Ainsi $\widehat{\vec{AB},\vec{AA'}} = \widehat{\vec{AA'},\vec{AC}} \Leftrightarrow \widehat{\vec{OB},\vec{OA'}} = \widehat{\vec{OA'},\vec{OC}} \Leftrightarrow OA'$ bissectrice ~~média~~ de $\widehat{BOC}$

$\Leftrightarrow OA'$ médiatrice de $[BC]$.
(car OBC isocèle en O)

2.2 voir fig. 3

2ème solution pour 2.2 :
$\widehat{CA'B'} = \widehat{CBB'} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'A'A}$ [π] (cocycl.)
donc $\widehat{A'C, A'B'} = \widehat{A'B', A'A}$ [π]
$A'B'$ sera une bissectrice de $(A'C, A'A)$, donc $s_{A'B'}(A'C) = A'A$

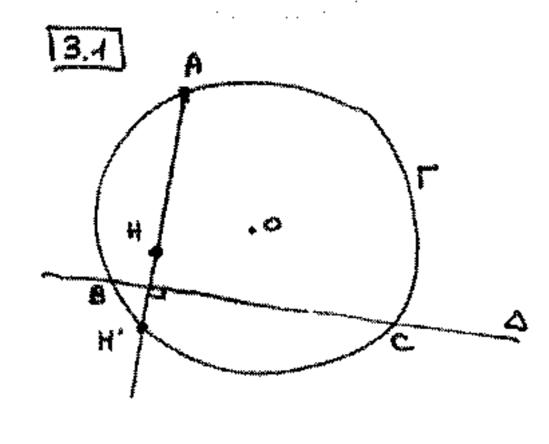
B' est le milieu de l'arc $\widehat{AC}$ (2.1) donc :

$$\widehat{\vec{A'A},\vec{A'B'}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\vec{OA},\vec{OB'}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\vec{OB'},\vec{OC}} = \widehat{\vec{A'B'},\vec{A'C}}$$

donc $A'B'$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{\vec{A'A},\vec{A'C}}$

L'image de AI par la symétrie /à $A'B'$ sera donc $A'C$.
De m, l'image de BI est $B'C$, donc le symétrique de I /à $A'B'$ est C.
Ainsi $IC' \perp A'B'$. On prouverait de même que $IB' \perp A'C'$ pour conclure :
I est l'orthocentre du triangle $A'B'C'$.

3.1



D'après 1.3, le symétrique de H /à BC est sur Γ, d'où les pts B et C : ce sont les pts d'intersection de la médiatrice Δ de HH' (où H' est le 2ème pt d'intersection de AH et Γ) et de Γ.

La construction est possible si $H \neq A$ et si Δ coupe Γ.
Si $H = A$, ABC sera rectangle en A et n'importe quel diamètre BC fera l'affaire.

3.2

* Si ABC existe, alors l'intersection I des bissectrices de ABC sera l'orthocentre de $A'B'C'$ (2.2). I sera intérieur à ABC (centre du cercle inscrit) et à $A'B'C'$ (car B sur l'arc $\widehat{A'C'}$ ne contenant pas B').

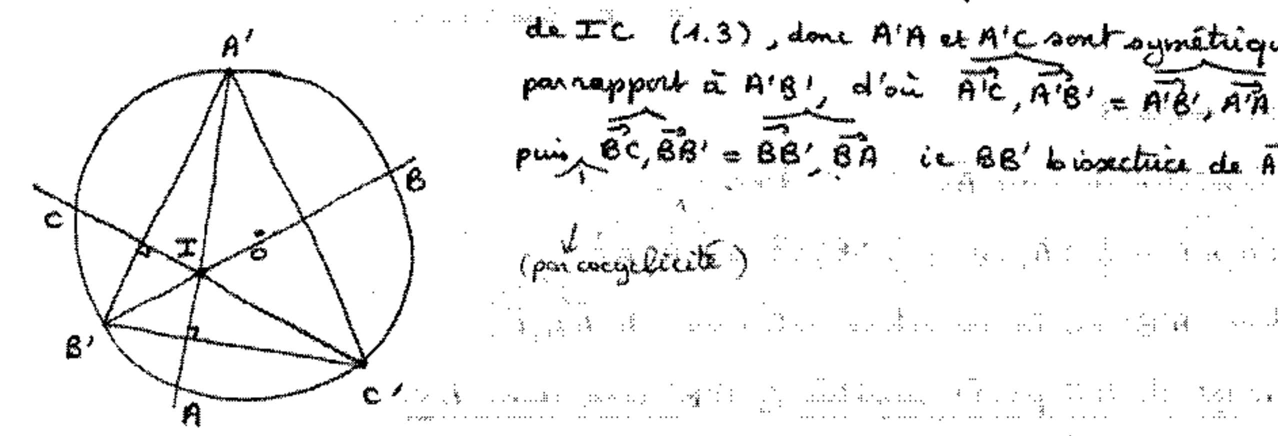
* Soient A', B', C' donnés sur Γ. Construisons l'orthocentre I de $A'B'C'$. A, B, C ne peuvent être que les intersections de $A'I$, $B'I$, $C'I$ et de Γ.

1) Si I est extérieur à $A'B'C'$, le pb n'a pas de solution.

2) Sinon :

a) Si $I \notin \{A', B', C'\}$, le triangle ABC convient puisque $A'B'$ est la médiatrice de IC (1.3), donc $A'A$ et $A'C$ sont symétriques par rapport à $A'B'$, d'où $(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'A})$ puis $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}) = (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA})$ ie BB' bissectrice de $\widehat{ABC}$...

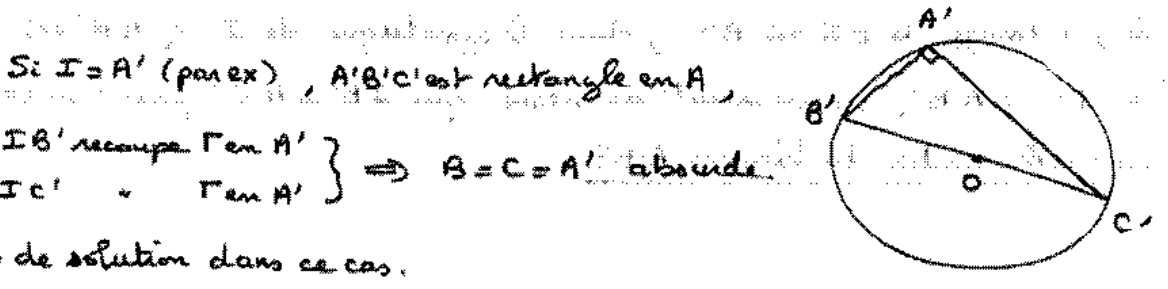
(par cocyclicité)



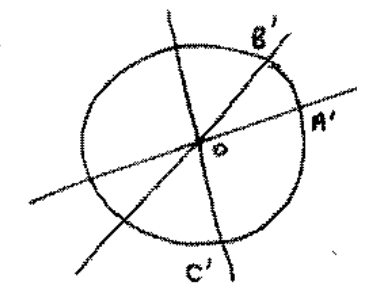
b) Si $I = A'$ (par ex), $A'B'C'$ est rectangle en A,

$\left.\begin{array}{l} IB' \text{ recoupe } \Gamma \text{ en } A' \\ IC' \quad " \quad \Gamma \text{ en } A' \end{array}\right\} \Rightarrow B = C = A'$ absurde.

Pas de solution dans ce cas.



3.3



Par 2.1, OA' est la médiatrice de BC
OB' " " AC
OC' " " AB

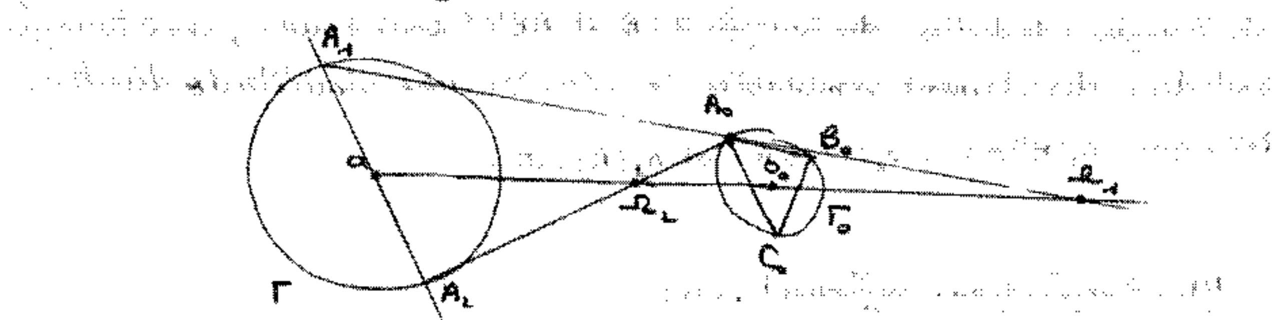
donc $s_{OC'} \circ s_{OB'} \circ s_{OA'}(B) = B$ et B appartiendra à l'axe de symétrie de la symétrie $s = s_{OC'} \circ s_{OB'} \circ s_{OA'}$.

Il suffit de choisir un pt M, de construire son image M' par s, puis le milieu S de MM'. B se trouvera à l'intersection de OS et de Γ

Il y a 2 solutions pour B, puis : C sera le symétrique de B /à OA'
A " " C /à OB' (fig. 3)

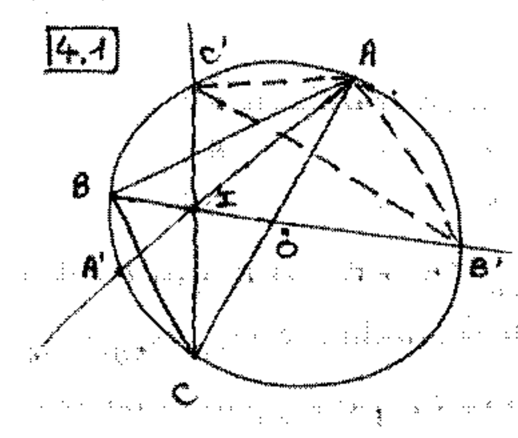
3.4 est équivalent au pb 3.3 puisque fixer les médiatrices des côtés revient à fixer les directions orthogonales à ces médiatrices ie un triangle $A_0B_0C_0$.

Les 2 solutions obtenues en 3.3 s'obtiennent comme les images de $A_0B_0C_0$ par les 2 homothéties (resp. la translation) transformant Γ_0 en Γ si Γ_0 et Γ n'ont pas le m̂ rayon (resp. ont le m̂ rayon).



Ω_1 et Ω_2 sont les centres des 2 homothéties transformant le cercle Γ_0 en Γ.

4.1



* **ICB et AB'C' sont semblables** : en effet

preuve plus simple p 14

$\widehat{CI,CB} = \widehat{B'C',B'B} = \widehat{B'A,B'C'}$

↑ cocyclicité ; ↑ C' milieu de l'arc $\widehat{AB}$ (cf 2.1) (passer à l'angle au centre)

$\widehat{BC,BI} = \widehat{BC,BB'} = \widehat{C'C,C'B'} = \widehat{C'B',C'A}$

↑ cocyclicité ; ↑ B' milieu de $\widehat{AC}$

D'après 2.2 : $\left.\begin{array}{l} IC \perp A'B' \\ IB \perp A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{IB,IC} = \widehat{A'C',A'B'} = \widehat{AC',AB'}$

Les 3 angles (de droites) des triangles ICB et AB'C' sont égaux, ces 2 triangles sont donc directement semblables ie il existe une similitude directe s_1 telle que $s_1(B') = C$, $s_1(C') = B$ et $s_1(A) = I$.

NB : 2 angles égaux suffisent, car :

Rappel : Les triangles ABC et A'B'C' sont directement semblables ssi ils ont 2 angles égaux (angles de droites ou de vecteurs)

preuve : Si s est une similitude dir. transformant ABC en A'B'C', alors les angles sont égaux. Réciproquement, si $\widehat{AB,AC} = \widehat{A'B',A'C'} = \alpha\ [\pi]$ et $\widehat{BA,BC} = \widehat{B'A',B'C'} = \beta\ [\pi]$ on sait l'existence d'une et 1 seule similitude directe transformant A, B en A', B'.

Alors $\left.\begin{array}{l} \widehat{A'B',A's(C)} = \alpha = \widehat{A'B',A'C'} \Rightarrow s(C) \in (A'C') \\ \widehat{B'A',B's(C)} = \beta = \widehat{B'A',B'C'} \Rightarrow s(C) \in (B'C') \end{array}\right\} \Rightarrow s(C) \in (A'C') \cap (B'C') \Rightarrow s(C) = C'$

CQFD

* $A'B = A'C$ d'après 2.1, et I, C sont symétriques /à $A'B'$ d'après 2.2 donc
<u>A' sera le centre du cercle circonscrit à BIC.</u>

La similitude s_1 transformera le cercle Γ circonscrit à $AB'C'$ en le cercle circonscrit à BIC, d'où $\boxed{s_1(O) = A'}$

Ainsi : s_1 : $A \to I$ sera de rapport $\dfrac{A'I}{OA} = \dfrac{d(I, BC)}{d(A, B'C')}$

$B' \to C$

$C' \to B$

$O \to A'$

On a $OA = R$, $d(I, BC) = r$ et comme A et I sont symétriques par rapport à $B'C'$ (2.2), $d(A, B'C') = \frac{1}{2} AI$ d'où

$$\boxed{\frac{A'I}{R} = \frac{r}{\frac{1}{2} AI}}$$

d'où $AI \cdot A'I = 2rR$. La puissance de I par rapport au cercle Γ est :

$$\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = OI^2 - R^2$$

d'où la formule annoncée : $\boxed{OI^2 = R^2 - 2Rr}$

4.2

$c' = e^{i\frac{\theta_a + \theta_b}{2}}$

$e^{i\theta_b} = b$

$a = e^{i\theta_a}$

$e^{i\frac{\theta_b + \theta_c}{2}} = a'$

c

$b' = e^{i\frac{\theta_a + \theta_c + 2\pi}{2}} = -e^{i\frac{\theta_a + \theta_c}{2}}$

cas de figure où B, A, C dans cet ordre

A' est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A, etc. Donc si $a = e^{i\theta_a}$, $b = e^{i\theta_b}$ et $c = e^{i\theta_c}$ où $\theta_a, \theta_b, \theta_c \in [0, 2\pi[$, on aura :

$$c' = e^{i\frac{\theta_a + \theta_b}{2}} \qquad a' = e^{i\frac{\theta_b + \theta_c}{2}} \qquad b' = e^{i\frac{\theta_a + \theta_c + 2\pi}{2}} = -e^{i\frac{\theta_a + \theta_c}{2}}$$

donc
$$\begin{cases} a'^2 = e^{i(\theta_b + \theta_c)} = bc \\ b'^2 = ac \\ c'^2 = ab \end{cases}$$

et $a'b'c' = -abc$

* Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ / $a = \alpha^2$ $b = \beta^2$ $c = \gamma^2$

$$\begin{cases} a'^2 = \beta^2\gamma^2 \Rightarrow a' = \pm\beta\gamma \\ b'^2 = \alpha^2\gamma^2 \Rightarrow b' = \pm\alpha\gamma \\ c'^2 = \alpha^2\beta^2 \Rightarrow c' = \pm\alpha\beta \end{cases}$$

Choisissons les signes de α, β, γ de sorte que $a' = -\beta\gamma$ et $b' = -\alpha\gamma$. On aura ensuite : $a'b'c' = -abc \Leftrightarrow \beta\gamma.\alpha\gamma.c' = -\alpha^2\beta^2\gamma^2 \Rightarrow c' = -\alpha\beta$.

4.3 $s_1(z) = \lambda z + \mu$ vérifie $\begin{cases} \lambda b' + \mu = c \\ \lambda c' + \mu = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{\gamma+\beta}{-\alpha} \\ \mu = -\beta\gamma \end{cases}$

Donc $\boxed{s_1(z) = -\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} z - \beta\gamma}$

$s_1(a) = -\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}.\alpha^2 - \beta\gamma = -\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = a' + b' + c'$

Si g' et h' sont les affixes du cdg et de l'orthocentre du triangle $A'B'C'$, on sait que : $g' = \dfrac{a'+b'+c'}{3}$ et $\vec{OH'} = 3\vec{OG'}$ (1.1) donc $h' = a' + b' + c'$. Ainsi $s_1(a)$ sera l'orthocentre du triangle $A'B'C'$, ie I d'après 2.2.

<u>2è solution</u> : On montre que $s_1(A) \in AA'$, puis sur BB' pour pouvoir conclure $s_1(A) = I$.

|| <u>Lemme</u> : Les points A, B, C sont alignés ssi les affixes a, b, c vérifient $(b-a)\overline{(c-a)} \in \mathbb{R}$

preuve : ABC alignés $\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$ $\vec{AB} = \lambda\vec{AC} \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$ $b - a = \lambda(c-a)$

$\Leftrightarrow (b-a)(\overline{c-a}) \in \mathbb{R}$ oui

$s_1(A), A, A'$ seront alignés ssi $\overrightarrow{s_1(A)A'}$ et $\vec{AA'}$ sont colinéaires ie :

$(a' - s_1(a))(\bar{a}' - \bar{a}) \in \mathbb{R}$ où $s_1(a) = a' + b' + c'$

On a : $(a' - s_1(a))(\bar{a}' - \bar{a}) = (-b' - c')(\bar{a}' - \bar{a}) = -\bar{a}'b' - \bar{a}'c' + \bar{a}b' + \bar{a}c'$

$= -\alpha\bar{\beta} - \alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma - \bar{\alpha}\beta \in \mathbb{R}$

* s_1 : $B'C'AO$ en $CBIA'$

s_2 : $C'B'BO$ en $ACIB'$

s_3 : $A'C'CO$ en $BAIC'$

$s_1(z) = -\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} z - \beta\gamma$ sera une translation ssi $-\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$

On montrerait de même que $s_2(z) = \lambda_2 z + \mu_2$ où λ_2 et μ_2 s'obtiennent par permutation circulaire : $\lambda_2 = \frac{\alpha+\gamma}{-\beta}$ et $\mu_2 = -\gamma\alpha$

et on constate que : s_2 translation $\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = 0 \Leftrightarrow s_1$ translation.

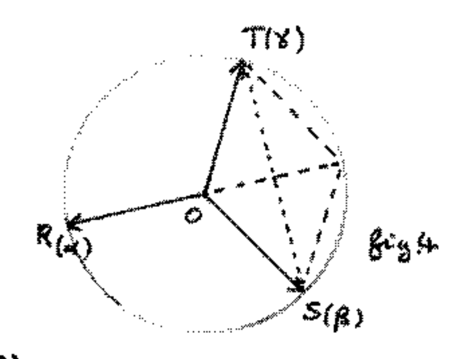
De même pour s_3.

* s_1 translation $\Rightarrow$ ABC équilatéral

$$a+b+c = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 0 \text{ car } \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ |\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1\end{cases}$$ montre que ABC est équilatéral (1.4).

En effet :

Lemme : $\left.\begin{array}{l}|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\beta=\alpha j\\ \gamma=\alpha j^2\end{cases}$ (ou le contraire)



preuve :

1ère méthode : α, β, γ sont les affixes des pts RST du cercle trigonométrique. $\alpha+\beta+\gamma = 0$ assure $\vec{OR}+\vec{OS}+\vec{OT} = \vec{O}$ donc RST est équilatéral (1.4) et la rotation $r_{O,\frac{2\pi}{3}}$ fera passer de R à S et de S à T (ou de R à T et de T à S)

Comme $r_{O,\frac{2\pi}{3}}(z) = e^{i\frac{2\pi}{3}} z = jz$, on en déduit $\beta = j\alpha$ et $\gamma = j^2\alpha$ (ou le contraire)

2ème méthode : En posant $z = \frac{\beta}{\alpha}$ et $z' = \frac{\gamma}{\alpha}$, on doit montrer le pb plus simple :

$$\left.\begin{array}{l}|z|=|z'|=1\\ 1+z+z'=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}z=j\\ z'=j^2\end{cases} \text{ ou le contraire.}$$

On a $z = e^{i\theta}$, $z' = e^{i\theta'}$ et $1+e^{i\theta}+e^{i\theta'} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}1+\cos\theta+\cos\theta' = 0\\ \sin\theta+\sin\theta' = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2} = 0\end{cases}$

d'où $\begin{cases}\sin\frac{\theta+\theta'}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\theta+\theta'}{2} = k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta+\theta' = k2\pi\\ \text{ou}\\ \cos\frac{\theta-\theta'}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\theta-\theta'}{2} = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \theta-\theta' = \pi+k2\pi.\end{cases}$

1) Si $\theta+\theta' = k2\pi$, $1+\cos\theta+\cos\theta' = 1+\cos\theta+\cos(-\theta) = 1+2\cos\theta = 0$ ssi $\begin{cases}\theta \equiv \frac{2\pi}{3} & [2\pi]\\ \text{ou}\\ \theta \equiv -\frac{2\pi}{3} & [2\pi]\end{cases}$

et alors $\begin{cases}\theta' \equiv -\frac{2\pi}{3}\\ \text{ou}\\ \theta' \equiv \frac{2\pi}{3}\end{cases}$ de sorte que $\begin{cases}z=j\\ z'=j^2\end{cases}$ ou $\begin{cases}z=j^2\\ z'=j\end{cases}$

2) Si $\theta-\theta' = \pi+k2\pi$ $\quad 1+\cos\theta+\cos(\theta-\pi) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ impossible.

D'où le lemme.

CQFD

NB : Solution plus rapide. Si $\alpha+\beta+\gamma=0$ et $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$, alors $\bar\alpha+\bar\beta+\bar\gamma = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 0 \Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 0.$

Remarque : OR = OS = OT = 1 dans la fig. 4. On constate bien que $\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT}$ ne peut être un vecteur de norme 1 (et donc pouvoir s'écrire $\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OR}$) que si $\widehat{\overrightarrow{OS},\overrightarrow{OT}} \equiv \frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.

On le vérifie par le calcul :

$$|e^{i\theta}+e^{i\theta'}| = 1 \Leftrightarrow (\cos\theta+\cos\theta')^2+(\sin\theta+\sin\theta')^2 = 1 \Leftrightarrow \cos(\theta-\theta') = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta-\theta' \equiv \begin{cases} \frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

4.4 Le centre de s_1 est l'unique pt invariant :

$$s_1(z_J) = z_J \Leftrightarrow \left(1+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)z = -\beta\gamma \Leftrightarrow \boxed{z_J = \frac{-\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

z_J est invariant par permutation circulaire, donc sera aussi le centre de s_2 et s_3.

$z_I = a'+b'+c'$ (car I est l'orthocentre de $A'B'C'$ et $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ d'après 1.1) donc

$$z_I\overline{z_J} = (-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)\frac{-\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}} = \frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}} = 1$$

par suite : $\arg z_I \equiv \arg z_J$ $[2\pi]$ donc <u>I et J sont alignés avec O</u> et J est à l'extérieur de Γ

* s_2 transforme $C'B'BO$ en $ACIB'$ donc $\frac{JB'}{JO} = \frac{B'A}{OC'} = \frac{B'A}{OA}$ car $OC' = OA$

s_3 transforme $A'C'CO$ en $BAIC'$ donc $\frac{JC'}{JO} = \frac{C'A}{OC'} = \frac{C'A}{OA}$

On aura bien $\boxed{\frac{B'A}{B'J} = \frac{C'A}{C'J} = \frac{OA}{OJ}}$

2ᵉ méthode : On calcule tout en fct de α, β, γ :

$B'A^2 = |\alpha^2+\alpha\gamma|^2 = |\alpha+\gamma|^2$

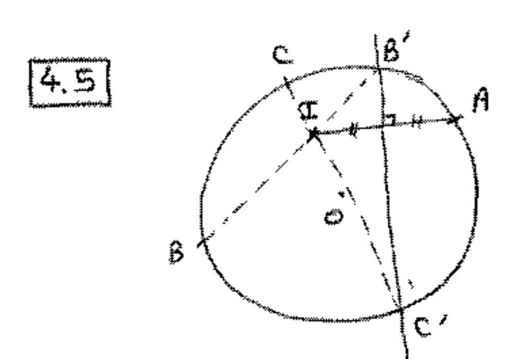
$B'J^2 = \left|-\alpha\gamma+\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right|^2 = \left|\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right|^2$ d'où $\frac{B'A}{B'J} = |\alpha+\beta+\gamma|$

$OA^2 = |\alpha^2|^2 = 1$

$OJ^2 = \left|\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right|^2 = \frac{1}{|\alpha+\beta+\gamma|^2}$ d'où $\frac{OA}{OJ} = |\alpha+\beta+\gamma|$ et $\boxed{\frac{B'A}{B'J} = \frac{OA}{OJ}}$

Par perm. circulaire de A, B, C et α, β, γ on obtient aussi $\frac{C'B}{C'J} = |\alpha+\beta+\gamma|$ d'où la conclusion puisque $C'B = C'A$ (2.1).

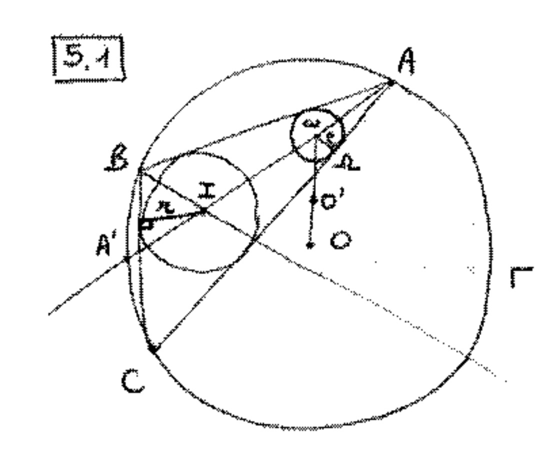
4.5



B'C' est la médiatrice de IA d'après 2.1.
D'où B', C' et A' à l'intersection de AI et Γ.
On est ramenés à la construction 3.2, toujours possible car I est à l'intérieur strict de A'B'C'.

NB : On pourrait aussi construire J comme image de I dans l'inversion de pôle et de puissance 1, puis C' à l'aide de $\frac{C'A}{C'J} = \frac{OA}{OJ}$ (C' est à l'intersection de 2 cercles, B' étant l'autre point d'intersection).

5.1



(4.1) donne $\frac{A'I}{R} = \frac{r}{\frac{1}{2}AI}$ où $r = d(I, BC)$.

I est le centre du cercle Ω_i inscrit dans ABC.
Ω_i et Ω sont tangents aux droites AB et AC, donc l'homothétie de centre A amenant ω sur I transformera Ω en Ω_i et :

$$\frac{r}{AI} = \frac{\rho}{A\omega}$$

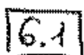
D'où $\frac{A'I}{R} = \frac{\rho}{\frac{1}{2}A\omega} \iff \boxed{A'I \cdot A\omega = 2\rho R}$

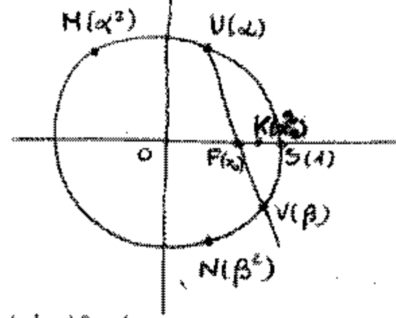
5.2 A', I, ω sont alignés donc $\overrightarrow{A'I} = k\,\overrightarrow{A'\omega}$ et la relation 5.1 impose :
$k.\overrightarrow{A'\omega} \cdot \overrightarrow{A\omega} = 2\rho R$ soit $k = \frac{-2\rho R}{p}$ où p est la puissance de ω par rapport au cercle Γ. k est donc parfaitement défini par les données des 2 cercles Ω et Γ (et ne dépend pas du choix de A).

* Si $k = 1$, $I = \omega$ et Ω est le cercle inscrit au triangle ABC.

5.3 $\begin{cases} \overrightarrow{OO'} = k\,\overrightarrow{O\omega} \\ \overrightarrow{A'I} = k\,\overrightarrow{A'\omega} \end{cases}$ $k \neq 1$

L'homothétie h de centre ω transformant A' en I va donc transformer O en O'.
Soit k' le rapport de h :
$\overrightarrow{\omega I} = k'\overrightarrow{\omega A'} \iff \overrightarrow{\omega A'} + \overrightarrow{A'I} = k'\overrightarrow{\omega A'} \iff k\overrightarrow{A'\omega} = (k'-1)\overrightarrow{\omega A'} \iff k' = 1-k$
Si A décrit Γ, $h_\omega(A') = I$ décrit le cercle $h_\omega(\Gamma)$ de centre $h_\omega(O) = O'$ et de rayon $|1-k|.R$. CQFD





Supposons U et V distincts.

$z \in UV \iff (z-\alpha)(\bar\beta-\bar\alpha) \in \mathbb{R} \iff (z-\alpha)(\bar\beta-\bar\alpha) = (\bar z-\bar\alpha)(\beta-\alpha)$

$$(\bar\beta-\bar\alpha)z + (\alpha-\beta)\bar z = \alpha\bar\beta - \bar\alpha\beta$$

$$z + \underbrace{\frac{\alpha-\beta}{\bar\beta-\bar\alpha}}_{=\alpha\beta}\bar z = \underbrace{\frac{\alpha\bar\beta-\bar\alpha\beta}{\bar\beta-\bar\alpha}}_{=\alpha+\beta}$$

(multiplier haut et bas par $\alpha\beta$)

d'où une équation complexe de la dte UV :

$$z + \alpha\beta\bar z = \alpha+\beta$$

Pour $z = x_0$, $\boxed{x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}}$

NB : l'équation de UV peut s'obtenir en ~~développant~~ annulant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & z \\ \bar\alpha & \bar\beta & \bar z \end{vmatrix}.$$

6.2 $\sigma(z) = (\alpha+\beta)z - \alpha\beta$ donc :

$\sigma(\alpha) = (\alpha+\beta)\alpha - \alpha\beta = \alpha^2 \implies \sigma(U) = M$

$\sigma(\beta) = (\alpha+\beta)\beta - \alpha\beta = \beta^2 \implies \sigma(V) = N$

$\sigma(F) = T$ d'affixe $t = \sigma(x_0) = (\alpha+\beta)x_0 - \alpha\beta$ ~~$= \frac{(\alpha+\beta)^2}{1+\alpha\beta} - \alpha\beta$~~

* $\overrightarrow{KT}$ a pour affixe : $t - x_0^2 = (\alpha+\beta)x_0 - \alpha\beta - x_0^2$

$$= (1+\alpha\beta)x_0^2 - \alpha\beta - x_0^2 = \boxed{\alpha\beta(x_0^2-1)}$$

* $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $\beta^2-\alpha^2$ et :

$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{KT} \iff (n-m).(\overline{t-k}) \in i\mathbb{R} \iff (\beta^2-\alpha^2).\bar\alpha\bar\beta(x_0^2-1) \in i\mathbb{R}$

$\iff \bar\alpha\beta - \alpha\bar\beta \in i\mathbb{R} \iff \underbrace{\alpha\bar\alpha}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\right)}_{2i\,\mathrm{Im}\frac{\beta}{\alpha}} \in i\mathbb{R}$ oui

Donc $\boxed{\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{KT}}$

NB : Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ont z et z' pour affixes, on a :

$$\begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ colinéaires} \Leftrightarrow z\bar{z}' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R} \\ \vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow z\bar{z}' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z}{z'} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

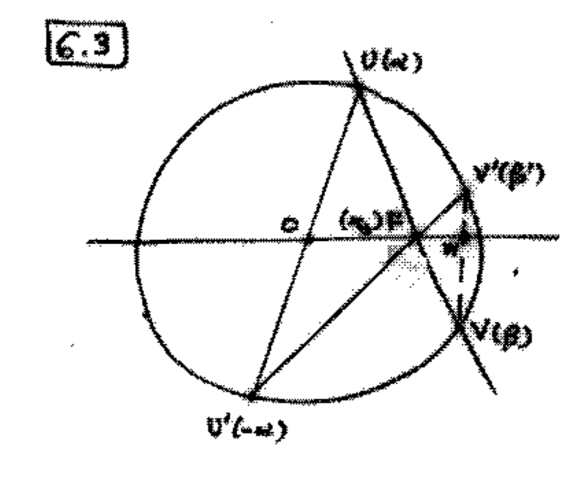
Cela provient de : $\arg z\bar{z}' = \arg z - \arg z' = \arg \dfrac{z}{z'} = \widehat{\vec{i},\vec{u}} - \widehat{\vec{i},\vec{u}'} = \widehat{\vec{u}',\vec{u}}$.

* $MN \perp KT$

$KT = x_0^2 - 1 = KS$ ne dépend pas de T

Enfin $T = \sigma(F) \in MN = \sigma(U)\sigma(V)$ car $F \in UV$. Lorsque U et V varient, MN restera tangente au cercle de centre K et de rayon $x_0^2 - 1 = KS$.

6.3



L'équation complexe de la dte passant par U et V est : $z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$ (6.1)

donc $\begin{cases} x_0(1+\alpha\beta) = \alpha + \beta \\ x_0(1 - \alpha\beta') = -\alpha + \beta' \end{cases}$

Eliminons α de ces 2 équations :

$\begin{cases} \alpha(\beta x_0 - 1) = \beta - x_0 \\ -\alpha(\beta' x_0 - 1) = \beta' - x_0 \end{cases}$

d'où $\dfrac{\beta - x_0}{\beta x_0 - 1} = \dfrac{\beta' - x_0}{1 - \beta' x_0} \Leftrightarrow \boxed{\beta + \beta' = \dfrac{2x_0}{1+x_0^2}(1 + \beta\beta')}$ où $\dfrac{2x_0}{1+x_0^2} \in]0,1[$.

Cette relation prouve que les points $V(\beta)$, $V'(\beta')$ et $W\left(\dfrac{2x_0}{1+x_0^2}\right)$ sont alignés (6.1). On se ramène ainsi au problème 6.2 avec V, V', W au lieu de V, U, F. $N'(\beta'^2)$ remplace $M(\alpha^2)$ de sorte que NN' reste tangente au cercle de centre $K'\left(\dfrac{4x_0^2}{(1+x_0^2)^2}\right)$ et de rayon $K'S$ quand U et V varient.

Remarques

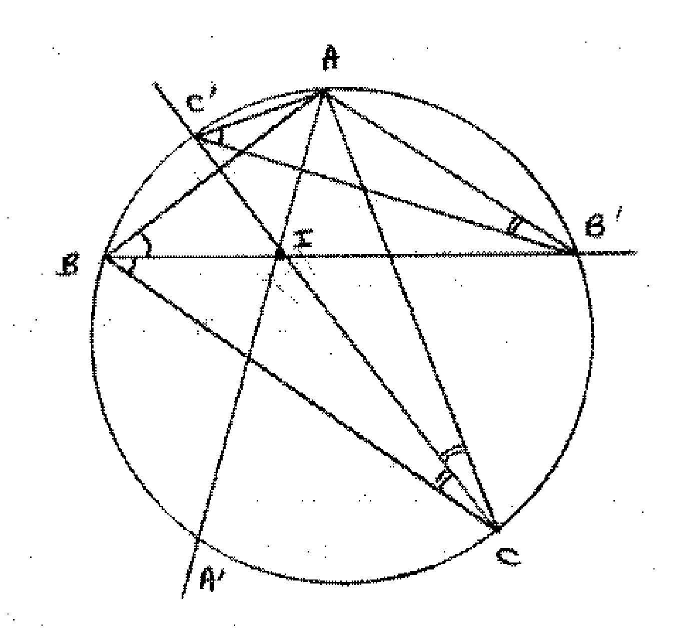
4.1

s_1 est l'unique similitude directe telle que

$s_1(B') = C$

$s_1(C') = B$

et il s'agit de prouver que $s_1(A) = I$.



On a : $\widehat{BC, BI} = \widehat{BI, BA} = \widehat{C'B', C'A}$ (1) (angles de droites)

↑ (BB') bissectrice de $\hat{B}$ ↑ cocyclicité

et : $\widehat{CB, CI} = \widehat{CI, CA} = \widehat{B'C', B'A}$ (2)

s_1 conserve les angles, donc $\widehat{C'B', C'A} = \widehat{s_1(C')s_1(B'), s_1(C')s_1(A)}$
$= \widehat{BC, Bs_1(A)}$

qui allié à (1) donne :

$$\widehat{BC, BI} = \widehat{BC, Bs_1(A)} \quad (1')$$

De même, $\widehat{B'C', B'A} = \widehat{s_1(B')s_1(C'), s_1(B')s_1(A)} = \widehat{CB, Cs_1(A)}$ allié à (2) entraîne :

$$\widehat{CB, CI} = \widehat{CB, Cs_1(A)} \quad (2')$$

(1') et (2') entraînent : $s_1(A) \in (BI) \cap (CI) = \{I\}$

soit $\boxed{s_1(A) = I}$

Énoncé de la première composition du CAPES interne 1988

L'objet du problème est l'étude de polynômes qui approchent la fonction cosinus sur un intervalle d'amplitude un quart de période. La périodicité de la fonction cosinus conduit naturellement à introduire des fonctions périodiques construites à partir de polynômes. Le problème présente un triple aspect : approximation de la fonction cosinus, suite de polynômes, fonctions périodiques. Il est divisé en cinq séquences ; les objectifs en sont précisés en tête de chacune d'elles. La séquence **2** n'intervient pas dans les séquences suivantes.
On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels ; $|x|$ désigne la valeur absolue du réel x. Pour une fonction h, les symboles h', h'', h''' désignent les dérivées première, seconde, troisième de h. Une fonction w est dite 2-périodique si elle est définie sur $\mathbb{R}$ et si elle vérifie $w(x+2) = w(x)$ pour tout réel x ; en particulier la fonction $x \to \cos \pi\, x$ est 2-périodique.

1. Un encadrement de la fonction cosinus

Dans cette séquence, directement liée à des activités possibles en classe, un sujet d'étude est proposé et des démarches sont décrites. Il est demandé :

1.1. *une solution*, c'est-à-dire une justification claire (raisonnements, calculs, figures) de tous les points intermédiaires et des résultats indiqués ;

1.2. ensuite *un bref commentaire* à caractère didactique, comparant les méthodes décrites quant à leur intérêt et leur portée dans un travail en classe (consolidation de connaissances, acquisition de savoir-faire, mise en jeu de notions nouvelles).

L'objectif mathématique est d'établir l'encadrement

$$1 - 6x^2 + 4x^3 \leq \cos \pi,\ x \leq 1 - 4x^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

et d'évaluer la qualité de cet encadrement.

Pour établir l'encadrement on propose les deux méthodes suivantes :

• *Première méthode*

La résolution graphique dans l'intervalle $[0,\ 1]$ de l'inéquation $\sin\frac{\pi x}{2} \geq \sqrt{2}x$ conduit à la majoration de $\cos \pi\ x$.

La minoration de $\cos \pi$ équivaut, en posant d'abord $X = \frac{1}{2} - x$, à

$$\sin \pi\ X \geq 3X - 4X^3 \quad \text{pour} \quad 0 \leq X \leq \frac{1}{2}.$$

On pose ensuite $X = \sin t$, où t décrit l'intervalle $\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$; on observe que, pour ces valeurs de t, on a

$$\pi \sin t \geq 3t \quad \text{et} \quad \sin(\pi \sin t) \geq \sin 3t.$$

On conclut en utilisant la relation $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$.

• *Deuxième méthode*

On pose $y(x) = 1 - 4x^2 - \cos \pi x$ et $z(x) = 1 - 6x^2 + 4x^3 - \cos \pi\ x$. On étudie sur l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ les variations de y'', puis de y' ainsi que les variations de z''', puis de z'', puis de z' ; on en déduit le signe de y et le signe de z.

Pour évaluer la qualité de l'encadrement on étudie la fonction $y - z$ et on représente sur un même graphique, à une échelle appropriée, les fonctions $y - z$, y et z, en plaçant notamment les tangentes aux points d'abscisse 0, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Pour la suite, on note Q le polynôme $Q(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 1$ qui intervient explicitement dans les séquences **2** et **3**.

2. Étude et caractérisation d'une fonction 2-périodique

Les propriétés de la fonction cosinus et les résultats de la séquence **1** suggèrent de construire à partir de polynômes des fonctions paires et 2-périodiques.

On considère dans cette séquence la fonction g, associée à Q, définie par les conditions :

$$g \text{ est paire, 2-périodique et on a } g(x) = Q(x) \text{ pour } 0 \leq x \leq 1.$$

2.1. a. Établir successivement qu'on a, pour $0 \leq x \leq 1$,

$$g(x) + g(1 - x) = 0, \qquad g(x) + g(x + 1) = 0,$$

et $\quad g(x + j) = (-1)^j g(x) \quad$ pour j élément de $\mathbb{Z}$.

Montrer que le point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est centre de symétrie de la représentation graphique de g.

Indiquer comment on obtient la représentation graphique de g à partir de la courbe donnant la représentation graphique de Q sur l'intervalle $[0, 1]$.

b. Montrer que g a une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.
Les deux questions suivantes conduisent à deux caractérisations de la fonction g.

2.2. **a.** On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions s données par :

$$\begin{aligned} s(x) &= \alpha x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu \quad \text{pour} \quad -1 \leq x < 0 \\ \text{et} \quad s(x) &= \beta x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

où α, β, λ, μ et ν sont des coefficients réels.
Montrer que toute fonction de $\mathcal{S}$ a une dérivée seconde continue sur l'intervalle $[-1, 1]$.
Trouver l'expression générale des fonctions s satisfaisant en outre à

$$s(1) = s(-1), \quad s'(1) = s'(-1), \quad s''(1) = s''(-1).$$

On vérifiera que l'ensemble de ces fonctions est un espace vectoriel de dimension 2.

b. Décrire explicitement l'ensemble des fonctions réelles 2-périodiques ayant une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$ et dont la restriction à chaque intervalle $]j, j+1[$ (j élément de $\mathbb{Z}$) est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
Montrer que g est l'unique telle fonction prenant la même valeur que $\cos \pi x$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

2.3. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles 2-périodiques ayant une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$ et prenant la même valeur que $\cos \pi x$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$

a. Établir qu'on a :

$$\int_{-1}^{1} f''(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} |x| f''(x)\mathrm{d}x = 4$$

pour tout élément f de $\mathcal{F}$.

b. On pose $H(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} [f''(x)]^2 \mathrm{d}x$, pour f élément de $\mathcal{F}$
Calculer $H(f)$ lorsque $f(x) = \cos \pi x$.
La fonction g appartient aussi à $\mathcal{F}$. Calculer $H(g)$.

c. Soit f un élément de $\mathcal{F}$. À l'aide de l'égalité $g''(x) = 24\,|x| - 12$ pour $-1 \leq x \leq 1$, calculer :

$$\int_{-1}^{1} g''(x)[f''(x) - g''(x)]\mathrm{d}x,$$

en déduire qu'on a $H(f) = H(g) + H(f - g)$.

d. Montrer que g est l'unique élément de $\mathcal{F}$ rendant minimum la quantité $H(f)$ lorsque f décrit $\mathcal{F}$.

3. Une suite de polynômes

3.1. Au polynôme Q défini à la séquence **1**, on associe les trois polynômes P_1, P_2, P_3 définis par :

$$P_1(x) = \frac{1}{24}Q''(x), \quad P_2(x) = \frac{1}{24}Q'(x), \quad P_3(x) = \frac{1}{24}Q(x).$$

Pour $n = 1, 2, 3$ montrer qu'on a $P_n(x) + (-1)^n P_n(-x) = 2\frac{x^n}{n!}$ et exprimer $P_n(1-x)$ en fonction de $P_n(x)$.

3.2. On envisage plus généralement une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes vérifiant pour tout n,

$$P_n(x) + (-1)^n P_n(-x) = 2\frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_n(x) = (-1)^n P_n(1-x).$$

a. Que vaut, pour une telle suite, $P_n(x) + P_n(x+1)$?

b. Montrer que, pour chaque n, il existe au plus un polynôme P_n vérifiant les conditions ci-dessus.

c. On admet provisoirement (cf. 4.3.b.) l'existence de la suite (P_n).
Exprimer P_n' en fonction de P_{n-1} $(n \geq 2)$ et calculer la dérivée n-ième de P_n. Utilisant la relation liant $P_n(x+1)$ et $P_n(x)$ et la formule de Taylor, montrer qu'on a :

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\left[\frac{P_{n-1}(x)}{1!} + \cdots + \frac{P_{n-k}(x)}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right].$$

Montrer la cohérence de ce résultat avec les expressions de P_n pour $n = 1, 2, 3$. Calculer P_4 et P_5.

4. Une suite de fonctions périodiques

La question 4.1. de cette séquence prépare la construction d'une suite de fonctions périodiques qui est étudiée à la question 4.2. et qui est liée à la suite (P_n).

4.1. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions réelles a, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$a(x) = a(-x) \quad \text{et} \quad a(x) = -a(1-x)$$

pour tout x réel et on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions réelles b, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$b(x) = -b(-x) \quad \text{et} \quad b(x) = b(1-x)$$

pour tout x réel.

a. Montrer que toute fonction a de $\mathcal{A}$, ainsi que toute fonction b de $\mathcal{B}$, est 2-périodique.

b. À tout élément a de $\mathcal{A}$, on associe la fonction $I(a)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$I(a)(x) = \int_0^x a(t)\mathrm{d}t,$$

et à tout élément b de $\mathcal{B}$, on associe la fonction $J(b)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$J(b)(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x b(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que I est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ et J une application de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$.

c. On suppose que la restriction à l'intervalle $[0,\ 1]$ d'une fonction a de $\mathcal{A}$ est strictement croissante.
Indiquer les variations de la restriction à ce même intervalle $[0,\ 1]$ de chacune des fonctions

$$I(a),\ J\circ I(a),\ I\circ J\circ I(a) \quad \text{et} \quad J\circ I\circ J\circ I(a).$$

4.2. a. À partir de la fonction u_1, paire et 2-périodique, définie par :

$$u_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

on construit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ par les formules :

$$u_{2m}(x) = \int_0^x u_{2m-1}(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad u_{2m+1}(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x u_{2m}(t)\mathrm{d}t,$$

pour m entier, $m \geq 1$ et x réel.
Montrer que pour $n \geq 2$, u_n est une fonction 2-périodique ayant une dérivée $(n-1)$-ième continue sur $\mathbb{R}$ et dont la restriction à chaque intervalle $]j,\ j+1[$ (j élément de $\mathbb{Z}$) est un polynôme de degré n.
Indiquer l'allure de la représentation graphique de u_n selon les valeurs de n ; montrer qu'on a, pour m entier, $m \geq 1$, $(-1)^m u_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ et $(-1)^m u_{2m-1}(0) > 0$.

b. On note R_n le polynôme vérifiant $R_n(x) = u_n(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$.
Montrer que, pour m entier, $m \geq 1$, $R_{2m}(x) - \dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$ définit un polynôme impair et $R_{2m-1}(x) - \dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$ définit un polynôme pair.
Montrer que la suite (R_n) n'est autre que la suite (P_n) introduite à la séquence **3**. (Cela établit l'existence de la suite (P_n).)

5. Une suite de fonctions périodiques convergeant vers la fonction cosinus

5.1. À partir de la suite (u_n) décrite à la séquence **4**, on définit la suite de fonctions $(v_n)_{n\geq 1}$ par les formules :

$$v_{2m}(x) = \frac{u_{2m}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{u_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \text{et} \quad v_{2m-1}(x) = \frac{u_{2m-1}(x)}{u_{2m-1}(0)}$$

pour m entier, $m \geq 1$ et x réel.
Calculer explicitement $v_2(x)$ et $v_3(x)$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.
Indiquer l'allure de la représentation graphique de v_n pour $n \geq 2$.

5.2. Calculer, pour k entier, $k \geq 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} u_1(x)\cos(k\,\pi x)\mathrm{d}x$.
Montrer qu'on a :

$$u_1(x) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$$

pour tout x réel.

En déduire un développement en série trigonométrique de u_{2m} et de u_{2m+1} (m entier, $m \geq 1$).
Montrer que la suite (v_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \to \cos \pi x$.

Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

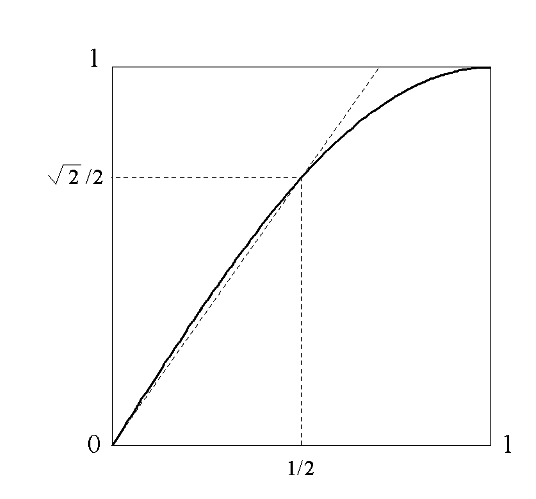
Cl. Piquet
20.04.00

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1988

1. Un encadrement de la fonction cosinus

1. *PREMIÈRE MÉTHODE* : Le graphe de $x \mapsto \sin \frac{\pi}{2}x$ est concave sur l'intervalle $[0,1]$; comme $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la droite $y = \sqrt{2}\,x$ coupe le graphe de cette fonction aux points $x = y = 0$ et $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et la corde correspondante est en dessous de la courbe $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]\cdot$ Donc $\sin \frac{\pi}{2}x \geq \sqrt{2}x$ lorsque $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\cdot$ Il en résulte, pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, que

$$\cos \pi x = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2}x \leq 1 - 2(\sqrt{2}x)^2 = 1 - 4x^2 .$$



Sur $[0, \frac{\pi}{6}]$, le graphe de $x \mapsto \sin x$ est concave, donc au dessus de la corde passant par les extrémités de cet arc ; comme $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, cette corde est portée par la droite $y = \frac{3}{\pi}x$ d'où $\sin t \geq \frac{3}{\pi}t$ si $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$. La fonction sinus étant croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a aussi $\sin(\pi \sin t) \geq \sin 3t$ si $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$, d'où $\sin(\pi \sin t) \geq 3\sin t - 4\sin^3 t$. On pose $X = \sin t$; cette égalité détermine une bijection strictement croissante entre $[0, \frac{\pi}{6}]$ et $[0, \frac{1}{2}]$. On a donc $\sin \pi X \geq 3X - 4X^3$ si $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$. Si l'on pose enfin $X = \frac{1}{2} - x$, on obtient $\cos \pi x \geq 3(\frac{1}{2} - x) - 4(\frac{1}{2} - x)^3 = 1 - 6x^2 + 4x^3$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\cdot$

DEUXIÈME MÉTHODE : On a immédiatement

$$y' = -8x + \pi \sin \pi x, \qquad y'' = \pi^2 \cos \pi x - 8,$$

$$z' = -12x + 12x^2 + \pi \sin \pi x, \qquad z'' = -12 + 24x + \pi^2 \cos \pi x, \quad \text{et} \quad z^{(3)} = 24 - \pi^3 \sin \pi x .$$

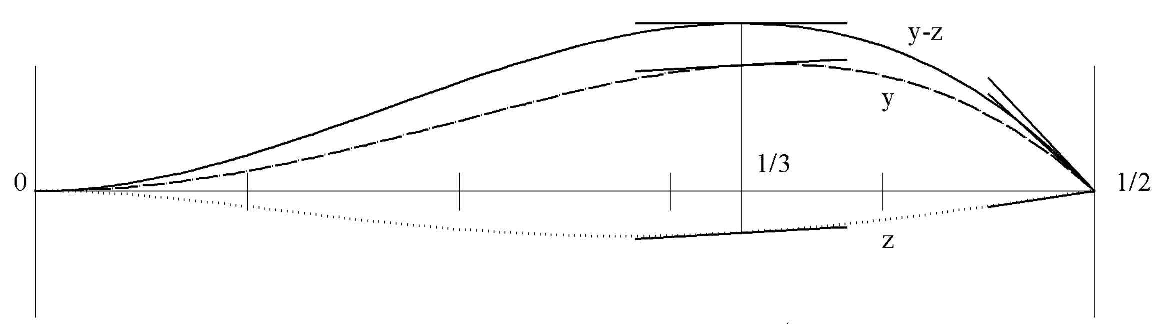
En utilisant le théorème de Rolle et le théorème de la valeur intermédiaire, on obtient les tableaux de variations suivants :

x	0		ξ_1		ξ_2		$\frac{1}{2}$
y''	π^2-8	↘	0	↘			-8
y'	0	↗		↘	0	↘	$\pi-4$
y	0	↗		↗		↘	0

x	0		ξ_4		ξ_5		ξ_3		$\frac{1}{2}$
$z^{(3)}$	24	↘		↘		↘	0	↘	$24-\pi^3$
z''	π^2-12	↗	0	↗		↗		↘	0
z'	0	↘		↗	0			↗	$\pi-3$
z	0	↘		↘		↗		↗	0

Il en résulte que pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on a $y(x) \geq 0$, l'inégalité étant stricte si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Le second tableau donne $z(x) \leq 0$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, l'inégalité étant stricte si $< x < \frac{1}{2}$.

Remarque : Les inégalités $\xi_1 < \xi_2$, $\xi_4 < \xi_3$ et $\xi_4 \leq \xi_5$ sont immédiates ; pour situer ξ_5 par rapport à ξ_3, on calcule ξ_3 et on observe que $z'(\xi_3) > 0$. Ce point n'intervient plus dans la conclusion. Enfin, $y(x) - z(x) = 2x^2(1-2x)$ donne $(y-z)'(x) = 4x(1-3x)$. On obtient la représentation graphique suivante :



La première méthode met en œuvre des notions assez variées (concavité de graphe, changements de variables) et est très séduisante ; elle est toutefois destinée à un public déjà assez expérimenté. La seconde méthode a l'avantage d'être générale, facile à conduire (au prix de quelques calculs simples). Elle permet aussi une évaluation numérique de la qualité de l'encadrement obtenu.

2. Etude et caractérisation d'une fonction 2-périodique

2.1.a. Si $x \in [0,1]$, on a $1-x \in [0,1]$, donc

$$g(x) + g(1-x) = Q(x) + Q(1-x) = 2 - 6(x^2 + (1-x)^2) + 4(x^3 + (1-x)^3)$$

d'où $g(x) + g(1-x) = 0$ sur cet intervalle ; g étant paire, si $-1 \leq x \leq 0$ on a

$$g(x) + g(1-x) = g(-x) + g(1-x) = -g(1+x) + g(1-x)$$

mais g est aussi 2-périodique, donc

$$g(x)+g(1-x)=-g(1+x)+g(-1-x)=0$$

puisque g est paire. On a donc $g(x)+g(1-x)=0$ pour $-1\leq x\leq 1$, donc pour tout x réel puisque g est 2-périodique. La périodicité donne encore

$$g(x)+g(x+1)=g(x)+g(x-1)=g(x)+g(1-x)=0$$

(car g est paire !), ceci pour tout x réel. Enfin, de $g(x+1)=-g(x)$ on tire immédiatement, par récurrence, $g(x+j)=(-1)^j g(x)$ pour $j\in\mathbb{Z}$. Si $\big(x,g(x)\big)$ est un point du graphe de g, son symétrique par rapport au point $(\frac{1}{2},0)$ est le point $\big(1-x,-g(x)\big)=\big(1-x,g(1-x)\big)$ qui appartient au graphe de g.

Soit $\mathcal{G}$ le graphe de Q sur $[0,1]$; on en tire le graphe de g par la succession

1) d'une symétrie par rapport à l'axe Oy (g est paire).
2) de toutes les translations, parallèles à l'axe Ox et de longueur (algébrique) $2n$ (où $n\in\mathbb{Z}$) du graphe obtenu au 1), car g est 2-périodique.

Ce procédé donne, à partir d'une fonction continue q quelconque définie sur $[0,1]$ une fonction 2-périodique *continue*, car, indépendamment des valeurs de q aux points 0 et 1, $g(0^+)=g(0^-)$ et $g(1^-)=g(-1^+)$ (ceci serait faux si g était impaire).

2.1.b. Q étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, g est évidemment de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout ouvert $]n,n+1[$ ($n\in\mathbb{Z}$).

On commence par vérifier l'existence et la continuité de g'. Le seul problème est évidemment aux points $x\in\mathbb{Z}$; g' étant, comme g, 2-périodique, il suffit de vérifier que g' existe aux points 0 et 1. Comme g' est évidemment continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, si $g'(0^+)=g'(0^-)$ et $g'(1^+)=g'(1^-)$, on aura établi l'existence de g' aux points $x\in\mathbb{Z}$ (corollaire classique du théorème de Rolle). Par définition de g, on a $g'(0^+)=Q'(0^+)=0$; g' est impaire, car g est paire, donc $g'(0^+)=-g'(0^-)=0$, d'où $g'(0)=0$. De même, $g'(1^-)=Q'(1)=0$ et $g'(1^+)=g'(-1^+)$ (g' est 2-périodique) ; g' impaire donne $g'(-1^+)=-g'(1^-)=0$ donc $g'(1^+)=0$ d'où l'existence de $g'(1)=0$.

L'argument donné à la fin de la question précédente montre que g'' est continue, car paire et associée à la fonction Q'' continue sur $[0,1]$.

2.2.a. s est bien évidemment continue sur $[-1,0[\cup[0,1[$, et l'on a manifestement $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} s(x)=\gamma=s(0)$, ce qui montre que s est continue en 0. Le même argument s'applique aux dérivées d'ordre 1 et 2 de s.

Par exemple, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} s''(x)=2\lambda=$ dérivée à droite en 0 de s' ; donc $s''(0)$ existe, vaut 2λ, et s'' est continue en 0.

La continuité de s' et s'' sur $[-1,0[$ et $[0,1]$ est évidente.

Si $s\in\mathcal{S}$, il est manifeste que s est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,0[\cup[0,1]$. Comme $s(0)=\nu=s(0^-)$, s est continue en 0 ; de même, $s'(0^+)=\mu=s'(0^-)$, donc s' existe et est continue en 0 ; enfin $s''(0^+)=2\lambda=s(0^-)$, d'où la continuité de s'' en 0

Les conditions de l'énoncé impliquent la vérification des trois égalités

$$\alpha+\beta+2\mu=0,\quad 3(\alpha-\beta)-4\lambda=0\quad\text{et}\quad\alpha+\beta=0$$

qui donnent : $\alpha+\beta=0$, $\mu=0$, $3\alpha=2\lambda$. On a donc :

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{2}(2x^3-3x^2)+\nu & \text{si}\quad 0\leq x\leq 1\\[2mm] -\dfrac{\beta}{2}(2x^3+3x^2)+\nu & \text{si}\ -1\leq x\leq 0\end{cases}$$

ce qui montre que l'espace vectoriel des solutions réelles du problème est engendré par les deux fonctions indépendantes suivantes : $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -2x^3 - 3x^2 & \text{si} \ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ (qui s'écrit aussi $x \mapsto -3x^2 + 2|x|^3$).

2.2.b. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et 2-périodique. Sa restriction à $]0,1[$ est de la forme $s(x) = \alpha x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu$ et sa restriction à $]-1,0[$ est de la forme $\beta x^3 + \lambda' x^2 + \mu' x + \nu'$. La fonction f étant, en 0, deux fois dérivable, on a $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$ et $\nu = \nu'$ si bien que la restriction de f à $[-1,+1]$ appartient à $\mathcal{S}$; f étant 2-périodique, on a aussi $f(1) = f(-1)$, $f'(1) = f'(-1)$ et $f''(1) = f''(-1)$ donc, d'après le a), on a $f(x) = \alpha x^2(2|x| - 3) + \nu$ si $|x| \leq 1$. Enfin, on impose $f(x) = \cos \pi x = (-1)^x$ si $x \in \mathbb{Z}$ donc $\nu = f(0) = 1$, $-\alpha + 1 = f(1) = -1$ d'où $\alpha = 2$. On a donc $f(x) = 1 - 6x^2 + 4x^3$ si $0 \leq x \leq 1$ et comme f est paire et 2-périodique, on a $f = g$.

2.3.a. On a $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f''(x)\,dx = f'(1) - f'(-1) = 0$ car f' est 2-périodique. De même,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} |x| f''(x)\,dx &= \int_0^1 x\big(f''(x) + f''(-x)\big)\,dx = f'(1) - f'(-1) - \int_0^1 \big(f'(x) - f'(-x)\big)\,dx \\ &= 2f(0) - f(1) - f(-1) = 4\end{aligned}$$

puisque $f(x) = (-1)^x$ si $x \in \mathbb{Z}$.

2.3.b. $H(\cos \pi x) = 2\pi^4 \displaystyle\int_0^1 \cos^2 \pi x\,dx = \pi^4 \int_0^1 (1 + cos 2\pi x)\,dx = \pi^4$. g étant paire, g'' l'est également, d'où

$$H(g) = 2\int_0^1 \big(Q''(x)\big)\,dx = 2\int_0^1 (24x - 12)^2\,dx = 288\int_0^1 (4x^2 - 4x + 1)\,dx$$

soit $H(g) = 288(\frac{4}{3} - 2 + 1) = 96$. Donc $H(g) = 96^4 < \pi = H(\cos \pi x)$.

2.3.c. On utilise a) et b). :

$$\int_{-1}^{+1} g''(x)\big(f''(x) - g''(x)\big)\,dx = 24\int_{-1}^{+1} |x| f''(x)\,dx - 12\int_{-1}^{+1} f''(x)\,dx - H(g) = 96 - H(g) = 0\,.$$

Donc $H(f-g) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} f''(x)\big(f''(x) - g''(x)\big)\,dx = H(f) - H(g) - \int_{-1}^{+1} \big(f''(x) - g''(x)\big)g''(x)\,dx$ et, par l'égalité précédente, $H(f) = H(g) + H(f-g)$.

2.3.d. H étant à valeurs positives, ce qui précède montre que pour toute fonction f de F, $H(f) \geq H(g)$ et que l'on a égalité si et seulement si $H(f-g) = 0$. Comme $f - g$ est de classe $\mathcal{C}^2$, ceci implique $f''(x) - g''(x) = 0$ si $|x| \leq 1$, donc $f(x) - g(x) = A + Bx$ si $|x| \leq 1$; or f et g coïncident aux points -1, 0 et 1, donc $A = B = 0$, soit $f = g$ (sur $[-1,+1]$, puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité). g est l'unique élément de F qui rend minimale la quantité $H(f)$ lorsque f parcourt F.

3. Une suite de polynômes

3.1. Pour $n = 3$, on a $P_3(x) + (-1)^3 P_3(-x) = 2$ fois la partie impaire de $\dfrac{Q(x)}{24} = \dfrac{x^3}{3} = 2\dfrac{x^3}{3!}$; par dérivation on obtient $P_n(x) + P_n(-x)(-1)^n = 2\dfrac{x^n}{n!}$ pour $n = 1, 2$ et 3. On sait (Cf. 2.1.a.) que $Q(1-x) = -Q(x)$, donc $P_3(1-x) = -P_3(x)$, d'où, toujours par dérivation, $P_n(x) = (-1)^n P_n(1-x)$ pour $n = 1$, 2 et 3.

3.2.a. On a
$$P_n(x)+P_n(1+x)=P_n(x)+P_n\big(1-(-x)\big)=P_n(x)+(-1)^nP_n(-x)=2\frac{x^n}{n!}\cdot$$

3.2.b. Soit $(Q_n)_n$ une suite de polynômes vérifiant les mêmes hypothèses que la suite $(P_n)_n$. On a alors $P_n(x)+P_n(x+1)=Q_n(x)+Q_n(x+1)$, donc
$$P_n(x)-Q_n(x)=-\big(P_n(x+1)-Q_n(x+1)\big)=P_n(x+2)-Q_n(x+2)\ :$$
la fonction polynôme P_n-Q_n est 2-périodique donc constante (le terme de plus haut degré est nécessairement le terme constant).

Si n est pair, on a $P_n(0)=Q_n(0)=0$ donc $P_n=Q_n$, et si n est impair, $P_n(\frac{1}{2})=Q_n(\frac{1}{2})=0$ d'où $P_n=Q_n$: on obtient l'unicité de la suite $(P_n)_n$.

3.2.c. Par dérivation, on a $P_n'(x)+(-1)^{n-1}P_n'(-x)=2\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ et $P_n'(x)=(-1)^{n-1}P_n'(1-x)$ d'où, par la propriété d'unicité précédente, $P_n'=P_{n-1}\quad(n\geq 2)$. On a donc, par dérivations successives, $P_n^{(k)}(x)=P_{n-k}(x)\quad(0\leq k\leq n-1)$ et donc $P_n^{(n)}(x)=1$, si bien que la formule de Taylor permet d'écrire : $P_n(x+1)=P_n(x)+P_{n-1}(x)+\dfrac{1}{2!}P_{n-2}(x)+\cdots+\dfrac{1}{n!}\cdot$ Or 3.2.a. donne aussi $P_n(x+1)=-P_n(x)+2\dfrac{x^n}{n!}$; on en tire l'égalité demandée :
$$P_n(x)=\frac{x^n}{n!}-\frac{1}{2}\Big(P_{n-1}(x)+\frac{1}{2!}P_2(x)+\cdots+\frac{1}{n!}\Big)\cdot$$
On retrouve sans peine les expressions de P_1, P_2 et P_3 ; puis on calcule P_4 et P_5 et l'on trouve :
$$P_4(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{24}\qquad\text{et}\qquad P_5(x)=\frac{x^5}{120}-\frac{x^4}{48}+\frac{x^2}{48}-\frac{1}{240}\cdot$$

4. Une suite de fonctions périodiques

4.1.a. On a $a(x+1)=a(1-(-x))=-a(-x)=-a(x)$, donc $a(x+2)=-a(x+1)=a(x)$.

De même, $b(x+1)=b(1-(-x))=b(-x)=-b(x)$, d'où $b(x+2)=b(x)$: a et b sont 2-périodiques.

4.1.b. $I(a)(-x)=\displaystyle\int_0^{-x}a(t)\,dt=-\int_0^x a(t)\,dt=-I(a)(x)$, en changeant t en $-t$ et
$$I(a)(1-x)=\int_0^{1-x}a(t)\,dt=-\int_1^x a(1-u)\,du=\int_1^x a(u)\,du=I(a)(x)-\int_0^1 a(u)\,du\,.$$
Cette dernière intégrale est nulle car $\displaystyle\int_0^1 a(u)du=\int_0^1 a(1-u)du=-\int_0^1 a(u)du$; donc $I(a)$ appartient à $\mathcal{B}$.

De même,
$$J(b)(-x)=\int_{1/2}^x b(t)\,dt=-\int_{-1/2}^x b(-u)\,du=\int_{-1/2}^x b(u)\,du=J(b)(x)+\int_{-1/2}^{+1/2}b(u)\,du=J(b)(x)$$
car b est impaire.

Enfin,

$$J(b)(1-x)=\int_{1/2}^{1-x} b(t)\,dt=-\int_{1/2}^{x} b(1-u)\,du=-J(b)(x)$$

donc $J(b)\in\mathcal{A}$.

Conclusion : I (resp. J) est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ (resp. de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$).

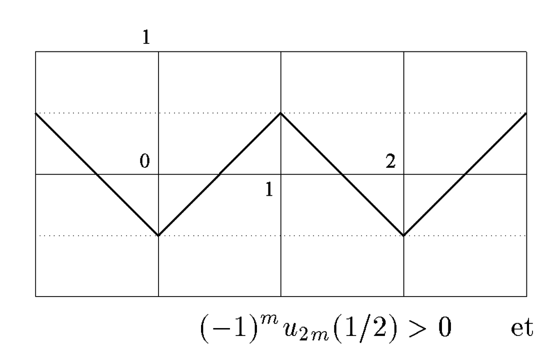
4.1.c. a étant srictement croissante et nulle en $1/2$ (car $a\in\mathcal{A}$), on a les tableaux de variations suivants :

	x	0		$1/2$		1
u_1	$I'(a)=a$		$-$	0	$+$	
u_2	$(J\circ I)'(a)=I(a)$	0	↘		↗	0
u_3	$(I\circ J\circ I)'(a)=J\circ I(a)$		↘	0	↘	
u_4	$(J\circ I\circ J\circ I)'(a)=I\circ J\circ I(a)$	0	↗		↘	0
u_5	$(J\circ I\circ J\circ I)$		↗	0	↗	

On utilise le fait que $f(1/2)=0$ si $f\in\mathcal{A}$ et que $f(0)=f(1)=0$ si $f\in\mathcal{B}$. On observe que $J\circ I\circ J\circ I(a)$ a les mêmes propriétés de croissance que a si bien que l'on se retrouve, après quatre opérations, au point de départ. Cette remarque servira dans la question suivante.

4.2.a. Il est manifeste que $u_1\in\mathcal{A}$, que $u_{2m}=I(u_{2m-1})$ et que $u_{2m+1}=J(u_{2m})$; donc $u_{2m}\in\mathcal{B}$ et $u_{2m-1}\in\mathcal{A}$ $(m=1,2,\ldots)$. La restricton de u_1 à $]0,1[$ étant un polynôme de degré 1, il est immédiat que la restriction de u_n à $]0,1[$ est un polynôme de degré n.
Cette dernière propriété s'étend, par parité et 2-périodicité, à tout intervalle $]j,j+1[$ $(j\in\mathbb{Z})$.

Comme u est continue, car continue sur $[0,1]$, paire et 2 périodique, u_2 étant la primitive de u_1 nulle en 0 est de classe $\mathcal{C}^1$. Par intégrations successives on construit la suite $(u_n)_n$, si bien que u_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ (on applique $n-1$ fois le théorème fondamental du calcul intégral).



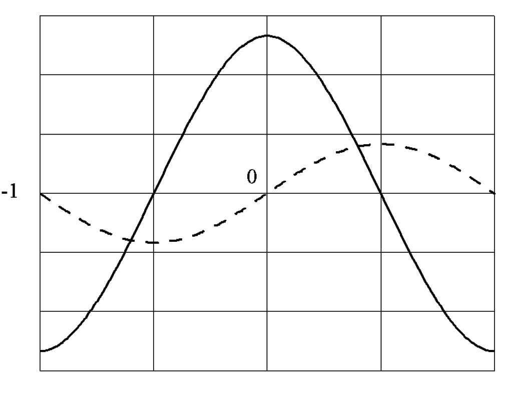
On a aussi par construction

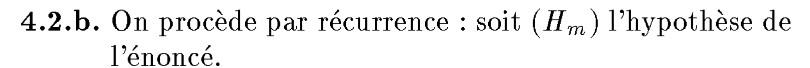
$$u_{2m}(0)=0 \quad\text{et}\quad u_{2m-1}(\frac{1}{2})=0\cdot$$

La fonction u_1 étant strictement croissante sur $[0,1]$, on utilise le résultat de la question précédente qui montre (compte-tenu de la remarque finale) que

$$(-1)^m u_{2m}(1/2)>0 \qquad\text{et}\qquad (-1)^m u_{2m-1}(0)>0 \quad (m\geq 1)\,.$$

Les graphes de u_{2m} et de u_{2m-1} ont l'allure ci–contre. Comme $u_{2m-1} \in \mathcal{A}$, les points $(p + \frac{1}{2}, 0)$ où $p \in \mathbb{Z}$ sont centres de symétrie du graphe de u_{2m-1} ; les droites $x = q \quad (q \in \mathbb{Z})$ sont des axes de symétrie de ce graphe. De même, $u_{2m} \in \mathcal{B}$ implique que les points $(p, 0)$ où $p \in \mathbb{Z}$ sont centres de symétrie et que les droites $x = q + \frac{1}{2} \quad (q \in \mathbb{Z})$ sont des axes de symétrie du graphe de u_{2m}.





4.2.b. On procède par récurrence : soit (H_m) l'hypothèse de l'énoncé.

On la vérifie pour $m = 1$: $R_2(x) - \dfrac{x^2}{2!} = -\dfrac{x}{2}$ est un polynôme impair de degré 1 et $R_1(x) - x = -\dfrac{1}{2}$ est un polynôme pair de degré 0.

On montre maintenant que (H_m) implique (H_{m+1}).
On a $R_{2m+1} = J(R_{2m})$. On pose $W_n = R_n - \dfrac{x^n}{n!}$; alors $R_{2m+1} = J(W_{2m}) + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$ · Comme W_{2m} est un polynôme impair, toutes ses primitives et en particulier $J(W_{2m})$ sont des polynômes pairs, donc $R_{2m+1} - \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$ est un polynôme pair. De même,

$$R_{2m+2} = I(R_{2m+1}) = I(W_{2m+1}) + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \ ;$$

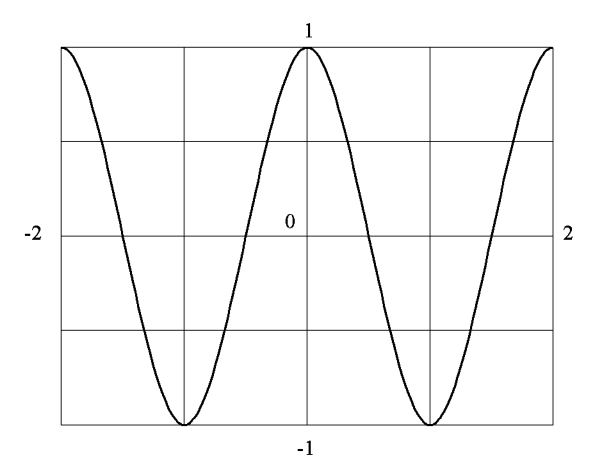
$I(W_{2m+1})$ étant la primitive nulle en 0 d'un polynôme pair est un polynôme impair, ce qui achève la démonstration de (H_{m+1}) : l'hypothèse (H_m) est donc démontrée par récurrence.

Démontrer que la suite (R_m) coïncide avec la suite (P_m) du 3. revient à vérifier les conditions du 3.2. d'après le résultat d'unicité obtenu au 3.2.b. Or $R_n(x) = W_n(x) + \dfrac{x^n}{n!}$ où W_n a la parité de $n-1$: $W_n(-x) = (-1)^{n-1} W_n(x)$, donc $R_n(x) + (-1)^n R_n(-x) = 2\dfrac{x^n}{n!}$ · D'autre part, $u_{2m} \in \mathcal{B}$ et $u_{2m-1} \in \mathcal{A}$; on en déduit que, pour $0 \leq x \leq 1, \quad R_m(1-x) = (-1)^m R_m(x)$; cette égalité entre polynômes, valable sur $[0,1]$, se prolonge à tout $\mathbb{R}$; les conditions du 3.2. sont vérifiées si bien que les suites (R_n) et $(P_n) \quad (n \geq 1)$ coïncident (ce qui assure, par là même, l'existence de la suite $(P_n)_n$).

5. Une suite de fonctions périodiques convergeant vers la fonction cosinus

5.1. Il résulte de la question 4.2.a. que $u_{2m}(\dfrac{1}{2}) \neq 0$ et que $u_{2m-1}(0) \neq 0$; les suites $(v_{2m})_m$ et $(v_{2m-1})_m$ sont donc bien définies ; en outre, $|u_{2m}(\dfrac{1}{2})|$ et $|u_{2m-1}(0)|$ sont les valeurs maximales des fonctions $|u_{2m}|$ et $|u_{2m-1}|$ (voir question 2.1.c.). Il en résulte que l'on obtient v_{2n} en translatant de $-\dfrac{1}{2}$ la fonction u_{2n} et en normalisant à l'unité ; de même, v_{2n-1} est obtenu à partir de u_{2n-1} par une normalisation à l'unité : $v_n(0) = 1$.

On obtient donc l'allure suivante pour le graphe de v_n :



Un calcul élémentaire donne :

$$\begin{cases} v_2(x) = 1 - 4x^2 & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ v_3(x) = 1 - 6x^2 + 4x^3 & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La fonction v_n est, comme u_n, de classe $\mathcal{C}^n$, les discontinuités (de première espèce) de v_{2n} (resp. v_{2n-1}) étant situées en $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ (resp. $\mathbb{Z}$).

5.2. u_1 paire donne $I_k = \displaystyle\int_{-1}^{+1} u_1(x)\cos(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 (x - \frac{1}{2})\cos(k\pi x)\,dx$. Donc $I_0 = 0$, et si $k \geq 1$,

$$I_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^1 (2x-1)\frac{d}{dx}\big(\sin(k\pi x)\big)\,dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx = -2\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

d'où $I_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$ et $I_{2k+1} = -\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \quad (k = 0, 1, \ldots)$. La fonction u_1 est continue, 2-périodique, à dérivée continue par morceaux. Il résulte alors du théorème de Dirichlet que u_1 est, en tout point x de $\mathbb{R}$, somme de sa série de Fourier. Comme u_1 est paire, on a une série de cosinus ; d'où, pour tout x réel, l'égalité

$$u_1(x) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\big((2k+1)\pi x\big)}{(2k+1)^2} \qquad \text{(l'énoncé a oublié le } \pi\text{)}.$$

On observe que cette série converge normalement, donc uniformément en x sur $\mathbb{R}$, conformément à la continuité de u_1 et au fait que u_1' possède un nombre fini de discontinuités de première espèce par période. On peut donc intégrer cette série terme à terme de 0 à x ; et comme $u_2(x) = \displaystyle\int_0^x u(t)\,dt$, il vient $u_2(x) = -\dfrac{4}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\big((2k+1)\pi x\big)}{(2k+1)^3}$.

La convergence de la série obtenue étant encore uniforme en x sur $\mathbb{R}$, on peut à nouveau intégrer terme à terme de $\frac{1}{2}$ à x et l'on obtient : $u_3(x) = \dfrac{4}{\pi^4}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\big((2k+1)\pi x\big)}{(2k+1)^4}$.

Chaque opération "améliore" la convergence de la série obtenue, si bien que l'on peut poursuivre sans limitation ces intégrations successives. On obtient, pour $(m \geq 1)$,

$$u_{2m}(x) = (-1)^m\frac{2}{\pi^{2m+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\big((2k+1)\pi x\big)}{(2k+1)^{2m+1}} \qquad u_{2m-1}(x) = (-1)^m\frac{2}{\pi^{2m}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\big((2k+1)\pi x\big)}{(2k+1)^{2m}}.$$

On observe que l'on a

$$u_{2m}(x + \frac{1}{2}) = (-1)^m\frac{4}{\pi^{2m+1}}\big(\cos\pi x + A_m(x)\big) \qquad \text{où} \qquad A_m(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\cos\big((2k+1)\pi x\big)}{(2k+1)^{2m}}.$$

Il en résulte que $|A_m(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2m+1}}\cdot$ La fonction $t \mapsto \frac{1}{(2t+1)^{2m+1}}$ étant positive et décroissante sur $]0,\infty[$, on a $|A_m(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)^{2m+1}}\, dt = \frac{1}{4m}$ si bien que $v_{2m}(x) = \frac{\cos(\pi x) + A_m(x)}{1 + A_m(0)}$ d'où $|v_{2m}(x) - \cos \pi x| \leq \frac{1}{2m(1-|A_m(0)|)} \leq \frac{2}{4m-1}$:

La suite $(v_{2m})_m$ converge uniformément en x sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \cos \pi x$.

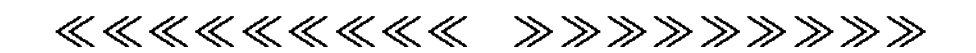
De même

$$u_{2m-1}(x) = (-1)^m \frac{4}{\pi^{2m}}\big(\cos \pi x + B_m(x)\big) \qquad \text{où} \qquad B_m(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos\big((2k+1)\pi x\big)}{(2k+1)^{2m}}\cdot$$

De même que précédemment, on a $|B_m(x)| \leq \frac{1}{2(2m-1)}$ et $v_{2m-1}(x) = \frac{\cos \pi x + B_m(x)}{1 + B_m(0)}\cdot$

La conclusion précédente reste valable pour la suite $(v_{2m-1})_m$:

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \cos \pi x$.



Énoncé de la seconde composition du CAPES interne 1988

Une des bases du savoir-faire en géométrie est la capacité de construire des figures à la règle et au compas (c'est-à-dire par intersection de droites et de cercles). Lorsque cette capacité – pour des raisons que l'algèbre éclaire – tombe en défaut, on s'intéresse à des solutions approchées mettant en jeu des intersections de lignes appropriées.
L'épreuve est organisée autour d'exemples pratiques de ces deux situations, choisis essentiellement parmi les polygones réguliers convexes (5, 7, 9 côtés).
Dans tout le problème, quand on demande de construire une figure, il est entendu qu'il s'agit d'une construction à la règle et au compas ; quand on parle d'un polygone régulier, il est convexe et le mot convexe est sous-entendu.

I. Points constructibles

Dans ses *Leçons sur les constructions géométriques* (1940-1941), Henri Lebesgue précise ce qu'on entend par points constructibles :
« Des points étant donnés, on se propose d'en construire d'autres qu'ils déterminent en n'usant que de la règle et du compas, la règle ne devant servir qu'à joindre (tracer une droite) deux points donnés ou précédemment obtenus, le compas ne devant servir qu'à tracer un cercle dont le centre est un point donné ou déjà obtenu et dont le rayon est la distance de deux points donnés ou déjà obtenus. »

On nomme droite constructible une droite joignant deux points constructibles et cercle constructible un cercle centré en un point constructible et dont le rayon est la distance de deux points constructibles. Il va de soi que les constructions fondamentales (médiatrice d'un segment, parallèle ou perpendiculaire à une droite issue d'un point, bissectrice d'un angle), sont considérées comme connues.
Soient O et I deux points donnés, distincts, du plan. Dans toute cette partie on désigne par points constructibles les points qu'on peut construire à partir de O et I.

I.1. En traçant les figures correspondantes, montrer que sont constructibles :
- les sommets des carrés,
- les sommets des hexagones réguliers,

admettant O et I comme sommets consécutifs ou non.

I.2. Soit J un point constructible autre que O et I.

a. Construire un point J_1 vérifiant $OJ \times OJ_1 = OI^2$.

b. Construire un point J' vérifiant $OJ'^2 = OI \times OJ$.

I.3. Le pentagone régulier

On désigne par Γ le cercle de centre O et de rayon OI et par S le symétrique de I par rapport à O. Sur une figure, marquer les points O et I (distance OI : 4 cm), tracer le cercle Γ et mettre en place, en s'aidant d'une calculatrice ou d'un rapporteur, le pentagone régulier $IABB'A'$ inscrit dans ce cercle. BB' et SI se coupent en H ; soit O' le symétrique de O par rapport à H et I' le symétrique de I par rapport à H.
Comparer successivement : les directions de (SB) et (OA), de $(O'B)$ et (SA), de $(I'B)$ et (AB), ainsi que les longueurs (SO') et (SB), (SI') et (SA). Des démonstrations, dont l'ordre est laissé au choix du candidat, justifieront les réponses.
Prenant la distance OI comme unité de longueur $(OI = 1)$ et la distance $O'S$ comme inconnue $(O'S = d)$, utiliser une partie convenable de la figure, par exemple deux triangles homothétiques qu'on indiquera, pour former une équation du second degré vérifiée par d. Calculer d. Construire un segment de longueur d, puis réaliser la construction du pentagone $IABB'A'$.

I.4. Exploration des polygones réguliers constructibles

On note $\mathcal{P}_n$ le polygone régulier à n côtés de centre O dont un sommet est I ; on dira que $\mathcal{P}_n$ est constructible si tous ses sommets le sont.

a. Montrer que $\mathcal{P}_{2n}$ est constructible si et seulement si $\mathcal{P}_n$ est constructible. On peut donc désormais se limiter au cas où n est impair.

b. $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_5$ sont constructibles ; $\mathcal{P}_{15}$ est-il constructible ? (On tracera sur une même figure $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_5$.)

c. On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_k$ constructibles, les entiers n et k étant premiers entre eux. Montrer que $\mathcal{P}_{nk}$ est constructible : on prouvera qu'il existe un sommet de $\mathcal{P}_n$ et un sommet de $\mathcal{P}_k$ qui sont deux sommets consécutifs de $\mathcal{P}_{nk}$.

II. Nombres constructibles

Comme dans la première partie les points O et I distincts sont donnés et on désigne par points constructibles les points qu'on peut construire à la règle et au compas à partir de O et I.

On rapporte le plan au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et on appelle point rationnel un point dont les deux coordonnées sont rationnelles.

II.1. Montrer que tous les points rationnels du plan sont constructibles.

II.2. Pour déterminer de nouveaux points on s'intéresse aux cercles et aux droites construits à l'aide des points rationnels.

Montrer que ces droites et ces cercles admettent dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des équations à coefficients rationnels. En examinant leurs intersections, successivement dans le cas de deux droites, d'une droite et d'un cercle, de deux cercles, montrer que chaque coordonnée d'un point d'intersection est ou bien un nombre rationnel ou bien un nombre irrationnel racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

II.3. **a.** Soit c un réel. Montrer l'équivalence des deux propositions :

c est l'abscisse d'un point constructible de l'axe $(O, \vec{i})$;
$|c|$ est la distance de deux points constructibles.
Les réels c possédant ces propriétés sont dits nombres constructibles.

b. Montrer que la somme et le produit de deux nombres constructibles sont des nombres constructibles. Montrer que l'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps du corps des réels.

c. On considère les droites et les cercles représentés dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par des équations dont les coefficients sont des nombres constructibles. Montrer que ce sont des droites et des cercles constructibles.

II.4. À tout point du plan on associe son affixe complexe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle nombres complexes constructibles les affixes des points constructibles.

Montrer que le conjugué d'un nombre complexe constructible est constructible, que la somme et le produit de deux nombres complexes constructibles sont constructibles. Montrer que les nombres complexes constructibles constituent un sous-corps du corps des complexes. Montrer que les racines carrées d'un nombre complexe constructible sont constructibles.

II.5. On considère une conique à centre, ellipse ou hyperbole, définie dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par une équation $F(x, y) = 0$ où F est un polynôme du second degré à coefficients réels constructibles. Montrer que ses axes de symétrie sont des droites constructibles, que ses sommets et ses foyers sont des points constructibles.

III. Solutions graphiques

L'algèbre établit qu'il serait contradictoire que toute équation du troisième degré à coefficients constructibles ait ses racines constructibles. En particulier il sera ici

admis qu'on ne peut pas, à la règle et au compas, « diviser en trois angles égaux » un angle quelconque donné (trisection), et que, parmi les polygones réguliers, ni $\mathcal{P}_9$ ni $\mathcal{P}_7$ ne sont constructibles. On propose dans cette partie des solutions graphiques à ces problèmes en s'aidant d'une courbe auxiliaire constructible point par point à la règle et au compas.
Comme dans les parties précédentes, les point O et I sont donnés ; on désigne par D la droite (OI), par Γ le cercle du centre O passant par I, et par S le symétrique de I par rapport à O. Le plan est orienté. Chaque fois qu'on utilisera un repère, il s'agira du repère orthonormal positif $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$.

III.1. Trisection d'un angle particulier

a. Soit U et U' deux points de Γ symétriques par rapport à D, pris hors de D, T le symétrique de O par rapport à la droite (UU'), V le symétrique de U' par rapport à la droite (OU).
Établir l'égalité : $3(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OV})$.
Montrer que la droite (TU') passe par le point K de Γ diamétralement opposé à V.

b. On suppose donné le point K sur Γ hors de D et, à chaque point T de D, on associe le point P de la droite (KT), s'il existe, qui se projette orthogonalement sur D au milieu de $[OT]$.
Montrer que si P est sur Γ, différent de K, il permet de résoudre la trisection de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{KO})$.

c. Lorsque T décrit D, le point P défini en b, décrit un ensemble $\mathcal{H}$. Reconnaître analytiquement cet ensemble ; situer ses asymptotes. (On désignera par x_0, y_0 les coordonnées de K.)

d. Tracés : on prend K défini sur Γ par $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}) = \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$.
Mettre en place l'ensemble $\mathcal{H}$ correspondant ; on tracera avec soin les portions de $\mathcal{H}$ fournissant son intersection avec Γ.
À l'aide des points obtenus, placer les sommets de $\mathcal{P}_9$.

III.2. Trisection d'un angle quelconque

La méthode qui précède exigerait de tracer une courbe $\mathcal{H}$ pour chaque donnée d'angle. On voudrait disposer d'une courbe utilisable pour tout angle.

a. Sur la perpendiculaire en I à D on fait varier deux points M et M' symétriques par rapport à I. Soit N le symétrique de M' par rapport à la droite (OM) et soit M_1 le symétrique de M' par rapport à O.
Reconnaître l'ensemble décrit par M_1. Montrer que la droite (NM_1) est parallèle à OM et passe par un point fixe Ω.
Établir l'égalité : $3(D,\ \Omega N) = (D, ON)$ lorsque N est distinct de Ω.

b. Lorsque M décrit la perpendiculaire en I à D, N décrit une courbe $\mathcal{L}$ qu'on se propose de construire.

On pose $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{i} + t\,\overrightarrow{j}$, t étant un paramètre qui décrit $\mathbb{R}$. Déterminer les coordonnées de N en fonction de t. Mettre en place quelques points de la courbe $\mathcal{L}$ et donner son allure.
Comment peut-on utiliser cette courbe $\mathcal{L}$ pour le problème de la trisection ?

III.3. Tracé de $\mathcal{P}_7$

Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ les sommet de $\mathcal{P}_7$ ont pour affixes les racines septièmes de l'unité.
On pose $\alpha = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{7}\right)$ et $s = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$.

a. Calculer $s + \overline{s}$. On pourra s'aider d'un dessin de $\mathcal{P}_7$ obtenu au moyen de la calculatrice ou du rapporteur ($\overline{s}$ est le conjugué de s).
Calculer $s\overline{s}$. Déterminer s.

b. Montrer que α, α^2, α^4 sont les racines de l'équation :

$$z^3 - s\,z^2 + \overline{s}z - 1 = 0$$

et que α^3, α^5, α^6 sont les racines de l'équation :

$$z^3 - \overline{s}z^2 + sz - 1 = 0.$$

Comment pourrait-on retrouver les valeurs de $s + \overline{s}$ et $s\overline{s}$?

c. Vérifier que le produit $(z-1)(z-s)$ regardé comme fonction de z prend en α, α^2, α^4 des valeurs imaginaires pures.
Ceci amène à chercher l'ensemble $\mathcal{K}$ des points du plan d'affixe z tels que $(z-1)(z-s)$ soit imaginaire pur et à étudier ses intersections avec Γ.
Former une équation cartésienne de $\mathcal{K}$, reconnaître cet ensemble et en proposer une construction point par point.
Sur une figure (distance $OI = 4$ cm), mettre en place $\mathcal{K}$ et placer les sommets de $\mathcal{P}_7$.

UNIVERSITÉ P. ET M. CURIE
FRANCETTE BORIES

CAPES INTERNE 1988

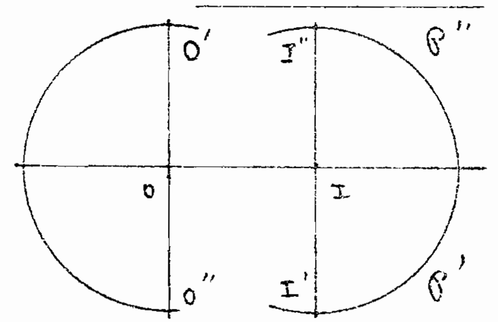
CORRIGÉ DE LA 2ÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

1ère partie :

Dans toute cette partie, on désignera par $\mathcal{C}(A, BC)$ le cercle de centre A et de rayon la distance BC et par (AB) la droite AB.

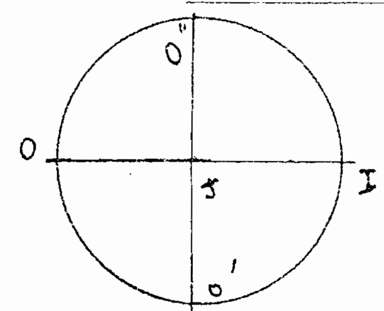
1.1. a) *Construction des carrés.*

1er cas : O et I consécutifs. Il existe exactement deux solutions symétriques par rapport à (OI). (OI) partage le plan en deux demi-plans $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$.



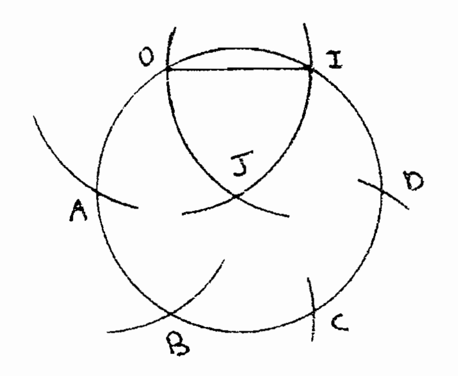
$\mathcal{C}(O, OI) \cap \mathcal{P}'$ intersecte la perpendiculaire en O à (OI) en O' et $\mathcal{C}(I, OI) \cap \mathcal{P}'$ intersecte la perpendiculaire en I à (OI) en I'. IOO'I' est l'une des solutions.

2ème cas : O et I non consécutifs. Soit J le milieu de OI (construit au moyen de la médiatrice de [OI]. $\mathcal{C}(J, OI)$ intersecte la médiatrice de OI en deux points O' et O"; OO'IO" est solution.



b) *Construction des hexagones réguliers.*

1er cas : O et I consécutifs. Il existe exactement deux solutions symétriques par rapport à OI.



$\mathcal{C}(O, OI \cap \mathcal{C}(I, OI) = \{J, J'\}$. On obtient deux triangles équilatéraux OIJ et OIJ'.

$\mathcal{C}(O, OI) \cap \mathcal{C}(J, OI) = \{A, O\}$

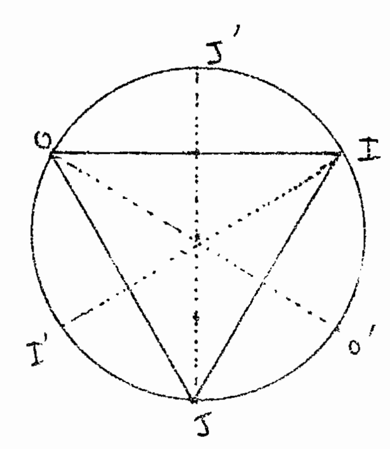
$\mathcal{C}(A, OI) \cap \mathcal{C}(J, OI) = \{B, A\}$

$\mathcal{C}(B, OI) \cap \mathcal{C}(J, OI) = \{C, B\}$

$\mathcal{C}(C, OI) \cap \mathcal{C}(J, OI) = \{D; C\}$.

et IOABCD est solution.

2ème cas : *O et I "à distance deux"*. Comme dans le premier cas, on construit



l'un des deux points du plan tels que le triangle OIJ soit équilatéral.

Soit K le centre du cercle circonscrit à OIJ (obtenu comme intersection des médiatrices de [OI], [IJ], [JK]).

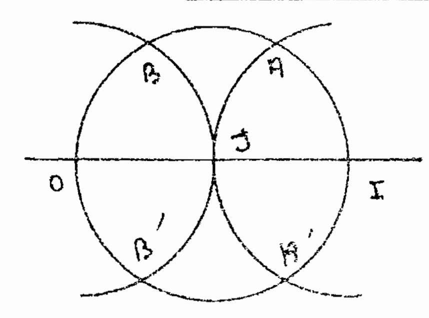
$\mathscr{C}(K, OK) \cap (OK) = \{O, O'\}$

$\mathscr{C}(K, OK) \cap (IK) = \{I, I'\}$

$\mathscr{C}(K, OK) \cap (JK) = \{J, J'\}$

IJ'OI'JO' est solution;

3ème cas : *O et I "à distance trois"*. Soit J le milieu de OI

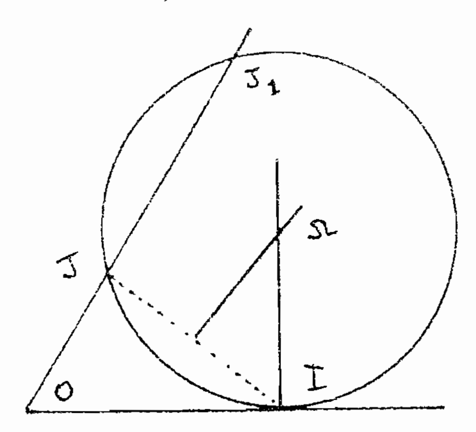


$\mathscr{C}(J, JI) \cap \mathscr{C}(I, JI) = \{A, A'\}$

$\mathscr{C}(J, JI) \cap \mathscr{C}(O, JI) = \{B, B'\}$

IABOB'A' est solution.

1.2. a)



Soit O extérieur à un cercle $\mathscr{C}$ tel que (OI) tangente à $\mathscr{C}$ en I et soit une droite passant par O coupant $\mathscr{C}$ en J et J_1, la puissance de O par rapport à $\mathscr{C}$ est $OI^2 = OJ.OJ_1$.

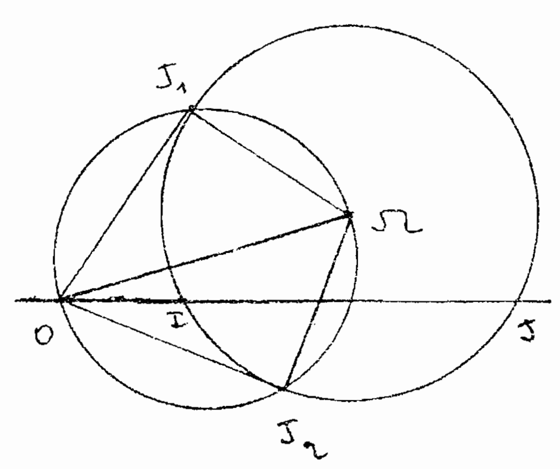
On en déduit la construction pour OIJ non alignés : la perpendiculaire en I à O coupe la médiatrice de [IJ] en Ω.

$\mathscr{C}(\Omega, \Omega I) \cap (OJ) = \{J, J_1\}$.

Tous les points de $\mathscr{C}(O, OJ_1)$ conviennent.

Si OIJ sont alignés, on se ramène au cas précédent en remplaçant J par un point J' de $\mathscr{C}(O, OJ)\setminus(OI)$.

b) *1er cas :* OIJ alignés et $O \notin [I, J]$. Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par I et J autre que le cercle de diamètre IJ ($\mathscr{C}$ est déterminé par un point quelconque Ω de la médiatrice de [IJ] autre que le milieu de [IJ]).



Le cercle de diamètre OΩ intersecte $\mathscr{C}$ en J_1 et J_2 et OJ_1 et OJ_2 sont tangentes à $\mathscr{C}$.

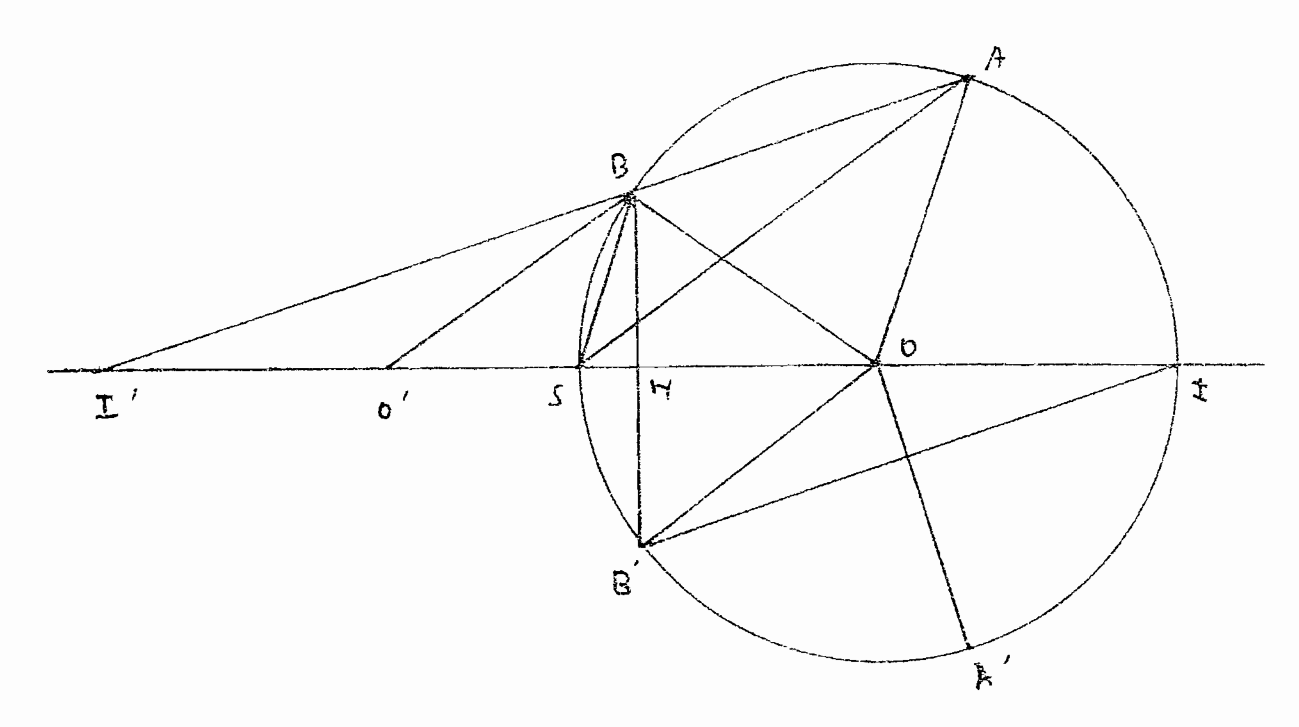
La puissance de O par rapport à $\mathscr{C}$ est donc:

$OJ_1^{\,2} = OJ_2^{\,2} = OI.OJ$.

Tous les points de $\mathscr{C}(O, OJ_1)$ conviennent.

2ème cas : OIJ quelconque. L'un des deux points de $\mathscr{C}(O, OJ) \cap (OI)$ au moins est extérieur à [OI] et on se ramène au cas précédent en remplaçant J par ce point.

1.3.



a) $(OI, SB) = (SI, SB) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = (OI, OA) \quad [\pi]$, d'où SB parallèle à OA. Par symétrie de centre H, O'B est parallèle à OB' et $(OS, OB') = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = (SI, SA) = (OS, SA) \quad [\pi]$, d'où OB' parallèle à SA et O'B parallèle à SA.

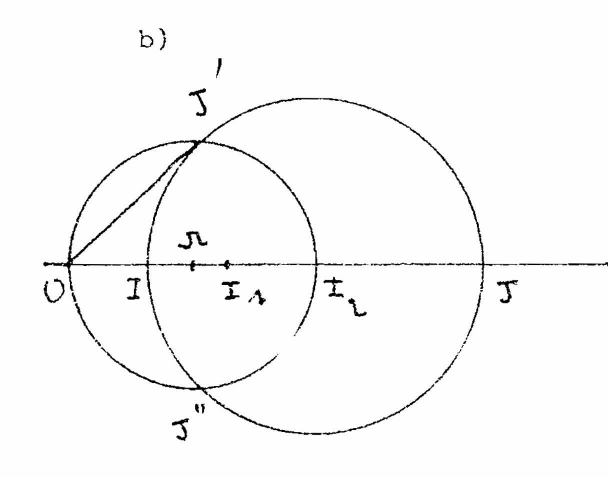
Toujours par symétrie par rapport à H, I'B est parallèle à IB'.

Or $(IB, IB') = (BI, BA) \quad [\pi]$ (car arc BB' = arc IA), d'où BA parallèle à IB' donc à IB' et ABI' alignés.

O'B étant parallèle à SA, SB à OA et O'SO étant alignés, les triangles O'SB et SOA sont semblables, or OS = OA, d'où SO' = SB.

En utilisant encore une fois la symétrie de centre H, IB' est parallèle à I'B donc à I'A et OB' est parallèle à O'B donc à SA. I'SOI étant de plus alignés, les triangles IB'O et I'AS sont semblables. Or OI = OB', d'où SI' = SA.

b)



Soit h l'homothétie de centre I' telle que h(S) = O. SB est parallèle à OA et I'BA alignés donc h(B) = A. O'B est parallèle à SA donc h(O') = S. Le rapport de h est $\frac{SO}{O'S} = \frac{I'S}{I'O'}$. Or, par symétrie de centre H, I'O' = IO = 1.

D'où I'S = I'O' + O'S = 1 + d

Soit $\frac{1}{d} = 1 + d \Leftrightarrow d^2 + d - 1 = 0$

$\Rightarrow d = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (car d positif).

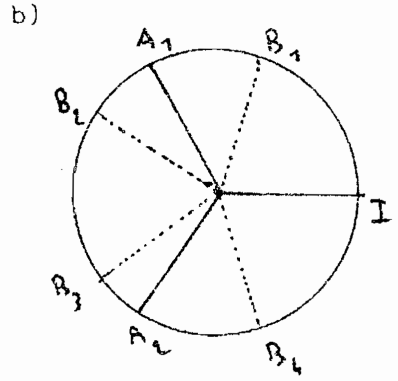
(On utilise alors 1-2b). On construit successivement I_1 symétrique de O par rapport à I ($I_1 = \mathcal{C}(I, OI) \cap (OI)\setminus\{O\}$), I_2 symétrique de I par rapport à I_1, J symétrique de I par rapport à I2 .
OI.OJ = 5 et $\mathcal{C}(I_2, II_2) \cap \mathcal{C}(\Omega, O\Omega) = \{J', J''\}$ (avec Ω milieu de OI_2) et $OJ' = OJ'' = \sqrt{5}$. Soit $J'_1 = \mathcal{C}(J', 1) \cap [OJ']$, $OJ'_1 = \sqrt{5} - 1$ et soit J_1 le milieu de OJ'_1, $OJ_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
On a alors : $\mathcal{C}(S, d) \cap \Gamma = \{B, B'\}$, $\mathcal{C}(B, BB') \cap \Gamma = \{B', A\}$ et $\mathcal{C}(B', BB') \cap \Gamma = \{B, A'\}$. D'où les constructions successives de B, B', A, A'.

1.4. a) Soit $\mathcal{P}_{2n} = (A_0, A_1, \dots, A_{2n-1})$ avec $A_0 = I$

$\mathcal{P}_n = (A_0, A_2, \dots, A_{2n-2})$.

Réciproquement, si $\mathcal{P}_n = (B_0, B_1, \dots, B_{n-1})$ avec $B_0 = I$, notons B'_i l'intersection de la demi-droite bisectrice intérieure de $(\overrightarrow{OB_{i-1}}, \overrightarrow{OB_i})$ avec Γ $(1 \le i \le n-1)$ et B'_n de $(\overrightarrow{OB_{n-1}}, \overrightarrow{OB_0})$ avec Γ, alors
$\mathcal{P}_{2n} = (B_0, B'_1, B_1, \dots, B'_{n-1}, B_{n-1}, B'_n)$.

b)

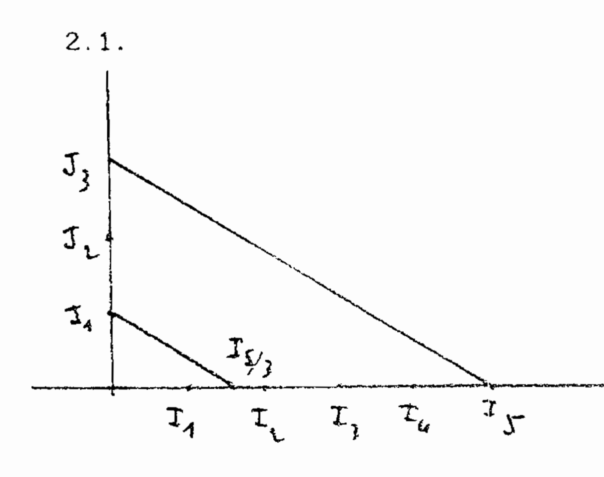


Soit $\mathcal{P}_3 = (I, A_1, A_2)$ et soit $\mathcal{P}_5 = (I, B_1, B_2, B_3, B_4)$, l'arc A_1B_2 a pour mesure $\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{15}$. $\mathcal{P}_{15}$ est donc obtenu par $\mathcal{C}(I, A_1B_2) \cap \Gamma = \{C_1, C_{14}\}$, $\mathcal{C}(C_1, A_1B_2) = \{I, C_2\}$, etc ...
$\mathcal{P}_{15} = (I, C_1, \dots, C_{14})$.
$\mathcal{P}_{15}$ est donc constructible.

c) Si n et k sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que nu + kv = 1, d'où $\frac{2v\pi}{n} + \frac{2u\pi}{k} = \frac{2(kv+nu)\pi}{nk} = \frac{2\pi}{k}$.
Le sommet A de $\mathcal{P}_n$ tel que l'arc IA ait pour mesure $\frac{2v\pi}{n}$ et le sommet B de $\mathcal{P}_k$ tel que l'arc IB ait pour mesure $\frac{-2u\pi}{k}$ sont deux sommets consécutifs de $\mathcal{P}_{nk}$.

2ème partie :

2.1.



Le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ est l'un des points d'intersection de $\mathscr{C}(O, OI)$ et de la perpendiculaire en O à I. Pour tout p de $\mathbb{N}^*$, I_p de coordonnées (p, 0) est constructible par intersection avec (OI) des cercles $\mathscr{C}(I, OI)$, $\mathscr{C}(I_1, OI)$ etc...
De même J_q de coordonnées (q, 0) est constructible pour $q \in \mathbb{N}^*$.
La parallèle à (I_pJ_q) passant par J coupe OI en $I_{p/q}$ de coordonnées (p/q, 0).
On construit de même $J_{p'/q'}$ de coordonnées (0, p'/q') et le point de coordonnées (p/q, p'/q') (avec p/q et p'/q' positifs) comme intersection de la perpendiculaire en $I_{p/q}$ à OI et de la perpendiculaire en $J_{p'/q'}$ à OJ. Les points de coordonnées non toutes deux positives s'obtiennent par symétrie.

2.2. Soient A et B deux points rationnels de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), la droite (AB) a pour équation $\begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A \end{vmatrix} = 0$ qui est à coefficients rationnels. Le cercle $\mathscr{C}(A, AB)$ a pour équation
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ à coefficients rationnels.
Les coordonnées du point d'intersection de deux droites concourrantes dont les équations sont à coefficients rationnels sont la solution d'un système de Cramer de deux équations à deux inconnues à coefficients rationnels donc sont rationnelles.
Les coordonnées des points d'intersection d'un cercle et d'une droite sont solution d'un système du type $\begin{cases} \alpha x + \beta y + y = 0 \\ x^2 + y^2 + \lambda y + py + \nu = 0 \end{cases}$ à coefficients rationnels avec par exemple $\beta \neq 0$, d'où x est solution de

$$x^2 + \left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta}\right)^2 - \frac{\lambda(\alpha x+\beta)}{\beta} + \nu = 0 \text{ et } y = -\frac{\alpha x+\gamma}{\beta}$$ et x et y sont rationnels.

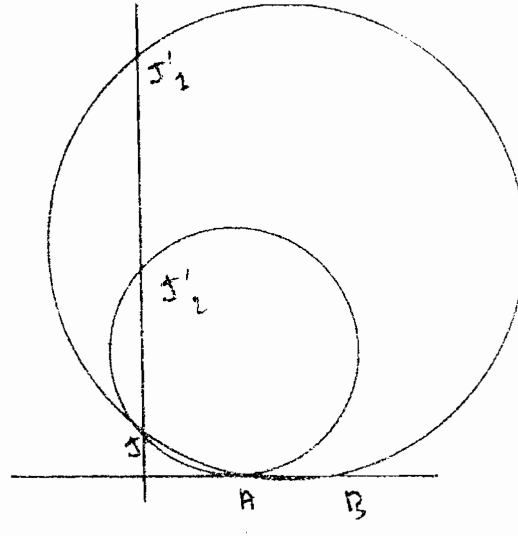
Enfin, l'intersection de deux cercles est équivalente à l'intersection d'un cercle et d'une droite :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \lambda x + py + \nu = 0 \\ x^2 + y^2 + \lambda' x + p'y + \nu' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \lambda x + py + \nu = 0 \\ (\lambda-\lambda')x + (p-p')y + \nu - \nu' = 0 \end{cases}$$

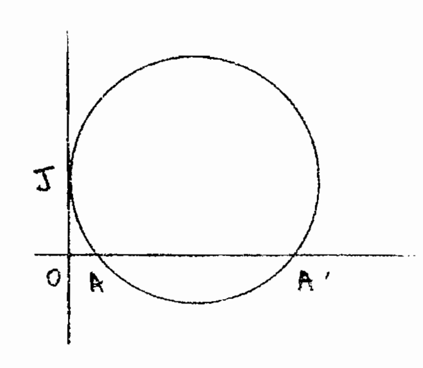
donc est à coordonnées rationnelles.

2.3. a) Si c est l'abcisse d'un point constructible C de l'axe $(O, \vec{I})$, $|c|$ est la distance des deux points constructibles O et C.
Réciproquement si $|C|$ est la distance de deux pints constructibles A et B, $\mathcal{C}(O, AB) \cap (O, \vec{I}) = \{C, C'\}$ avec C et C' d'abcisses respectives γ et γ' telles que $|\gamma| = |\gamma'| = |C|$ et $\gamma = -\gamma'$, donc l'un des deux γ ou γ' vaut C.

b) D'après 2.3.a) C est constructible $\Leftrightarrow$ $|C|$ est constructible.
On peut donc se limiter dans cette question aux nombres positifs. Si a et b sont deux nombres constructibles de $\mathbb{R}_+^*$ (a = 0 et b = 0 étant des cas triviaux) ils sont les abcisses de deux points A et B de l'axe $(O, \vec{I})$ de coordonnées (a, 0) et (b, 0). C, de coordonnée (a + b, 0) est l'intersection de $\mathcal{C}(B, OA)$ et de la demi-droite $(B, \vec{I})$ ne contenant pas O.



Pour le produit ab, considérons le point J de coordonnées (0,1) rationnelles donc constructible et le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à JAB si A ≠ B et passant par J tangeant en A à OA si A=B. $\mathcal{C}$ est constructible (son centre est obtenu comme intersection de la médiatrice de JA et de la médiatrice de AB si A ≠ B, ou de la perpendiculaire en A à OA si A = B).
$\mathcal{C} \cap OJ = \{J, J'_i\}$ avec i = 1 si A ≠ B, i = 2 si A = B et $OJ.OJ'_i = OA.OB$, soit si J'_i est de coordonnées (0, c), c = ab.
Montrons alors que l'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Il est non vide car il contient 0. Il est stable par addition et multiplication d'après ce qui précède.



Si a est constructible, il en est de même de -a d'après 2.3.a). Il reste à montrer que si a est constructible non nul, il en est de même de $\frac{1}{a}$. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle tangent à OJ en J et passant par A. $\mathcal{C} \cap (OA) = \{A, A'\}$ avec A' de coordonnées $(\frac{1}{a}, 0)$ si A est de coordonnées (a, 0).

c) Remarquons tout d'abord qu'un point est constructible si et seulement si ses coordonnées sont constructibles.

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec α, β, γ constructibles et par exemple $\alpha \neq 0$. Les points M_1 et M_2 de coordonnées respectives $(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$ et $(-\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, 1)$ sont constructibles et $\mathcal{D} = (M_1 M_2)$.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'équation $x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0$ avec λ, μ, ν constructibles et $\lambda^2 + \mu^2 - 4\nu \geq 0$.

L'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit $(x + \frac{\lambda}{2})^2 + (y + \frac{\mu}{2})^2 = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\mu^2}{4} - \nu$ avec $-\frac{\lambda}{2}$, $-\frac{\mu}{2}$ et $k = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\mu^2}{4} - \nu$ constructibles et $k \geq 0$.

Si K est de coordonnées $(k, 0)$, d'après 1.2.b) J' de coordonnées $(\sqrt{k}, 0)$ est constructible ($OJ'^2 = OI.OK = OK$) et si Ω est de coordonnées $(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\mu}{2})$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, \Omega J')$ est constructible.

2.4. Un point du plan étant constructible si et seulement si ses coordonnées sont des nombres constructibles, un nombre complexe $z = x+iy$ est constructible si et seulement si x et y sont constructibles, si et seulement si x et -y sont constructibles, si et seulement si $\bar{z} = x-iy$ est un nombre complexe constructible. Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont des nombres complexes constructibles,

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \quad \text{et}$$
$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad \text{sont}$$

constructibles.

L'ensemble des nombres complexes constructibles est non vide car il contient 0, il est stable par l'addition et la multiplication d'après ce qui précède. Si z est un complexe constructible, $z = x + iy$, il en est de même de $-z = -x + i(-y)$ et, si $z \neq 0$, de $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2}$. L'ensemble des complexes constructibles est donc un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Soit z un nombre complexe non nul constructible d'image M, $\sqrt{|z|}$ est constructible d'après 1.2.b). (Construction analogue à celle faite en 1.3.b) pour $\sqrt{5}$). Soit D la bissectrice intérieure de $(\vec{OI}, \vec{OM})$, $\mathcal{C}(0, \sqrt{|z|}) \cap D = \{M', M''\}$ et M' et M" ont pour affixes les deux racines carrées de z.

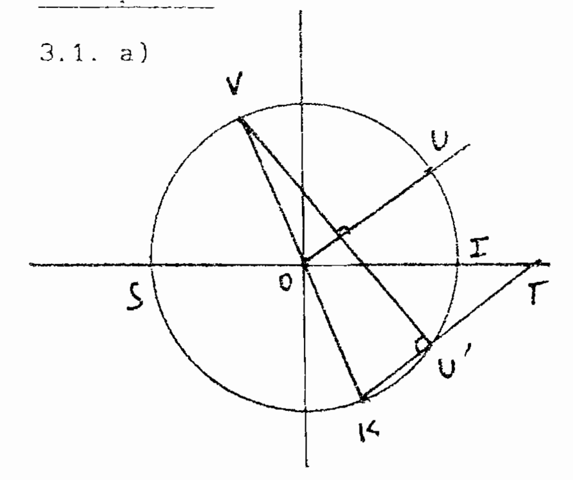
2.5. Une conique à centre a pour équation $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ avec a et b $\neq 0$ et ici, a, b, c, d, e constructibles. Cette équation s'écrit aussi $a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 = \frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e$ et ses axes de symétrie ont pour équations $x = -\frac{c}{2a}$ et $y = -\frac{d}{2b}$ donc sont constructibles d'après 2.3.c). Les sommets sont les intersections de la conique avec les axes de symétrie. Deux des sommets ont donc comme coordonnées $\left(-\frac{c}{2a}, -\frac{d}{2b} \pm \sqrt{\frac{1}{b}\left(\frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e\right)}\right)$ et sont

constructibles s'ils sont réels. Les deux autres sommets sont, pour les mêmes raisons, constructibles.

En prenant alors comme nouveaux axes, les axes de symétries, on obtient les équations $\frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} = 1$ avec $\alpha > \beta$ et $\{\alpha, \beta\} = \left\{\frac{1}{a}\left(\frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4a} - e\right), \frac{1}{b}\left(\frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e\right)\right\}$, α et β sont donc constructibles et les foyers, qui ont pour coordonnées $(\pm \sqrt{\alpha-\beta}, 0)$ sont constructibles.

3ème partie :

3.1. a)



Par symétrie par rapport à D,

$(\overrightarrow{OU'}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU})$.

D'où $(\overrightarrow{OU'}, \overrightarrow{OU}) = (\overrightarrow{OU'}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU})$

$= (2\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}) \quad [2\pi]$

Par symétrie par rapport à (OU),

$(\overrightarrow{OU'}, \overrightarrow{OU}) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$

D'où $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OV}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}) + (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$

$= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}) + (\overrightarrow{OU'}, \overrightarrow{OV})$

$= 3(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}) \quad [2\pi]$.

D'autre part, VK étant un diamètre de Γ, KU' est perpendiculaire à VU' donc parallèle à OU. Et par symétrie par rapport au milieu de [UU'], OU est parallèle à TU'; d'où VU' parallèle à KU' et KU'V alignés.

b) Si P est sur Γ, il joue le rôle du point U' de a) et:
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}) = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OI}) \quad [2\pi]$ d'où si V est point diamètralement opposé à K sur Γ, $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OV}) \quad [2\pi]$.

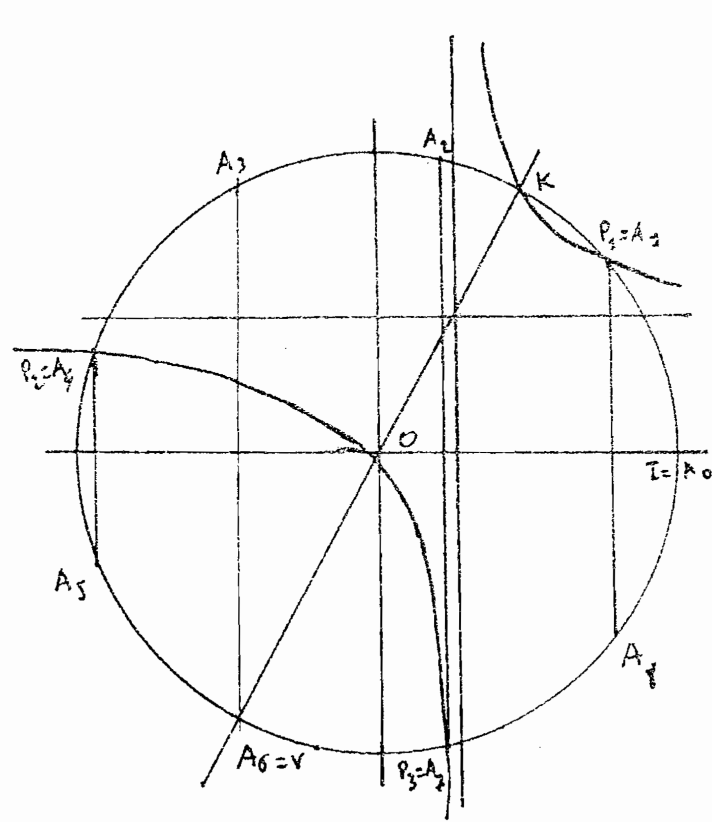
c) Les points K, T, P de coordonnées respectives (x_0, y_0), $(t, 0)$, (x, y) (avec $x = \frac{t}{2}$) sont alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} t-x_0 & t-\frac{t}{2} \\ -y_0 & -y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{ty_0}{2(t-y_0)} \Leftrightarrow y = \frac{xy_0}{2x-x_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2xy - xy_0 - yx_0 = 0$ et $x \neq \frac{x_0}{2}$, $x \neq x$.

$\Leftrightarrow (y - \frac{1}{2} y_0)(x - \frac{1}{2} x_0) = \frac{x_0 y_0}{4}$ et $x \neq x_0$.

Le point P décrit donc l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$, d'asymptotes d'équations $x = \frac{x_0}{2}$ et $y = \frac{y_0}{2}$, passant par K et O, moins le point K.

d)



K est de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathcal{H}$ a pour équation $(y - \frac{1}{4})(x - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{16}$.

En choisissant x constructible, il existe un et un seul y tel que M de coordonnées (x, y) appartienne à $\mathcal{H}$ et y est constructible.

Ceci permet de construire $\mathcal{H}$ point par point, en particulier les points de $\mathcal{H}$ proches de $\mathcal{H} \cap \Gamma$.

On a alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OV}) = -\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) = \frac{2\pi}{9}$ $[\frac{2\pi}{3}]$.

D'où $\mathcal{H} \cap \Gamma = \{K, P_1, P_2, P_2\}$ avec

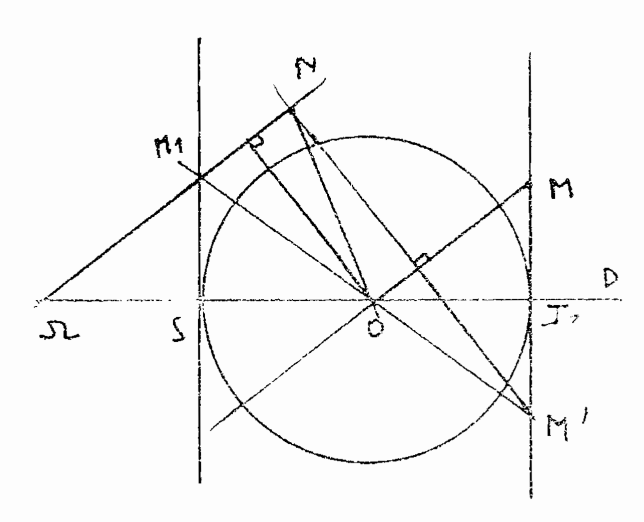
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP_1}) = \frac{2\pi}{9}$ $[2\pi]$,

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP_2}) = \frac{8\pi}{9}$ $[2\pi]$,

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP_3}) = \frac{14\pi}{9}$ $[2\pi]$.

Soit $P_9 = (A_0, A_1, \dots, A_9)$ avec $A_0 = I$, $A_1 = P_1$, $A_4 = P_2$, $A_6 = V$, $A_7 = P_2$. A_8, A_2, A_3, A_5 sont les symétriques respectifs par rapport à D de P_1, P_3, V, P_2.

3.2. a)



M' décrit la perpendiculaire en I à D. Par symétrie de centre O, M_1 décrit la perpendiculaire en S à D.

Soient s et s' les symétries par rapport à OM et par rapport à la perpendiculaire en O à OM et s" la symétrie de centre O,

$s' \circ s = s \circ s' = s"$,

$s'(M_1) = s'(s(M')) = s"(M') = N$,

d'où NM_1 perpendiculaire à la perpendiculaire en O à OM et NM_1 parallèle à OM.

D'autre part, si Ω est le symétrique de O par rapport à S, $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{IS} = \overrightarrow{O\Omega}$. ΩOMM_1 est donc un parallélogramme et ΩM_1 est parallèle à OM d'où Ω, M_1, N alignés. La droite NM_1 passe donc par le point fixe Ω.

Par symétrie par rapport à (OM), $(OM', OM) = (OM, ON)$ $[\pi]$.

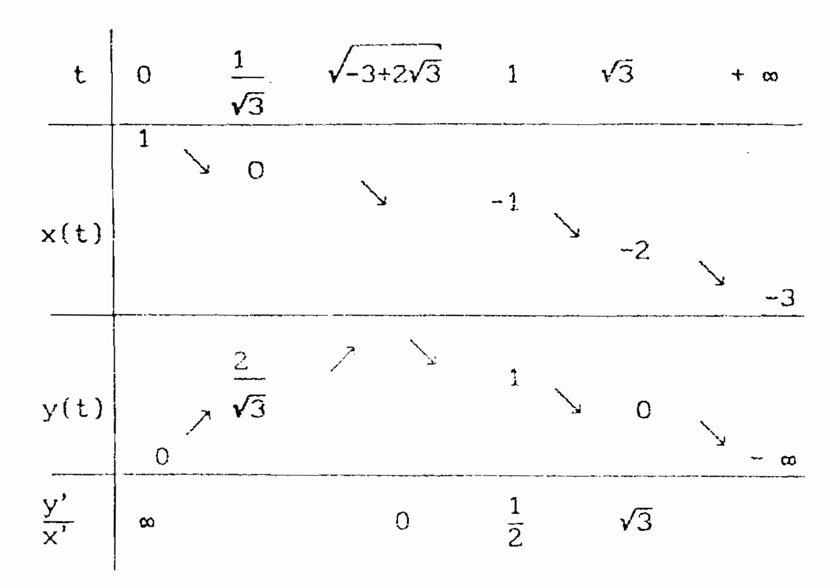
Soit $2(OI, OM) = (OM, OI) + (OI, ON)$ $[\pi]$ et $3(OI, OM) = (OI, ON)$ $[\pi]$, donc $3(D, \Omega N) = (D, ON)$ $[\pi]$.

b) Les points M, M', M_1, N ayant pour coordonnées respectives (1, t), (1, −t), (−1, t), (x, y). N est caractérisé par NM_1 parallèle à OM et NM' perpendiculaire à OM, soit $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-t & t \end{vmatrix} = 0$ et $x-1+t(y+t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tx-y+2t = 0 \\ x+ty+t^2-1=0 \end{cases}$

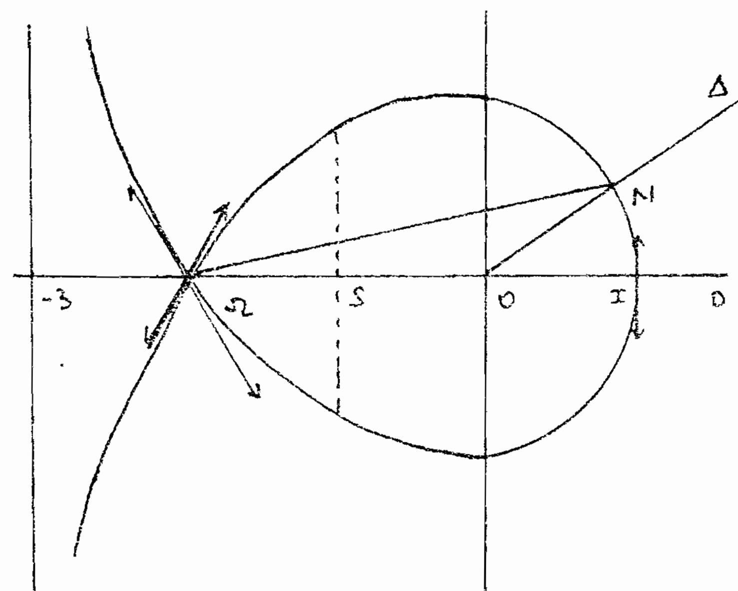
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t^2+1)x+3t^2-1 = 0 \\ (t^2+1)y+t^3-3t = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-3t^2}{t^2+1} \\ y = \dfrac{3t-t^3}{t^2+1} \end{cases}$$

La courbe $\mathcal{L}$ décrite par N est une strophoïde symétrique par rapport à D, comme le montre le changement t en −t, ce qui était prévisible géométriquement.

Le calcul des dérivés de x et y : $x' = \dfrac{-8t}{2\ 2}$, $y' = \dfrac{-t^4-6t^2+3}{2\ 2}$ donne le tableau de variation:



t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{-3+2\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x(t)	1 ↘	0 ↘		-1 ↘	-2 ↘	-3
y(t)	0 ↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗ ↘	1 ↘	0 ↘	$-\infty$
$\frac{y'}{x'}$	∞		0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	

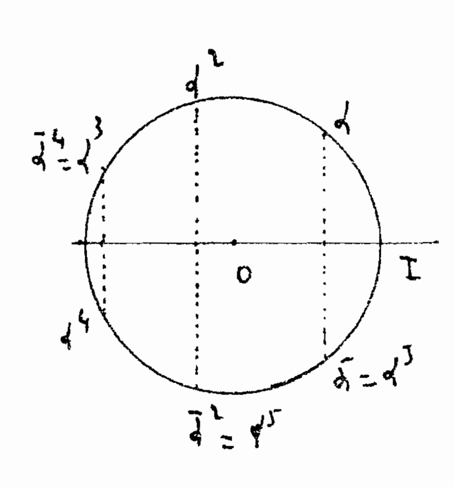


La droite d'équation $x = -3$ est asymptote.

Ω est point double.

Si une droite Δ passant par O, coupe $\mathcal{L}$ en N, la relation $3(D, \Omega N) = (D, ON)$ permet la trisection de l'angle (D, Δ)

3.3. a)



$s = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$, $\bar{s} = \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^4 = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3$

D'où $s + \bar{s} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = -1$

$$\begin{aligned} s\bar{s} &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^4) \\ &= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha}^2 + \alpha\bar{\alpha}^4 + \alpha^2\bar{\alpha} + \alpha^2\bar{\alpha}^2 \\ &\quad + \alpha^2\bar{\alpha}^4 + \alpha^4\bar{\alpha} + + \alpha^4\bar{\alpha}^2 + \alpha^4\bar{\alpha}^4. \end{aligned}$$

En utilisant $\alpha\bar{\alpha} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} s\bar{s} &= 1 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^3 + \alpha + 1 + \bar{\alpha}^2 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1 \\ &= 3 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 2 \end{aligned}$$

s et $\bar{s}$ sont donc les racines de l'équation :

$z^2 + z + 2 = 0$, d'où $s = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\bar{s} = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

b) α, α^2, α^4 sont les racines de l'équation $(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^4) = 0$, soit $z^3-(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)z^2 + (\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)z - \alpha^7 = 0 \Leftrightarrow z^3 - sz^2 + \bar{s}z-1 = 0$.
α^3, α^5, α^6 sont les racines de l'équation $(z-\alpha^3)(z-\alpha^5)(z-\alpha^6) = 0$, soit $z^3-(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)z^2 + (\alpha^{11}+\alpha^9+\alpha^8)z-\alpha^{14} = 0 \Leftrightarrow z^3-\bar{s}z^2+sz-1 = 0$.
$1, \alpha, \ldots, \alpha^6$ sont donc les racines de $(z^3-sz^2-\bar{s}z-1)(z^3-\bar{s}z^2+sz-1)(z-1) = 0$. Ils sont d'autre part les racines de $z^7-1 = 0$. En identifiant les termes en z^6 et en z^5, on obtient : $-1-\bar{s}-s = 0$ et $\bar{s}+s+1+s\bar{s}+\bar{s} = 0$, d'où $s+\bar{s} = -1$ et $s\bar{s} = 2$.

c) Posons $f(z) = (z-1)(z-s)$, $f(\alpha) = \alpha^2-\alpha-\alpha s+s = \alpha^2-\alpha-\alpha^2-\alpha^3-\alpha^5+\alpha+\alpha^2+\alpha^4$

$$= (\alpha^2+\alpha^4)-(\alpha^3+\alpha^5) = (\alpha^2+\alpha^4)-(\bar{\alpha}^2+\bar{\alpha}^4)$$

$f(\alpha)$ est donc imaginaire pur. De même $f(\alpha^2) = (\alpha+\alpha^4)-(\alpha^3+\alpha^6) = (\alpha+\alpha^4)-(\bar{\alpha}^4+\bar{\alpha})$ et $f(\alpha^4) = (\alpha+\alpha^2) - (\alpha^5+\alpha^6) = (\alpha+\alpha^2) - (\overline{\alpha^2+\alpha})$ sont imaginaires purs.

$(z-1)(z-s)$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathcal{R}e(z-1)(z-s) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z-s)+\overline{(z-1)(z-s)} = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 -z\ (s+1) + s+\bar{z}^2 - \bar{z}(\bar{s}+1) + \bar{s} = 0$$

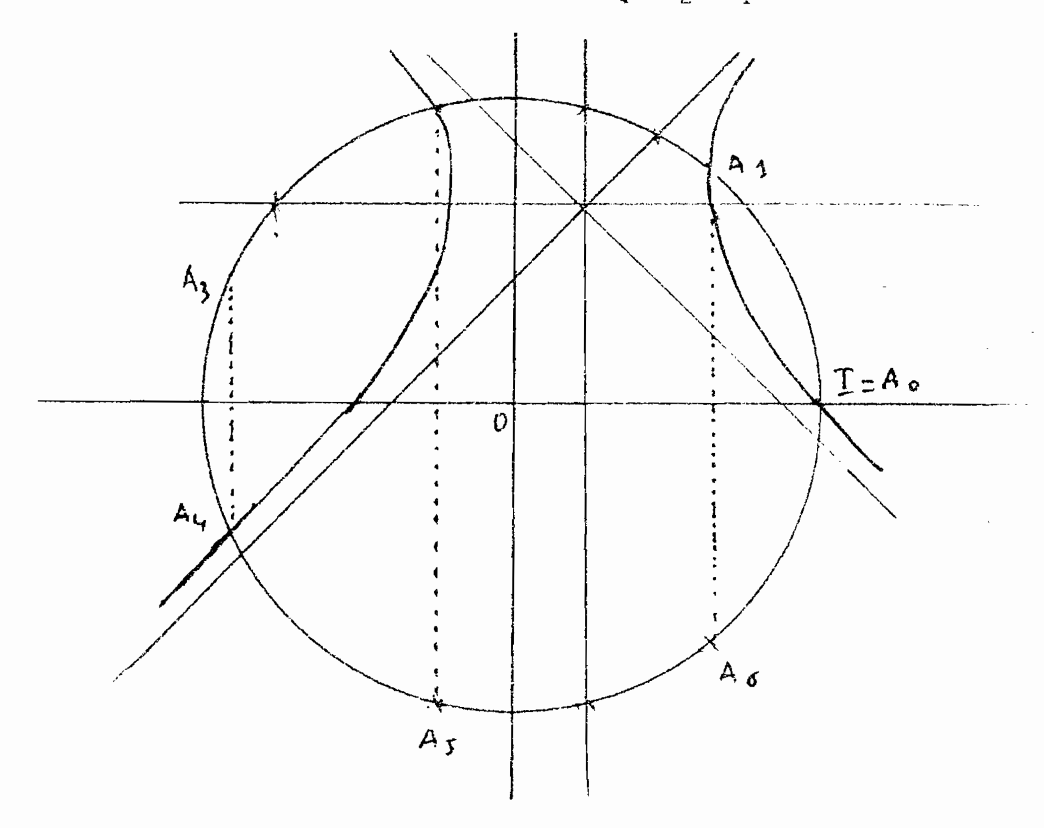
$$\Leftrightarrow 2(x^2-y^2) - 2x + 2x\mathcal{R}es - 2y\mathcal{I}ms - 1 = 0$$

(en posant $z = x+iy$, d'où $z^2+\bar{z}^2 = 2(x^2-y^2)$ et $sz+\overline{sz} = 2\ \mathcal{R}esz = 2(x\mathcal{R}es - \mathcal{I}ms)$).

$$\Leftrightarrow 2(x^2-y^2) - x +\sqrt{7}y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{4})^2 - (y - \frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}.$$

$\mathcal{K}$ est donc une hyperbole équilatère. Pour tout nombre y conistructible, on obtient deux nombres x et x' constructibles tels que (x, y) et (x', y) $\in \mathcal{K}$.
Si $P_7 = (A_0, A_1, \ldots, A_6)$, $\mathcal{K} \cap \Gamma = \{A_0 = I, A_1, A_2, A_4\}$ et A_3, A_5, A_6 sont les symétriques respectifs par rapport à D de A_4, A_2, A_1.



ENONCÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION

DU CAPES INTERNE 1989

Ce problème présente des exemples de découpages d'un intervalle conduisant à l'étude conjointe de suites et de fonctions. La première partie exploite de manière élémentaire une situation d'origine géométrique. Dans la deuxième partie, on envisage des découpages du segment [0, 1] par des segments dont les milieux sont fixés. La troisième et la quatrième partie mettent en évidence des comportements oscillants.

PREMIÈRE PARTIE

1. Les données sont : un demi-cercle (C) d'extrémités A et B, la droite D portant A et B.

On pose N = φ (M) pour exprimer que M et N sont des points de (C) vérifiant AN + BM = AB.

K désigne le point du segment AB tel que BM = BK.

1.1. Indiquer par une figure une construction de N lorsque M est donné.

1.2. On désigne par m et n les projections orthogonales sur D des points M et N respectivement. Exprimer, soit par un calcul analytique, soit à l'aide de considérations géométriques, les distances Am et An en fonction de AK et AB. Vérifier que K est le milieu du segment mn.

1.3. Itérés par φ d'un point de (C).

On définit une suite sur (C) par la donnée d'un point M_0 de (C) distinct de A et de B et par la condition $M_{p+1} = \varphi(M_p)$ pour tout entier naturel p.

a. Faire une figure, en prenant AB = 10 cm, où l'on construira quatre points M_p successifs.

b. Montrer que M_p tend vers A quand p tend vers $+\infty$.

2. Mise en place de suites numériques.

On suppose dorénavant que AB = 1.

À la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de (C), on associe la suite $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points du segment AB définie par : $AK_p = AM_{p+1}$ pour tout entier naturel p

et les suites numériques $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies par :

$c_p = AK_p$ et $x_p = Am_p$, où m_p désigne la projection orthogonale de M_p sur D.

On a donc $c_p = \dfrac{1}{2}(x_p + x_{p+1})$.

2.1. Exprimer x_p et x_{p+1} en fonction de c_p puis c_{p+1} en fonction de c_p.

2.2. Pour x appartenant au segment [0, 1], on pose $u(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ et $v(x) = 2x - x^2$. Représenter, sur un même graphique, ces deux fonctions (axes orthonormés, unité graphique : 10 cm).

En utilisant ce graphique et en partant de $c_0 = \frac{8}{10}$, représenter les points d'abscisses c_1, c_2, x_0, x_1, x_2 et d'ordonnée nulle.

2.3. On s'intéresse aux longueurs des segments $K_p\ K_{p+1}$. Montrer que, pour tout entier naturel p, $c_p - c_{p+1} = \frac{1}{2}(x_p - x_{p+2})$.

Ceci suggère le calcul de la somme des longueurs des segments $K_p K_{p+1}$ pris de deux en deux.

Calculer $\sum_{p=0}^{p=h} K_{2p} K_{2p+1}$ et en déduire, en fonction de c_0, $L(c_0) = \sum_{p=0}^{+\infty} K_{2p} K_{2p+1}$. Déterminer la limite de $L(c_0)$ lorsque c_0 tend vers 1.

3. Sur la droite D, on donne deux points I et J choisis de telle sorte que le segment IJ contienne le segment AB et que ces deux segments aient le même milieu.

Dans cette question, on pose $N = \varphi(M)$ pour exprimer que M et N sont des points de (C) vérifiant $IN + JM = IJ$.

Peut-on étendre à cette situation l'étude faite dans la question 1 ?

DEUXIÈME PARTIE

1. On donne à présent une application de $\mathbb{Z}$ dans le segment $[0, 1]$, $n \longmapsto c_n$, c'est-à-dire une suite sur $\mathbb{Z}$ de points de $[0, 1]$. Cette application est strictement décroissante (pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $c_{n+1} < c_n$) et vérifie :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = 0 \quad , \qquad \lim_{n \to -\infty} c_n = 1 .$$

Le but de cette question est d'étudier sur des exemples l'existence d'une suite sur $\mathbb{Z}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, de points du segment $[0, 1]$, strictement décroissante et satisfaisant à la condition :

$$\text{pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{Z},\ x_n + x_{n+1} = 2\, c_n .$$

Lorsqu'on peut déterminer une telle suite, on dit qu'à la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, est associé un « pavage » du segment $[0, 1]$ à l'aide des segments $[x_{n+1}, x_n]$.

1.1. On pose pour tout n élément de $\mathbb{Z}$, $S_n = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h\, c_{n+h}$.

Justifier la convergence de cette série.

Montrer que le problème admet au plus une solution exprimée par $x_n = 2\, S_n$ pour tout n élément de $\mathbb{Z}$.

Montrer qu'il admet exactement une solution lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement décroissante.

1.2. Exemples.

Dans chacun des trois cas ci-dessous, on observera que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, qui est donnée explicitement, présente une symétrie.

a. Si n appartient à $\mathbb{Z}^+$: $c_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, $\quad c_{-n} = 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Déterminer x_n lorsque n est un élément de $\mathbb{Z}^+$ puis, en utilisant une symétrie, x_{-n}.

Obtient-on un « pavage » du segment [0, 1] ?

b. Si n appartient à $\mathbb{Z}^+$: $c_n = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2^n}$, $\quad c_{-n} = 1 - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Calculer x_0, x_{-1}, x_{-2}. Représenter sur un axe les points d'abscisses c_0, c_{-1}, c_{-2}, x_0, x_{-1}, x_{-2}. Peu dans ce cas, obtenir un « pavage » du segment [0, 1] ?

c. Si n appartient à $\mathbb{Z}^+$: $c_n = \dfrac{1}{n+2}$, $\quad c_{-n} = 1 - \dfrac{1}{n+2}$.

Exprimer x_0 comme somme d'une série.

Montrer que, pour tout t élément du segment [0, 1] et pour tout entier naturel p,

$$(-1)^p \frac{t^{p+1}}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^p\, t^p - \frac{1}{1+t}.$$

À l'aide d'une intégration, en déduire que :

$\ln 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$ et donner une nouvelle expression de x_0.

Pour tout élément n de $\mathbb{Z}^+$, montrer que :

$$x_n = 2\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \quad \text{et comparer } x_n \text{ et } x_{n+1}.$$

À la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, peut-on associer un « pavage » du segment [0, 1] ?

2. Une équation fonctionnelle.

2.1. Soit f une bijection continue, strictement croissante, du segment [0, 1] sur lui-même, vérifiant, pour élément x de l'intervalle]0, 1[, $f(x) < x$.

On considère une suite sur $\mathbb{Z}$ de points de l'intervalle]0, 1[, $n \longmapsto c_n$, vérifiant la relation $c_{n+1} = f$ pour tout élément n de $\mathbb{Z}$.

Montrer que cette suite est strictement décroissante, que c_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et vers 1 q n tend vers $-\infty$.

2.2. Dans l'intention d'associer à toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ainsi construite un « pavage » du segment [0, 1], on cherche fonction g, définie sur le segment [0, 1], telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) + g(f(x)) = 2x \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

En s'inspirant des résolutions numériques qui précèdent, comment peut-on déterminer une telle fonction

Montrer que, si de plus, pour tout élément x de l'intervalle]0, 1[, $g(x) > x$, cette fonction g permet effec ment d'associer à chaque suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un « pavage » du segment [0, 1].

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie, a est un réel donné, strictement supérieur à 1.

1. Étude d'une série de fonctions.

1.1. On pose $\psi(t) = \dfrac{1}{1+a^t}$, t décrivant $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout t, $\psi(t) + \psi(-t) = 1$.

Étudier les variations et faire une représentation graphique de la fonction ψ. Montrer que, sur $\mathbb{R}^+$, ψ est une fonction convexe.

1.2. Pour tout réel t, on désigne par $S(t)$ la somme de la série $\psi(t) - \psi(t+1) + \dots + (-1)^n \psi(t+n) + \dots$ dont on justifiera la convergence.

Montrer que la fonction S est positive.

La fonction S est-elle continue ? Est-elle dérivable ? A-t-elle une limite en $+\infty$?

Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que, sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, S soit décroissante.

Montrer que, pour tout t réel, $S(t) + S(t+1) = \psi(t)$.

Si S a une limite en $-\infty$, quelle est cette limite ?

2. Étude de suites. Dans cette question, n est un entier naturel.

2.1. Suite $n \longrightarrow S(-n)$.

Montrer que : $S(-1) = \dfrac{1}{2} - S(2)$

$S(-2) = \dfrac{1}{2} - S(3)$ et que, pour tout entier naturel n,

$S(-n) = \dfrac{1}{2} - S(n+1)$.

Étudier la suite de terme général $S(-n)$.

2.2. Suite $n \longrightarrow S\left(\dfrac{1}{2} - n\right)$.

Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$S\left(\frac{1}{2} - 2n\right) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \psi\left(k - \frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right)$$

puis que

$$S\left(\frac{1}{2} - 2n\right) = 2\,S\left(\frac{1}{2}\right) - S\left(2n + \frac{1}{2}\right).$$

Étudier chacune des deux suites $n \longrightarrow S\left(\dfrac{1}{2} - 2n\right)$ et $n \longrightarrow S\left(\dfrac{1}{2} - (2n+1)\right)$.

À quelle condition la suite $n \longrightarrow S\left(\dfrac{1}{2} - n\right)$ est-elle convergente ?

QUATRIÈME PARTIE

Étude de $S\left(\frac{1}{2}\right)$ selon la valeur de a.

On rappelle que a est un réel strictement supérieur à 1.

On a $S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + a^{n+\frac{1}{2}}}$.

On pose $b = \sqrt{a}$ et $\sigma(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + b^{2n+1}}$.

1. Montrer que, pour tout b strictement supérieur à 1, $\sigma(b) < \frac{1}{1+b}$.

Que peut-on en déduire concernant la suite $\left(S\left(\frac{1}{2} - n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque a est supérieur ou égal à 9 ?

2. Calculer une valeur décimale approchée de $\sigma(2)$ à 10^{-3} près.

Pour $a = 4$, comparer $S\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{1}{4}$.

3. On désire comparer $S\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{1}{4}$ lorsque a est compris entre 4 et 9.

On pose $\sigma(b) = \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+b^3} + R(b)$.

Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{1+b^{4n+1}} - \frac{1}{1+b^{4n+3}} < \frac{1}{b^{4n+1}} - \frac{1}{b^{4n+3}}.$$

En déduire l'inégalité $R(b) < \frac{1}{b^3(1+b^2)}$.

Montrer qu'on a aussi $\sigma(b) < \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{b^2(1+b^3)}$.

Comparer, pour b strictement supérieur à 2, $\sigma(b)$ et $\frac{1}{4}$.

4. Un encadrement de $\sigma(b)$.

4.1. On pose, pour tout entier naturel n :

$$\alpha_n = \frac{1}{1+b^{2n+1}} - \frac{2}{1+b^{2n+3}} + \frac{1}{1+b^{2n+5}}.$$

Étudier le signe de α_n.

4.2. Démontrer les égalités :

$$2\sigma(b) = \frac{1}{1+b} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n}$$

et

$$2\sigma(b) = \frac{2}{1+b} - \frac{1}{1+b^3} - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}.$$

En déduire que, pour tout réel b strictement supérieur à 1, on a :

$$\frac{1}{2\,(1+b)} < \sigma(b) < \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2\,(1+b^3)}.$$

4.3. On prolonge σ en 1 en posant $\sigma(1) = \frac{1}{4}$.

Montrer que la fonction ainsi définie est continue en 1, puis, en comparant par exemple $\sigma(b)$ et $\frac{3}{4\,(1+b)} - \frac{1}{4\,(1+b^3)}$, qu'elle y est dérivable.

5. Fonction f associée à S.

On pose $x = \psi(t)$ [voir III.1.1] donc, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, x décrit l'intervalle $]0, 1[$.

Déterminer la fonction f, définie et continue sur le segment $[0, 1]$, sachant qu'on a $f(x) = \psi(t+1)$ lorsque $x = \psi(t)$. Vérifier que f satisfait aux conditions du II.2.1.

On associe à f la fonction g comme au II.2.2. Lorsque a est supérieur ou égal à 4, a-t-on, pour tout x élément de l'intervalle $]0, 1[$, $g(x) > x$?

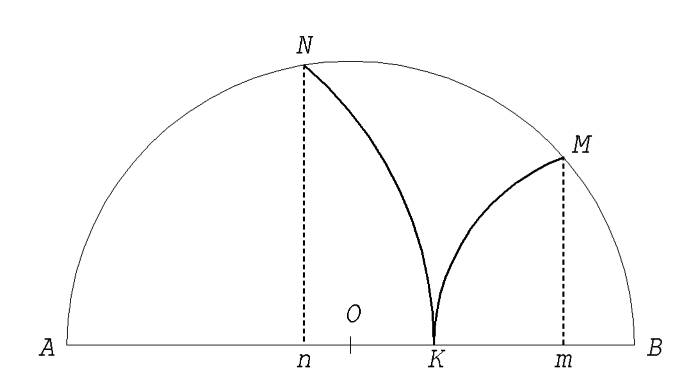
Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

Cl. Piquet
10.12.04

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1989

Première partie

1.1.



Le cercle de centre B passant par M donne le point K ; le cercle de centre A et de rayon AK fournit le point N.

1.2.
Calcul analytique : on peut supposer l'unité de longueur choisie de sorte que $B = (\frac{1}{2}, 0)$ et $A = (-\frac{1}{2}, 0)$. Si (x, y) $\big($*resp.* $(u, v)\big)$ sont les coordonnées du point M (*resp.* N), on a la double égalité $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = \frac{1}{4}\cdot$

Si k est l'abcisse du point K, l'égalité des longueurs BM et BK donne l'égalité

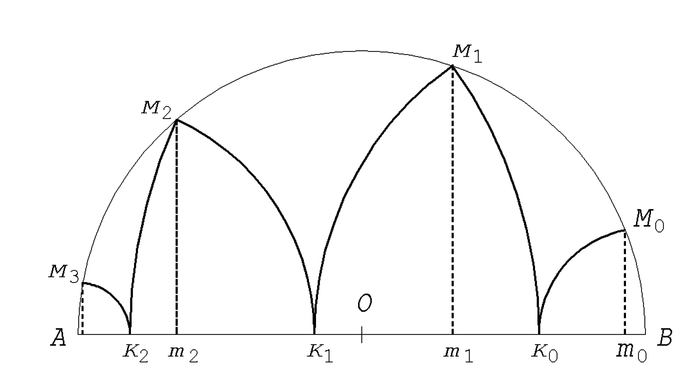
$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (k - \frac{1}{2})^2 \qquad \text{soit} \qquad k^2 - k = \frac{1}{4} - x\,.$$

De même, $AN = AK$ donne $k^2 + k = \frac{1}{4} + u$ d'où $2k = u + x$: K est le milieu du segment $[n, m]$. L' inégalité $k \leq \frac{1}{2}$ montre aussi que $u \leq k$ donc $u \leq k \leq x$ (inégalités strictes si $x \notin \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$).

Méthode géométrique : le triangle AMB rectangle en M donne la relation $AM^2 = Am\,.\,AB$ donc $Am\,.\,AB = AB^2 - BK^2 = AB^2 - (AB - AK)^2 = 2AK\,.\,AB - AK^2$. Or $AK^2 = AN^2 = An\,.\,AB$, donc $(Am + An)AB = 2AK\,.\,AB$ d'où le résultat puisque $AB > 0$.

1.3.a. Voir la figure ci-contre.

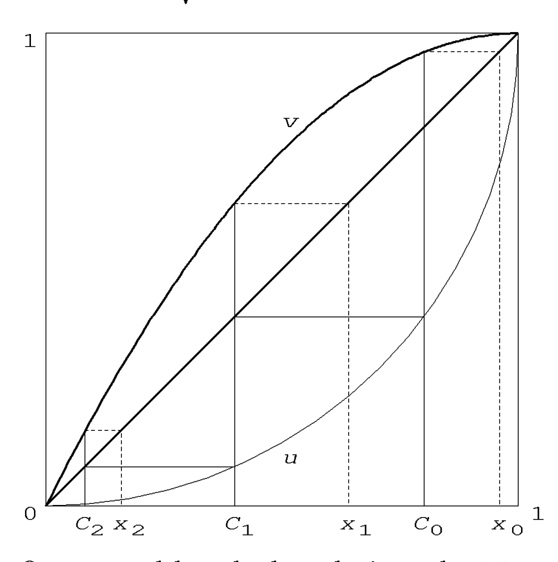
1.3.b. On a vu que $Am_{p+1} < Am_p$: la suite positive (Am_p) est donc convergente. Soit ℓ la limite de cette suite et m le point associé ($Am = \ell$). On a vu que $Am_p\,.\,AB = 2AK_p\,.\,AB - AK_p^2$ et comme K_p est le milieu du segment $[m_{p+1}, m_p]$, la suite (K_p) converge aussi vers m. On a donc, à la limite, $Am\,.\,AB = Am^2$. Or $Am < A_0 < AB$, donc $Am = 0$: A et m coïncident, donc la suite de points (M_p) converge vers le point A.



2.1. On a obtenu en 1.2. les relations $x_p = 2c_p - c_p^2$ et $x_{p+1} = c_p^2$. Donc

$$c_p^2 = 2c_{p+1} - c_{p+1}^2 = 1 - (1 - c_{p+1})^2$$

d'où $c_{p+1} = 1 - \sqrt{1 - c_p^2}$ $(c_{p+1} \in]0,1[$ détermine le signe de la racine carrée).



2.2. Le graphe de u est porté par le cercle $(y-1)^2 + x^2 = 1$ et celui de v par la parabole $(x-1)^2 = 1-y$. On a $c_{p+1} = u(c_p)$ et $x_p = v(c_p)$.

2.3. $c_p - c_{p+1} = \frac{1}{2}(x_p - x_{p+2})$ est immédiat. On a donc

$$K_{2p}K_{2p+1} = |c_{2p} - c_{2p+1}| = \frac{1}{2}(x_{2p} - x_{2(p+1)})$$

car la suite (x_p) est monotone décroissante. On a donc $\sum_{p=0}^{N} K_{2p}K_{2p+1} = \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}x_{2(N+1)}$ et comme (x_p) converge vers 0 (question 1.3.) on voit que $L(c_0)$ existe et vaut $\frac{1}{2}x_0 = c_0 - \frac{1}{2}c_o^2$. Il en résulte que $L(c_0)$ converge vers $\frac{1}{2}$ lorsque $c_o \to 1$.

3. On reprend le calcul analytique du 1.2. en posant $\ell =$ longueur de IJ. On suppose les points I, A, B et J alignés dans cet ordre. $\|JM\| = \|JK\|$ donne $\frac{1}{4} - \ell x = k^2 - k\ell$ et $\|IN\| = \|IK\|$ conduit à $\frac{1}{4} + \ell u = k^2 + k\ell$, d'où à nouveau $2k = u + x$ (car $\ell > 0$). (La condition $\ell > 1$ assure l'existence, pour tout point M du cercle, d'un point N associé). Le point K est donc à nouveau le milieu du segment $[mn]$. Comme précédemment, l'encadrement $u < k < x$ montre que (m_p) est une suite positive monotone décroissante, donc convergente. La limite de cette suite détermine un point M tel que $\varphi(M) = M$; comme en 1.3. on voit que ce point est le point A : les conclusions de la question 1.3. restent valables.

Deuxième partie

1.1. Le terme général de la série alternée $\sum_h (-1)^h c_{n+h}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées puisque la suite (c_n) converge vers 0 en décroissant. La série définissant S_n converge donc. Si l'on peut écrire $c_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, on a alors nécessairement

$$2S_n = \sum_{h=0}^{+\infty} \left((-1)^h x_{n+h} + (-1)^h x_{n+h+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{h=0}^{N} \left((-1)^h x_{n+h} - (-1)^{h+1} x_{n+h+1}\right)$$

d'où $2S_n = x_n - \lim_{N\to+\infty} (-1)^{n+1} x_{n+N+1}$. Or $0 \leq x_n \leq 2c_n$, donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ d'où $2S_n = x_n$.

Cette condition nécessaire montre que s'il existe un pavage de $[0,1]$ associé à la suite (c_n), alors (S_n) est une suite strictement décroissante et que nécessairement $x_n = 2S_n$.

Inversement, si (S_n) est une suite strictement décroissante, l'égalité $x_n = 2S_n$ définit une suite (x_n) strictement décroissante, telle que $x_n + x_{n+1} = 2(S_n + S_{n+1}) = 2c_n$. Le théorème des séries alternées assure que $c_n - c_{n+1} < S_n$; comme (c_n) est strictement décroissante, S_n, et donc x_n, est positif pour tout n. De plus, $2c_n = x_n + x_{n+1} > 2x_{n+1}$ car (x_n) est strictement décroissante, donc $0 < x_{n+1} < c_n < 1$: si la suite bornée (S_n) est strictement décroissante, il existe un pavage de $[0,1]$ associé à la suite (c_n).

1.2.a. On a, pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2^{n+h+1}} = \frac{1}{3\,.\,2^n}$, d'où $x_n = \frac{1}{3\,.\,2^{n-1}}$ si $n \geq 0$. On a aussi, pour $n \geq 1$, $x_{-n} + x_{-n+1} = 2c_{-n} = 2 - \frac{1}{2^n}$, soit encore

$$(1 - x_{-n}) + (1 - x_{-(n-1)}) = \frac{1}{2^n} = 2c_n = x_n + x_{n+1}\,.$$

On pose, pour $n \geq 1$, $y_n = 1 - x_{-(n-1)}$; on a donc, pour $n \geq 1$, $y_n + y_{n+1} = x_n + x_{n+1}$. Or $\lim_{n \to +\infty} y_n = 1 - \lim_{n \to -\infty} x_n = 0$ si (x_n) est un pavage de $[0, 1]$. L'unicité établie en 1.1. impose donc $y_n = x_n$ si $n \geq 1$, soit $x_n = 1 - x_{-n+1}$ si $n \leq 0$ d'où

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3\,.\,2^{n-1}} & \text{si } n \geq 0, \\ 1 - \dfrac{1}{3\,.\,2^{-n}} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

On a bien un pavage de $[0, 1]$ (immédiat).

1.2.b. $S_0 = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{3\,.\,2^{h-1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$ d'où $x_0 = \frac{4}{9} \cdot$ On a donc

$$x_{-1} = 2c_{-1} - x_0 = 2(1 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \qquad \text{et} \qquad x_{-2} = 2c_{-2} - x_{-1} = 2(1 - \frac{1}{6}) - \frac{8}{9} = \frac{7}{9}\, cdotp$$

On observe que $x_{-2} < x_{-1}$: on ne peut donc pas associer de pavage de $[0, 1]$ à la suite (c_n) proposée.

0 x_0 x_{-2} x_{-1} 1

c_0 c_{-1} c_{-2}

1.2.c. On a $x_0 = 2S_0 = 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h+2}$. D'autre part, on a, pour $t \in [0, 1]$:

$$\frac{1 - (-t)^{p+1}}{1 - (-t)} = \frac{1 + (-1)^p t^{p+1}}{1 + t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^p t^p\,,$$

d'où l'égalité demandée :

$$(*) \qquad (-1)^p \frac{t^{p+1}}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^p t^p - \frac{1}{1+t} \cdot$$

On intègre les deux membres de cette égalité de 0 et 1. On obtient :

$$(-1)^p \int_0^1 \frac{t^{p+1}}{1+t}\, dt = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-)^p}{p+1} - \ln 2\,.$$

Or $\frac{t^{p+1}}{1+t} \leq t^{p+1}$ si $t \geq 0$, donc $\left|\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-)^p}{p+1}\right)\right| \leq \int_0^1 t^{p+1}\, dt = \frac{1}{p+2} \cdot$ On fait tendre p vers l'infini : $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-)^{n+1}}{n} + \cdots$ d'où $x_0 = 2(1 - \ln 2)$. On multiplie l'égalité $(*)$ par t^{n+1} et on l'intègre de 0 à 1 :

$$(-1)^p \int_0^1 \frac{t^{n+p+2}}{1+t}\, dt = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{(-1)^p}{n+p+2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt\,.$$

Or $x_n = 2S_n 2\sum_{h=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^h}{n+h+2}$ pour $n \geq 0$, on a donc, en majorant comme précédemment,

$$\left|\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{(-1)^p}{n+p+2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt\right| \leq \frac{1}{n+p+3} \qquad \text{d'où}$$

$$x_n = 2\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \qquad (n \geq 0)\,.$$

Il en résulte que $x_n - x_{n+1} = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)}{1+t}\,dt$ donc que $x_n > x_{n+1}$, car on intègre une fonction continue sur $[0,1]$, strictement positive sur $]0,1[$: la suite (x_n) est, pour $n \geq 0$, strictement décroissante, et comme $0 \leq x_n < 2\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\,dt = \frac{2}{n+2}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Enfin, pour $n > 0$, on a $x_{-n} + x_{-n+1} = 2c_{-n} + c_{-n+1} = 2c_{-n} = 2 - \dfrac{2}{n+2}$ d'où, comme précédemment, $(1-x_{-n}) + (1-x_{-n+1}) = \dfrac{2}{n+2} = x_n + x_{n+1}$. Si (x_n) est un pavage de $[0,1]$, il faut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1-x_{-n}) = 0$. On a donc nécessairement, par l'unicité obtenue en 1.1., $x_n = 1 - x_{-n+1}$. Donc :

$$x_n = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt & \text{si } n \geq 0\,,\\ 1 - 2\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-n+2}}{1+t}\,dt & \text{si } n < 0\,. \end{cases}$$

Il est immédiat alors que (x_n) est un pavage de $[0,1]$.

2.1. Comme $c_0 \in]0,1[$ on a aussi $c_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (f et f^{-1} sont des bijections strictement croissantes de $[0,1]$ dans $[0,1]$. De plus, $c_{n+1} = f(c_n) < c_n$: la suite (c_n) est strictement décroissante. Les deux limites $a = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n$ et $b = \displaystyle\lim_{n\to-\infty} c_n$ existent donc et, comme f est continue, on a $f(a) = a$ et $f(b) = b$. L'inégalité stricte $f(x) < x$ pour $x \in]0,1[$ implique a et $b \in \{0,1\}$ et l'encadrement $a \leq c_0 \leq b$ avec $c_0 \in]0,1[$ montre que $a = 0$ et $b = 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to-\infty} c_n = 1$.

2.2. Soit $f^{(h)}$ l'itérée d'ordre h de la fonction f : $f^{(0)} =$ identité, $f^{(1)} = f$ et $f^{(h)} = f \circ f^{(h-1)}$. Si $g(x) + g\big(f(x)\big) = 2x$, on a aussi

$$g\big(f(x)\big) + g\big(f^{(2)}(x)\big) = 2f(x),\ \ldots,\ g\big(f^{(h)}(x)\big) + g\big(f^{(h+1)}(x)\big) = 2f^{(h)}(x)\,.$$

On pose, pour $x \in]0,1[$, $y_k = f^{(k)}(x)$. D'après 2.1., la suite (y_k) converge vers 0 en décroissant, donc $\displaystyle\sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^h y_h$ converge (théorème des séries alternées). Or, pour tout entier p, $g(x) + (-1)^p g(y_{p+1}) = 2\displaystyle\sum_{h=0}^{p}(-1)^h f^{(h)}(x)$. Comme on veut que $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, on obtient, en faisant tendre p vers $+\infty$,

$$g(x) = 2\sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^h f^{(h)}(x) \qquad (0 < x < 1)\,.$$

Cette expression définit sur $]0,1[$ une fonction telle que $g(x) + g\big(f(x)\big) = 2x$. Le théorème des séries alternées donne $g(x) > 2x - 2f(x) > 0$ donc $g(x) > 0$. Mais l'encadrement $0 < g(x) < 2x$

pour $0 < x < 1$ implique $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. On pose évidemment $g(0) = 0$ (valeur compatible avec la formule encadrée) et $g(1) = 1$, valeur imposée par $g(x) + g(f(x)) = 2x$ pour $x = 1$ (la série déterminant g diverge pour $x = 1$). Si enfin $g(x) > x$ pour $x \in]0,1[$, on a $g(x) > x > g\big(f(x)\big)$.

Si l'on pose alors $x_n = g(c_n)$, on a bien $g(c_n) > g(c_{n-1})$ et comme (c_n) converge vers 0 quand $n \to +\infty$, (x_n) converge aussi vers 0. L'encadrement $0 < x < 2c_n \leq 2$ et la décroissance de la suite (x_n), impliquent l'existence de $\ell = \lim\limits_{n \to -\infty} x_n$. Cette limite vérifie $\ell + \ell = 2$, donc $\ell = 1$. Enfin, comme $x_n + x_{n+1} = g(c_n) + g\big(f(c_n)\big) = 2c_n$, la suite (x_n) est bien un pavage de $[0,1]$:

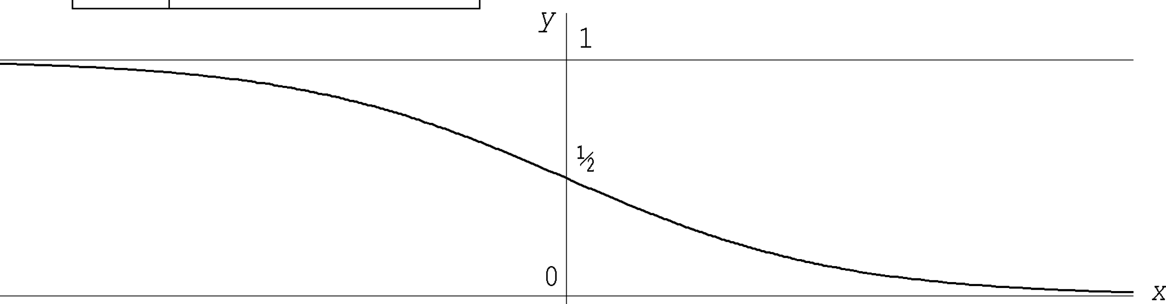
Si $g(x) > x$ sur $]0,1[$, la suite $x_n = g(c_n)$ est un pavage de $[0,1]$ associé à la suite (c_n).

Troisième partie

1.1. On vérifie immédiatement que $\psi(t) + \psi(-t) = 1$ pour tout t réel. La fonction ψ est évidemment dérivable et $\psi'(t) = -\dfrac{a^t \ln a}{(1+a^t)^2} = (-\ln a)\big(1 - \psi(t)\big)\psi(t)$. Le signe de ψ'' est donc celui de $-\psi'(t) + 2\psi(t)\psi'(t)$ donc de $1 - 2\psi(t) = \dfrac{a^t - 1}{a^t + 1}$. On a donc le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\psi''(t)$		$-$	0	$+$	
$\psi'(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}\ln a$	$\nearrow$	0
$\psi(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

ψ est donc monotone et décroissante sur $\mathbb{R}$; elle est aussi convexe sur $[0,+\infty[$ et donc concave sur $]-\infty,0]$.



1.2. La suite $\big(\psi(t+n)\big)_n$ tend vers 0 en décroissant. Le théorème des séries alternées assure la convergence de $\sum(-1)^n\psi(t+n)$. $S(t)$ existe donc pour tout t réel. Le même théorème indique que $S(t) > \psi(t) - \psi(t+1)$; ψ étant décroissante, $S(t) > 0$. Le reste $R_n(t)$ d'ordre n est majoré, en valeur absolue, par $\psi(t+n+1)$ (toujours par le théorème des séries alternées). Si donc $t \in [0,+\infty[$, on a $|R_n(t)| \leq \psi(n+1)$, car ψ est décroissante. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi(n+1) = 0$, on voit que la suite $\big(R_n(t)\big)_n$ converge vers 0 uniformément en t sur $[0,+\infty[$. Ceci implique la convergence uniforme en t, sur $[0,+\infty[$, de la série de fonctions continues $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\psi(t+n)$: la somme $S(t)$ de cette série est donc une fonction continue de t ; de plus, la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ permet d'affirmer

que $\lim_{t\to+\infty} S(t) = 0$ car, pour chaque fonction de la série on a $\lim_{t\to+\infty} \psi(n+t) = 0$: S est continue et tend vers 0 à l'infini.

La série dérivée terme à terme, $\sum(-1)^n\psi'(n+t)$ vérifie aussi les hypothèses du théorème des séries alternées, à partir d'un rang fonction de t. En effet, pour $t > 0$, $-\psi'(t)$ est une fonction positive décroissante de t, de limite nulle en $+\infty$. La démonstration précédente faite sur le reste d'ordre n de la série alternée peut donc être reprise pour cette série, pourvu que le rang n soit tel que $t+n > 0$. Si $t \geq A$, il suffit de considérer les indices $n \geq -A$: la série dérivée converge elle aussi uniformément en t sur toute demi-droite $[A, +\infty[$: S est une fonction dérivable et sa dérivée est la somme $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\psi'(n+t)$ de la série dérivée.

Si $t \geq 0$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\psi'(n+t)$ vérifie dès le rang $n = 0$ les hypothèses du théorème des séries alternées. On a donc, pour $t \geq 0$, $-S'(t) \geq \big(-\psi'(t) - (-\psi'(t+1)\big)$ ($-\psi'$ est positive !) et comme $-\psi'$ est décroissante, on a $-S'(t) \geq 0$: S est certainement décroissante sur $[0, +\infty[$. Il existe donc un réel t ($t \leq 0$) tel que S soit décroissante sur $[t, +\infty[$.

L'égalité $S(t) + S(t+1) = \psi(t)$ est immédiate. Donc si $\ell = \lim_{t\to-\infty} S(t)$ existe, on a $2\ell = \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = 1$: si S a une limite en $-\infty$, cette limite vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$

2.1. On a $S(t) + S(t+1) = \psi(t)$ donc $S(0) + S(1) = \psi(0) = \frac{1}{2}\cdot$ On a aussi

$$S(-t) + S(-t+1) = \psi(-t) = 1 - \psi(t) = 1 - S(t) - S(t+1)\,.$$

On en tire $S(t+1) + S(-t) = 1 - \big(S(t) + S(-t+1)\big)$. On pose $W_n = S(-n) + S(n+1)$; on a donc, en posant $t = n$, $W_n = 1 - W_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Comme $W_0 = \frac{1}{2}$, on voit que $W_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S(-n) = \frac{1}{2} - S(n+1)\,.$$

On a vu que $\lim_{t\to+\infty} S(t) = 0$; on a donc $\lim_{n\to+\infty} S(n+1) = 0$ d'où convergence vers 1/2 de la suite $(S(-n))_n$ quand $n \to +\infty$.

2.2. Par définition de S, on a $S(\frac{1}{2} - 2n) = \sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^h\psi(\frac{1}{2} - 2n + h)$; on a donc aussi

$$\begin{aligned} S(\frac{1}{2} - 2n) - S(\frac{1}{2}) &= \sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^h\psi(\frac{1}{2} - 2n + h) - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\psi(\frac{1}{2} + k) = \sum_{h=0}^{2n-1}(-1)^h\psi(\frac{1}{2} - 2n + h) \\ &= \sum_{h=0}^{2n-1}(-1)^h(1 - \psi(2n - h - \frac{1}{2})) = \sum_{h=0}^{2n-1}(-1)^{h+1}\psi(2n - h - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

car $2n$ est pair ; donc $S(\frac{1}{2} - 2n) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\psi(k - \frac{1}{2}) + S(\frac{1}{2})\cdot$

Or $S(2n + \frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\psi(2n + \frac{1}{2} + k) = S(\frac{1}{2}) - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\psi(k - \frac{1}{2})$, donc

$$S(\frac{1}{2} - 2n) = 2S(\frac{1}{2}) - S(\frac{1}{2} + 2n)\,.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S(\frac{1}{2}+2n) = 0$, on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S(\frac{1}{2}-2n)$ existe et vaut $2S(\frac{1}{2})\cdot$ Mais $S\big(\frac{1}{2}-(2n+1)\big) = \psi(-\frac{1}{2}-2n-1)-S(\frac{1}{2}-2n)$, donne la convergence de la suite $\Big(S\big(\frac{1}{2}-(2n+1)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $1-2S(\frac{1}{2})\cdot$ Si la suite $\big(S(\frac{1}{2}-n)\big)_n$ converge, nécessairement les deux limites précédentes coïncident, donc $S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$:

Une condition nécessaire pour que la suite $\big(S(\frac{1}{2}-n)\big)_{n>0}$ converge est que $S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\cdot$

Quatrième partie

1. $\sigma(b)$ est la somme d'une série alternée vérifiant les hypothèses du théorème des séries alternées. On a donc $\sigma(b) < \dfrac{1}{1+b}$ d'où $S(\frac{1}{2}) = \sigma(b) < \frac{1}{4}$ si $b \geq 3$, c'est-à-dire $a \geq 9$:

Si $a \geq 9$, la suite $\big(S(\frac{1}{2}-n)\big)_n$ diverge.

2. On a, toujours par le théorème des séries alternées, $\Big|\sigma(2) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{1+2^{2k+1}}\Big| < \dfrac{1}{1+2^{2n+1}}$. Ce terme sera certainement majoré par 10^{-3} dès que $10^3 < 1+2^{2n+3}$, ou $2n+3 > \dfrac{3}{\log_{10} 2}$ donc $n \geq 4$.

On pose $A = \sum\limits_{k=0}^{4} \dfrac{1}{1+2^{2k+1}}$. Un calcul facile donne $A = \dfrac{59\,867}{242\,649}$ et l'on a $A - 10^{-3} < \sigma(2) < A$, d'où $\sigma(2) = 0,246 \pm 10^{-3}$. On a même $\sigma(2) < A < \frac{1}{4}$ car $59\,867 \times 4 < 242\,649$:

La suite $\big(S(\frac{1}{2}-n)\big)_n$ diverge si $a = 4$.

3. On a $\dfrac{1}{1+b^{4n+1}} - \dfrac{1}{1+b^{4n+3}} = \dfrac{b^{4n+1}}{1+b^{4n+1}}\cdot\dfrac{b^2-1}{b^{4n+3}} < \dfrac{b^2-1}{b^{4n+3}}$ (car $b-1>0$), d'où la majoration de l'énoncé.

On a $R(b) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+b^{2n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{1}{1+b^{4n+1}} - \dfrac{1}{1+b^{4n+3}}\Big)$; il en résulte que

$$R(b) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^2-1}{b^{4n+3}} = \frac{b^2-1}{b^7} = \frac{1}{b^3(b^2+1)}\cdot$$

Comme $b^3(b^2+1) > b^2(1+b^3)$ car $b>1$, il vient $R(b) < \dfrac{1}{b^2(1+b^3)}$, soit

$$\sigma(b) < \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{b^2(1+b^3)}\cdot$$

Cette dernière expression donne

$$\sigma(b) < \frac{b(b^2-1)}{(b+1)(b^3+1)} + \frac{1}{b^2(b^3+1)} = \frac{b^3(b-1)+1}{b^2(b^3+1)} \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{1}{4} - \sigma(b) > \frac{(b-2)\big(b+2+b^3(b-2)\big)}{b^2(b^3+1)} > 0 \qquad \text{si } b > 2 :$$

Si $a > 4$, la suite $\big(S(\frac{1}{2}-n)\big)_n$ est divergente.

4.1. α_n s'écrit $\psi(n+\frac{1}{2})-2\psi(n+\frac{3}{2})+\psi(n+\frac{5}{2})$; or ψ est convexe. On a donc $\alpha_n>0$.

4.2. $2\sigma(b)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{1+b^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{2}{1+b^{4n+1}}-\frac{2}{1+b^{4n+3}}\Big)$ donc

$$2\sigma(b)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\alpha_{2n}+\frac{1}{1+b^{4n+1}}-\frac{1}{1+b^{4n+5}}\Big)=\frac{1}{1+b}+\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{2n}$$

et aussi

$$2\sigma(b)=\frac{2}{1+b}-\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{2}{1+b^{4n+3}}-\frac{2}{1+b^{4n+5}}\Big)=\frac{2}{1+b}-\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\alpha_{2n+1}+\frac{1}{1+b^{4n+3}}-\frac{1}{1+b^{4n+7}}\Big)$$

d'où $2\sigma(b)=\frac{2}{1+b}-\frac{1}{1+b^3}-\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{2n+1}$. La positivité de la suite (α_n) donne l'encadrement :

$$\frac{1}{2(1+b)}<\sigma(b)<\frac{1}{1+b}-\frac{1}{2(1+b^3)}\qquad\text{pour}\qquad b>1\,.$$

4.3. Il est manifeste alors que $\lim_{\substack{b\to 1\\ b>1}}\sigma(b)=\frac{1}{4}$, les deux membres extrêmes de l'encadrement précédent ayant cette limite :

σ est donc continue à droite en 1.

En ajoutant les deux égalités de la question précédente, on obtient

$$4\sigma(b)=\frac{3}{1+b}-\frac{1}{1+b^3}+\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_{2n}-\alpha_{2n+1})\,.$$

On cherche à évaluer l'ordre de grandeur de la somme de cette série lorsque $b\to 1$. Un calcul facile (bien que laborieux ...) donne :

$$\begin{aligned}\alpha_n&=(b-1)\Big(\frac{b^{2n+1}}{(1+b^{2n+1})(1+b^{2n+3})}-\frac{b^{2n+3}}{(1+b^{2n+3})(1+b^{2n+5})}\Big)\\&=\frac{(b^2-1)^2b^{2n+1}(b^{2n+3}-1)}{(1+b^{2n+1})(1+b^{2n+3})(1+b^{2n+5})}\end{aligned}$$

On pose $\mathcal{D}_n=(1+b^{4n+1})(1+b^{4n+3})(1+b^{4n+5})(1+b^{4n+7})$ et on a alors

$$\mathcal{D}_n\alpha_{2n}=(b^2-1)^2b^{4n+1}(b^{4n+3}-1)(1+b^{4n+7})\,,\quad \mathcal{D}_n\alpha_{2n+1}=(b^2-1)^2b^{4n+3}(b^{4n+5}-1)(1+b^{4n+1})$$

d'où

$$\mathcal{D}_n(\alpha_{2n}-\alpha_{2n+1})=(b^2-1)^2b^{4n+1}\mathcal{N}_n$$

avec $\mathcal{N}_n=(b^{4n+3}-1)(b^{4n+7}+1)-b^2(b^{4n+5}-1)(b^{4n+1}+1)$. On explicite :

$$\mathcal{N}_n=(b^2-1)\big(b^{8n+8}-2b^{4n+3}(b^2+1)+1\big)\,.$$

Ceci permet de majorer $\mathcal{N}_n$: $|\mathcal{N}_n|\le 6(b^2-1)b^{8n+8}$ (on majore 1 par b) ; comme $\mathcal{D}_n\ge b^{16n+16}$, il vient

$$|\alpha_{2n}-\alpha_{2n+1}|<\frac{6(b^2-1)^3}{b^{16n+16}}b^{12n+9}=\frac{6(b^2-1)^3}{b^{4n+7}}\,.$$

On a donc

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_{2n}-\alpha_{2n+1})\Big| \le \frac{6(b^2-1)^3}{b^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{b^{4(n+1)}} = \frac{6(b^2-1)^3}{b^3(b^4-1)} = \frac{6(b^2-1)^2}{b^3(b^2+1)} \le 3(b^2-1)^2$$

si bien que $4\sigma(b) = \dfrac{3}{1+b} - \dfrac{1}{1+b^3} + \mathcal{O}\big((b-1)^2\big)$ au voisinage de $b=1$.

On pose $b = 1+h$; alors $4\sigma(1+h) = \dfrac{3}{2}\Big(1+\dfrac{h}{2}\Big)^{-1} - \dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{3h}{2}+\dfrac{3h^2}{2}\Big)^{-1} + \mathcal{O}(h^2)$ d'où $4\sigma(1+h) = 1 + \mathcal{O}(h^2)$, ce qui montre que la dérivée à droite en 1 de σ existe et est nulle :

σ est continue et dérivable à droite en $b=1$ et sa dérivée à droite en ce point est nulle.

5. ψ mettant $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ en bijection, il correspond, à tout $x \in]0,1[$, un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \psi(t)$. On veut que $f(x) = \psi(t+1)$ lorsque $x = \psi(t)$: f est donc l'image par ψ d'une translation de 1.

On pose $\tau(x) = x+1$ = translation à droite de 1 dans $\mathbb{R}$. f est donc définie par le produit de composition $f = \psi\circ\tau\circ\psi^{-1}$. Comme ψ (et donc ψ^{-1}) est strictement décroissante et que τ est strictement croissante, on voit que f est strictement croissante. Par définition de ψ^{-1}, on a $x\big(1+a^{\psi^{-1}}\big) = 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+a^{\psi^{-1}}}$; on a donc $f(x) = \dfrac{x}{x+a(1-x)} = \dfrac{x}{a-(a-1)x}$; cette écriture se prolonge en 0 et 1 par $f(0)=0$ et $f(1)=1$. La relation $f = \psi\circ\tau\circ\psi^{-1}$ donne $f^{(h)} = \psi\circ\tau^{(h)}\circ\psi^{-1}$ où, naturellement, $\tau^{(h)}(t) = t+h$, d'où

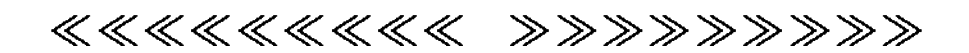
$$f^{(h)}(x) = \frac{1}{1+a^h\,.\,a^{\psi^{-1}}} = \frac{x}{x+a^h(1-x)}\,.$$

On a pour g l'expression $g(x) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{x+a^n(1-x)}$ $(0<x<1)$ et évidemment $g(0)=0$, $g(1)=1$. On remarque alors que $2S(\frac{1}{2}-n) = g\big(\frac{a^n}{a^n+\sqrt{a}}\big)$. L'hypothèse $g(x) > x$ pour $x\in]0,1[$ conduirait alors à $\dfrac{a^n}{a^n+\sqrt{a}} < 2S(\frac{1}{2}-n)$. Mais on sait (cf. III.2.2.) que

$$\lim_{n\to+\infty} S\big(\tfrac{1}{2}-2n\big) = 2S\big(\tfrac{1}{2}\big) \qquad\text{et}\qquad \lim_{n\to+\infty} S\big(\tfrac{1}{2}-2n-1\big) = 1-2S\big(\tfrac{1}{2}\big)$$

d'où nécessairement $1 \le 4S\big(\frac{1}{2}\big)$ et $1 \le 2-4S\big(\frac{1}{2}\big)$ soit $S\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{4}$, ce qui est exclu si $a \ge 4$.

L'hypothèse $g(x) > x$ pour $x\in]0,1[$ est à rejeter si $\alpha \ge 4$.



ENONCÉ DE LA DEUXIÈME COMPOSITION

DU CAPES INTERNE 1989

L'épreuve comprend trois parties. Les deux premières s'organisent autour d'activités qui se situent au niveau de la pratique de la géométrie. La dernière partie replace sur un plan plus général des propriétés qui ont été dégagées dans les activités.

PREMIÈRE PARTIE

Soit dans le plan orienté un triangle PQR de sens direct. La construction de triangles UVW, éventuellement aplatis, tels que :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \overrightarrow{PU} + \overrightarrow{QV} + \overrightarrow{RW} = \vec{0} \\ PU = QV = RW. \end{cases}$$

fait l'objet de cette séquence.

Il est conseillé, pour la figure d'étude, de prendre $PQ = 8$, $QR = 10$ et $RP = 12$, l'unité de longueur étant le centimètre.

1. *a.* On suppose construit un triangle UVW vérifiant (I). Soit T le point défini par $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{QV}$.

   Montrer que $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RW}$ et que le triangle PUT est équilatéral pour U distinct de P.

   b. Déduire de la question précédente une construction des triangles UVW dont le sommet U est un point donné du plan distinct de P et qui satisfont à la condition (I). Donner, pour chaque solution, la valeur de $(\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{RW})$ $[2\pi]$.

2. Soit UVW un triangle satisfaisant à (I) et tel que $(\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{RW}) = -\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.

   a. Montrer que W est l'image de V dans la rotation $\mathscr{R}_1$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ transformant Q en R.

   b. On note O_1 le centre de la rotation $\mathscr{R}_1$ et O_2, O_3 les centres des rotations $\mathscr{R}_2$ et $\mathscr{R}_3$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ transformant respectivement R en P et P en Q.

   Déterminer la nature de la composée $\mathscr{R}_3 \circ \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$ de ces trois rotations. En déduire que le triangle $O_1O_2O_3$ est équilatéral.

   c. Démontrer que les points U, V, W sont les symétriques d'un point du plan par rapport aux droites (O_2O_3), (O_3O_1) et (O_1O_2) respectivement. Justifier alors la propriété suivante :

   « Soit S un point du plan distinct des sommets du triangle $O_1O_2O_3$. Les points U, V, W, symétriques de S par rapport aux droites (O_2O_3), (O_3O_1) et (O_1O_2) respectivement, sont les sommets d'un triangle satisfaisant à (I) et tel que, si $U \neq P$, $(\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{RW}) = -\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$. »

   Que se passe-t-il si S est un des sommets du triangle $O_1O_2O_3$?

3. Soit UVW un triangle satisfaisant à (I)   Démontrer que les triangles PQR et UVW ont le même centre de gravité qui est aussi le centre de gravité du triangle équilatéral $O_1O_2O_3$.

DEUXIÈME PARTIE

A

Pour cette séquence, l'énoncé décrit entièrement la situation. On se bornera à faire des figures utiles et à justifier les propriétés en italique.

Les données sont :

- deux droites D_1 et D_2 perpendiculaires et sécantes en O ;
- deux nombres réels l, $l > 0$, et α, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

Deux points mobiles A et B se déplacent sur D_1 et D_2 respectivement de façon que $AB = l$. Les points M et N sont définis par : $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AM}$.

Pour les figures, on prendra $l = 1$ et $\alpha = 0{,}2$, l'unité de longueur étant 10 cm.

1. *Le point N décrit le cercle de centre O et de rayon $|\alpha|\, l$ lorsque A se déplace sur D_1.*

2. *Le point M est l'image de N dans l'affinité orthogonale d'axe D_2 et de rapport* $\dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$.

3. *Le point M décrit, pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$, une ellipse d'axes D_1 et D_2.*

   APPLICATION :

   Soit l'ellipse d'équation $9x^2 + y^2 = 36$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Expliquer le tracé de cette ellipse à l'aide d'une bande de papier de longueur 8 cm sur laquelle est marqué un point à la distance 2 cm de l'une des extrémités.

B

Les données sont à présent :

- deux droites D_1 et D_2 perpendiculaires et sécantes en O ;
- deux points A_0 et B_0, distincts de O, appartenant à D_1 et D_2 respectivement.

L'étude de l'ensemble F des antidéplacements f du plan tels que $f(A_0)$ et $f(B_0)$ appartiennent respectivement à D_1 et D_2 est le thème de cette séquence.

1. *a.* Déterminer les symétries orthogonales appartenant à l'ensemble F.

   b. Soit I_0 le milieu du segment A_0B_0. Démontrer que l'ensemble des images I de I_0 par les antidéplacements f est le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle $I_0I_1I_2$, où I_1 et I_2 désignent les symétriques de I_0 par rapport à D_1 et D_2.

   Dans la suite, on note Ω l'ensemble des triplets $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

   - $\alpha + \beta + \gamma = 1$;
   - le barycentre I des points pondérés $(I_1, \alpha), (I_2, \beta) (I_0, \gamma)$, soit : $\overrightarrow{OI} = \alpha\,\overrightarrow{OI_1} + \beta\,\overrightarrow{OI_2} + \gamma\,\overrightarrow{OI_0}$, est situé sur le cercle $\mathscr{C}$.

   On <u>montrera</u> que cette dernière propriété équivaut à :

   $$\alpha\beta + \beta\gamma \sin^2 \widehat{B}_0 + \gamma\alpha \sin^2 \widehat{A}_0 = 0\,,$$

   où $\widehat{A}_0$ et $\widehat{B}_0$ désignent les mesures des angles de sommets A_0 et B_0 du triangle rectangle OA_0B_0.

2. Soit (α, β, γ) un élément de Ω et g l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M_0, associe le point M, barycentre des points pondérés $(M_1, \alpha), (M_2, \beta), (M_3, \gamma)$, où M_1, M_2 et M_3 désignent les symétriques de M_0 par rapport aux droites D_1, D_2 et (A_0B_0) respectivement.

   a. Soit M_0 et N_0 deux points du plan et M, N leurs images par g.

   Démontrer que $\overrightarrow{MN} = \alpha\,\overrightarrow{M_1N_1} + \beta\,\overrightarrow{M_2N_2} + \gamma\,\overrightarrow{M_3N_3}$.

   Calculer MN en fonction de M_0N_0 et en déduire que g est une isométrie.

b. Montrer que les points $A = g(A_0)$ et $B = g(B_0)$ appartiennent respectivement à D_1 et D_2.

c. Soit O_3 le symétrique de O par rapport à la droite (A_0B_0). Montrer que les points $O, O' = g(O)$, $O'_3 = g(O_3)$, $A = g(A_0)$ et $B = g(B_0)$ sont cocycliques. Le plan étant orienté, établir l'égalité d'angles de droites : $(O_3B_0, O_3O) = -(O'_3B, O'_3O')$ et en déduire que g est un antidéplacement.

d. Établir que l'ensemble F des antidéplacements f est égal à l'ensemble G des applications g associées aux éléments de Ω.

3. Soit M_0 un point du plan et f un élément de F.

a. Montrer qu'il existe une unique application affine $\mathscr{A}$ du plan telle que :

$$\mathscr{A}(I_1) = M_1,\ \mathscr{A}(I_2) = M_2,\ \mathscr{A}(I_0) = M_3.$$

Prouver que $M = f(M_0)$ est l'image de $I = f(I_0)$ par cette application affine $\mathscr{A}$ et que, en notant :

$$\mathscr{L}(M_0) = \{f(M_0)\ ;\ f \in F\}, \quad \text{on a} \quad \mathscr{L}(M_0) = \mathscr{A}(\mathscr{C}).$$

b. Démontrer que si M_0 appartient au cercle de diamètre A_0B_0, les trois points M_1, M_2, M_3 sont alignés et que l'ensemble $\mathscr{L}(M_0)$ est un segment de droite.

c. On suppose que M_0 n'appartient pas au cercle de diamètre A_0B_0. La droite (I_0M_0) coupe ce cercle en J_0 et K_0. Indiquer un procédé de construction de $\mathscr{L}(M_0)$ à partir des ensembles $\mathscr{L}(J_0)$ et $\mathscr{L}(K_0)$.

4. Application.

Un triangle ABC mobile se déplace dans le plan de façon que ses sommets A et B se déplacent sur D_1 et D_2. Expliquer comment on peut tracer à l'aide d'une bande de papier l'ensemble décrit par le point C.

TROISIÈME PARTIE

Soit dans le plan orienté un triangle ABC de sens direct. On désigne par $\mathfrak{T}$ l'ensemble des triplets $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. À tout élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathfrak{T}$ on associe l'application h du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point $M' = h(M)$, barycentre du système des points pondérés $(M_1, \alpha), (M_2, \beta), (M_3, \gamma)$, où M_1, M_2, M_3 désignent respectivement les symétriques de M par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB). L'étude des applications h fait l'objet de cette dernière partie.

1. Soit h l'application associée à l'élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathfrak{T}$ et M, N deux points du plan d'images $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$.

a. Démontrer que $\overline{M'N'} = \alpha\,\overline{M_1N_1} + \beta\,\overline{M_2N_2} + \gamma\,\overline{M_3N_3}$.

b. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(B\ ;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_1 = \dfrac{\overline{BC}}{\|\overline{BC}\|}$. On note :

$$\hat{A} = (\overline{AB}, \overline{AC}), \quad \hat{B} = (\overline{BC}, \overline{BA}), \quad \hat{C} = (\overline{CA}, \overline{CB}) \qquad [2\pi].$$

Soit Z, Z_1, Z_2, Z_3 et Z' les affixes respectives des vecteurs $\overline{MN}, \overline{M_1N_1}, \overline{M_2N_2}, \overline{M_3N_3}$ et $\overline{M'N'}$.

Établir les relations, où $\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z :

$$\begin{cases} Z_1 = \overline{Z}\ ; \quad Z_2 = e^{-2i\hat{C}}\,\overline{Z}\ ; \quad Z_3 = e^{2i\hat{B}}\,\overline{Z}. \\ Z' = (\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}})\,\overline{Z}. \end{cases}$$

2. Dans cette dernière question, on s'intéresse à la nature de h suivant le module du complexe $\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}}$.

a. On suppose que l'élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathfrak{T}$ vérifie :

$$\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}} = 0 .$$

Établir l'unicité d'un tel élément t de $\mathfrak{T}$ et montrer plus précisément que α, β et γ sont proportionnels à $\sin 2\hat{A}$, $\sin 2\hat{B}$ et $\sin 2\hat{C}$. Démontrer que l'application h associée à cet élément t est constante et que, pour tout point M, $h(M) = H$ où H désigne l'orthocentre du triangle ABC.

Faire le lien avec la situation décrite dans la première partie lorsque le triangle ABC est le triangle équilatéral $O_1O_2O_3$.

b. On suppose que l'élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathfrak{T}$ vérifie :

$$|\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}}| = 1 .$$

Démontrer que l'application h associée est un antidéplacement et faire la liaison avec la deuxième partie.

c. On suppose à présent que l'élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathfrak{T}$ est tel que :

$$|\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}}| = \rho, \quad \rho \neq 0, \quad \rho \neq 1 .$$

On pose $\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}} = \rho\, e^{i\theta}$.

- Montrer que si un point J est invariant par l'application h associée à t, il vérifie la relation $\alpha\,\overline{JJ_1} + \beta\,\overline{JJ_2} + \gamma\,\overline{JJ_3} = \vec{0}$, où J_1, J_2 et J_3 désignent les symétriques de J par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) respectivement.
- Soit G le barycentre du système des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ). En utilisant l'égalité $\overline{JJ_1} \cdot \overline{BC} = 0$ et deux égalités analogues, démontrer que $\overline{AG} \cdot \overline{J_2J_3} = 0$ et en déduire que G est le centre du cercle circonscrit au triangle $J_1J_2J_3$.

  En admettant la propriété : « les symétriques G_1, G_2, G_3 du point G par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) ne sont pas alignés », montrer que l'application h admet un point invariant unique, le centre J du cercle circonscrit au triangle $G_1G_2G_3$ et qu'elle est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie de centre J et de rapport ρ.

Énoncé de la première composition du CAPES interne 1990

L'objectif du problème est la détermination d'approximations rationnelles de nombres réels, en particulier de e, au moyen de développements en fractions continues.
Les trois premières parties sont largement indépendantes. La partie I propose la construction d'une suite de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, la partie II celle d'une suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction tangente hyperbolique. La partie III introduit la notion de développement en fraction continue et la partie IV propose la recherche de tels développements en utilisant les résultats des parties précédentes.
Dans ce problème, on note (a_n), (u_n), (u_{2n}), etc., des suites de nombres réels indexées par n où n décrit l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.
On peut utiliser, sans en faire la démonstration, le résultat suivant : on détermine une suite (x_n) de nombres réels et une seule par la donnée de ses deux premiers termes x_0 et x_1 et de la relation de récurrence :
$\forall\, n \geq 2,\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + x_{n-2}$ où $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est une suite donnée de nombres réels.

I. APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$ PAR UNE SUITE DE NOMBRES RATIONNELS

A. Construction d'une suite de nombres réels convergeant vers $\sqrt{2}-1$

1. Vérifier que $\sqrt{2}-1$ est solution de l'équation $x = \dfrac{1}{2+x}$.

2. Représenter graphiquement (repère orthonormal, unité 10 cm) la fonction f définie sur le segment $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

3. Vérifier qu'on définit une suite (u_n) de réels appartenant au segment $[0,1]$ par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}.$$

En utilisant le graphique précédent, marquer, sur l'axe des abscisses, les points d'abcisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.

4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| = \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)}\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right|$.

En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| \leq \dfrac{1}{4}\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right|$ puis

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

Conclure.

B. Propriétés de la suite (u_n)

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est un nombre rationnel.

2. Calculer u_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de n.

3. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante. On pourra s'appuyer, pour démontrer ces propriétés, sur le sens de variation de f.

4. Déduire des résultats précédents un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3} de $\sqrt{2}-1$ par des nombres rationnels, puis une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

5. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux et, pour $n = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$.

a. Déterminer p_1, q_1, p_2, q_2.

b. Montrer que, si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même de b et $a+2b$.

c. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = q_n$$
$$q_{n+1} = 2\,q_n + p_n.$$

II. APPROXIMATION DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE PAR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES

On rappelle que, pour tout réel x, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Dans cette partie, on désigne par la même notation un polynôme et la fonction polynôme associée.

A. Étude d'une suite de fonctions

1. Vérifier qu'on définit une suite de fonctions (f_n), continues sur $\mathbb{R}$, par :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \operatorname{sh} x$ et la relation de récurrence
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x -2\,t\,f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

2. Expliciter les fonctions f_1 et f_2.

3. Montrer que la suite (f_n) vérifie la relation :

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4\,x^2 f_{n-2}(x).$$

On pourra, par exemple, caractériser f_n par l'expression de sa dérivée f_n' et la valeur $f_n(0)$.

4. a. Montrer que, si P et Q sont deux polynômes tels que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x)\operatorname{sh} x - P(x)\operatorname{ch} x = 0$, alors les polynômes P et Q sont nuls.
On pourra étudier le comportement de $Q(x)\operatorname{sh} x - P(x)\operatorname{ch} x$ quand x tend vers $+\infty$.

b. Montrer l'existence et l'unicité de deux suites de polynômes (P_n) et (Q_n) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = Q_n(x)\operatorname{sh} x - P_n(x)\operatorname{ch} x.$$

c. Déterminer P_0, Q_0, P_1, Q_1 et montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = 2\,(2n-1)P_{n-1}(x) + 4x^2 P_{n-2}(x)$$
$$Q_n(x) = 2(2n-1)Q_{n-1}(x) + 4x^2 Q_{n-2}(x).$$

d. Montrer que les coefficients des polynômes P_n et Q_n sont des entiers naturels, que les polynômes P_n sont impairs et les polynômes Q_n pairs.

e. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ Q_n(x) \geq Q_n(0)$ et que $Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

B. Suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction tangente hyperbolique

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x)| \leq \dfrac{x^{2n}}{n!}\operatorname{sh} x.$

2. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{P_n(x)}{Q_n x)}\right| \leq \frac{x^{2n}}{n!} \times \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \times \frac{1}{Q_n(x)} \quad \text{puis que} \quad \left|\operatorname{th} x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3. Montrer que, pour tout réel x, la suite $\left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right)$ converge vers $\operatorname{th} x$ et que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

III. DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES

Dans la suite du problème, pour tout réel x, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
Soit α un réel positif, il s'écrit $\alpha = E(\alpha) + \omega$ où ω appartient à l'intervalle $[0,1[$. On pose $a_0 = E(\alpha)$.
Si ω est non nul, on peut écrire $\frac{1}{\omega} = E\left(\frac{1}{\omega}\right) + \omega_1$ et on a :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \omega_1} \text{ en posant } a_1 = E\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Si $\omega_1 = 0$, $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1}$ est rationnel.
Si ω_1 est non nul, on peut poursuivre le processus et poser $\frac{1}{\omega_1} = E\left(\frac{1}{\omega_1}\right) + \omega_2$. On a donc :

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \omega_2}} \text{ en posant } a_2 = E\left(\frac{1}{\omega_1}\right).$$

On constate que $\omega_1 = \frac{1}{\omega} - E\left(\frac{1}{\omega}\right)$, $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1} - E\left(\frac{1}{\omega_1}\right)$, ce qui suggère l'introduction de l'application T définie sur l'intervalle $[0,1[$ par $T(0) = 0$ et, $\forall x \in]0,1[$, $T(x) = \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exemple :
– Calculer $T(\sqrt{2}-1)$.
– Pour $\alpha = \sqrt{2}$, déterminer a_0, a_1, a_2 et ω_2.

A. Suite d'entiers associée à un nombre irrationnel positif

1. Montrer que, $\forall x \in [0,1[$, $\quad T(x) \in [0,1[$ et que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1.$$

On définit $T^0 = \mathrm{id}$ où id désigne l'application identique de l'intervalle $[0,1[$ dans lui-même puis, par récurrence, pour tout entier naturel n, $T^{n+1} = T_\circ T^n$.

2. Soit ω un réel strictement compris entre 0 et 1.
On se propose de démontrer que ω est rationnel si et seulement si $T^n(\omega)$ est nul à partir d'un certain rang.

a. Montrer que $T(\omega)$ est rationnel si et seulement si ω est rationnel.
En déduire que, si ω est irrationnel, pour tout entier naturel n, $T^n(\omega)$ est différent de 0.

b. Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$. Montrer que $T\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{r}{p}$ où r est le reste de la division euclidienne de q par p.
En déduire que, si ω est rationnel, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $T_0^{n-1}(\omega)$ soit non nul et que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $T^n(\omega) = 0$.

3. α étant un nombre irrationnel positif, on considère $\omega = \alpha - E(\alpha)$.
Vérifier qu'on définit une suite d'entiers naturels (a_n), strictement positifs sauf peut-être a_0, en posant :

$$a_0 = E(\alpha) \quad \text{et,} \quad \forall n \geq 1, \quad a_n = E\left(\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right).$$

B. Développement en fraction continue

En se plaçant dans l'hypothèse et avec les notations du A.3, on considère la suite de fonctions (φ_n), définies sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi_0(x) = a_0 + x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{n+1}(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{a_{n+1} + x}\right).$$

Enfin on pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \varphi_n(0)$, associant ainsi au réel α une nouvelle suite numérique, la suite (r_n).
On a donc $r_0 = a_0$, $r_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$, $r_2 = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}}$ etc.
Remarquant que r_n ne dépend que de la suite finie $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, on note $r_1 = [a_0,\ a_1]$, $r_2 = [a_0, a_1, a_2]$, $r_n = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$.
L'objectif de cette partie est de démontrer la convergence de la suite (r_n) vers α.

1. *Convergence des suites* (r_{2n}) *et* (r_{2n+1})

a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha = \varphi_n(T^n(\omega))$.

b. Montrer que les fonctions φ_n sont strictement monotones, décroissantes si n est impair, croissantes si n est pair.

c. Déduire des questions précédentes que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{2n} < \alpha < r_{2n+1}$.

d. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+2} - r_n = \varphi_n\left(\dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_{n+2}}\right) - \varphi_n(0)$.
En déduire que la suite (r_{2n}) est croissante et la suite (r_{2n+1}) décroissante.

e. Montrer que chacune des suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) est convergente.

2. *Expression de* r_n *sous forme de fraction irréductible*

a. Montrer que, $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n(x) = \dfrac{p_n + x\, p_{n-1}}{q_n + x\, q_{n-1}}$ où (p_n) et (q_n) sont deux suites d'entiers naturels définies par $p_0 = a_0$, $p_1 = 1 + a_0 a_1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ et

$$\forall n \geq 2, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

En déduire que $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

b. *Propriétés des suites (p_n) et (q_n)*

Montrer que :
i. Les suites (p_n) et (q_n) sont croissantes.
ii. $\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+2} \geq 2\,q_n$.
iii. $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n q_{n+1} = p_{n+1} q_n = (-1)^{n+1}$.
iiii. $\forall n \geq 1,\ p_n$ et q_n sont premiers entre eux.

3. *Convergence de la suite (r_n)*

a. En remarquant que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$,

montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$ et $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \dfrac{1}{2^n}$.
En déduire que la suite (r_n) converge vers α.
On dit qu'on a effectué le développement en fraction continue de α et on écrit :

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots].$$

r_n est nommé développement en fraction continue d'ordre n de α.

c. En remarquant que $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \dfrac{p_n}{q_n}\right|$,

montrer que $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha\right|$.

d. i) Soient a, b, c, d, p, q six nombres entiers naturels tels que

$$bc - ad = 1 \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}.$$

Montrer que $p > a, \quad p > c, \quad q > b, \quad q > d$.

ii) En déduire que, si le nombre rationnel positif $\dfrac{p}{q}$ est une meilleure approximation de α que $\dfrac{p_n}{q_n}$, alors $p > p_n$ et $q > q_n$.

4. Exemple : développement en fraction continue de $\sqrt{2}$. Les notations sont celles de la partie I.

a. Vérifier que les suites (p_n) et (q_n) introduites au I sont caractérisées par :

$$p_0 = 0,\ p_1 = 1,\ q_0 = 1,\ q_1 = 2$$

et $$\forall n \geq 2,\ p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}.$$

b. En utilisant le calcul de $T(\sqrt{2} - 1)$ donner le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

5. Cas d'un nombre rationnel.

Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que α est un nombre rationnel, strictement positif, non entier.

On pose à nouveau $a_0 = E(\alpha)$ et $\omega = \alpha - E(\alpha)$. On sait (**III.A.2.**) qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $T^{n_0-1}(\omega) \neq 0$ et $\forall n \geq n_0$, $T^n(\omega) = 0$.

On pose, pour $1 \leq n \leq n_0$, $a_n = E\left(\dfrac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right)$.

a. Montrer que $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}]$ (notation du **III.B.**).

On dit qu'on a un développement en fraction continue fini de α.

On pourra adapter à cette situation l'étude faite dans le cas où α est irrationnel.

α étant écrit sous forme fractionnaire $\dfrac{p}{q}$, vérifier que a_0, $a_1, \ldots,$ a_{n_0} sont obtenus à partir de l'algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand commun diviseur de p et q et qu'on a $a_{n_0} \geq 2$.

b. Dans chacun des deux cas $\alpha = \dfrac{193}{71}$ et $\alpha = \dfrac{2\,721}{1\,001}$, expliciter $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}$.

• Soit (a_n) une suite d'entiers naturels, strictement positifs sauf peut-être a_0. On lui associe la suite (r_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ (voir **III.B.**).

On pourrait, en introduisant les suites (p_n) et (q_n) définies à partir de la suite (a_n) comme au **III.B.2**, ainsi que la suite de fonctions (φ_n), démontrer que la suite (r_n) est convergente et que sa limite α a pour développement en fraction continue $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, mais nous admettrons tout ceci dans la fin de ce problème.

IV. DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE e

Les notations sont celles de la partie II

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $q_n = Q_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On sait (*cf.* II) que la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ a pour limite $\text{th}\dfrac{1}{2}$.

1. Développement en fraction continue de $\text{th}\dfrac{1}{2}$.

a. Vérifier que les suites (p_n) et (q_n) sont caractérisées par les conditions : $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = 2$ et $\forall n \geq 2$, $p_n = 2(2n-1)p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = 2(2n-1)q_{n-1} + q_{n-2}$.

b. En déduire que le développement en fraction continue de $\text{th}\dfrac{1}{2}$ est :

$$\text{th}\frac{1}{2} = [0,\ 2,\ 6,\ 10,\ \ldots,\ 2(2n-1), \ldots].$$

2. Développement en fraction continue de e.

a. Montrer que $e = \dfrac{1 + \text{th}\dfrac{1}{2}}{1 - \text{th}\dfrac{1}{2}}$.

b. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}, q_n > p_n$.

c. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{q_n + p_n}{q_n - p_n}\right)$ a pour limite e et plus précisément que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{q_{2n} + p_{2n}}{q_{2n} - p_{2n}} < e < \frac{q_{2n+1} + p_{2n+1}}{q_{2n+1} - p_{2n+1}}.$$

d. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q_n + p_n, \ v_n = q_n - p_n$.
Montrer que, $\forall n \geq 2, \ u_n = 2(2n-1)\ u_{n-1} + u_{n-2}$

$$v_n = 2(2n-1)v_{n-1} + v_{n-2}.$$

Calculer u_n et v_n pour $n = 0$ et $n = 1$.
Dire pourquoi $\dfrac{u_n}{v_n}$ ne peut être le développement en fraction continue d'ordre n de e.

e. Calculer u_n et v_n pour les valeurs 2, 3, 4 de n.
L'expression des développements en fractions continues de $\dfrac{193}{71}$ et de $\dfrac{2\,721}{1\,001}$ suggère d'introduire $\alpha = [2,\, c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n,\, \ldots]$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{3n+1} = c_{3n+3} = 1, \quad c_{3n+2} = 2n + 2.$$

On note $\dfrac{y_n}{z_n}$ la forme irréductible du développement en fraction continue d'ordre n de α.

e. i) Montrer que, $\forall n \geq 3$

$$\begin{cases} y_{3n-2} = 2(2n-1)y_{3n-5} + y_{3n-8} \\ z_{3n-2} = 2(2n-1)z_{3n-5} + z_{3n-8}. \end{cases}$$

On pourra utiliser la relation de récurrence vérifiée par les suites (y_k) et (z_k) pour les valeurs de k :

$$3n-2,\ 3n-3,\ 3n-4,\ 3n-5,\ 3n-6.$$

e. ii) Montrer qu'on a, $\forall n \geq 1$, $u_n = y_{3n-2}$, $v_n = z_{3n-2}$.

f. Déduire des résultats précédents que :

$$e = [2,\, 1,\, 2,\, 1,\, 1,\, 4,\, 1, \ldots, c_n, \ldots].$$

g. *Application numérique*

Munir la calculatrice d'un programme permettant d'obtenir, à partir de la suite (c_n), les suites (y_n) et (z_n). Compte tenu de la capacité de la machine, indiquer le plus grand entier n_1 pour lequel les valeurs affichées de y_{n_1} et z_{n_1} sont exactes.
Préciser le sens de l'erreur commise et un majorant de cette erreur si on prend $\dfrac{y_{n_1}}{z_{n_1}}$ comme approximation de e.

Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

Cl. Piquet
04.12.99

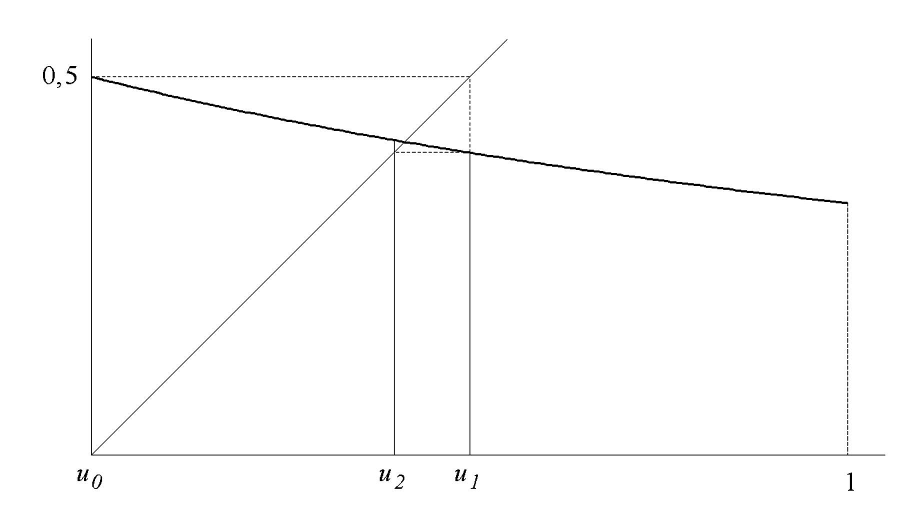
CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1990

I. Approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels

A.

1. On pose $x = \sqrt{2} - 1$; alors $\sqrt{2} + 1 = x + 2$, d'où $x(x+2) = 1$.

2.



3. On a $u_0 \in [0,1]$ et $f([0,1]) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] \subset [0,1]$; cette inclusion montre, par récurrence, que la suite (u_n) appartient à l'intervalle $[0,1]$ (et même à $]0,1[$ dès que $n \geq 1$).

4. On pose $\omega = \sqrt{2} - 1$; alors $u_{n+1} - \omega = f(u_n) - f(\omega) = \dfrac{1}{2+u_n} - \dfrac{1}{2+\omega}$, d'où

$$|u_{n+1} - \omega| = \frac{|u_n - \omega|}{(2+u_n)(2+\omega)}\,.$$

Comme ω et u_n sont positifs, on obtient $|u_{n+1} - \omega| \leq \frac{1}{4}|u_n - \omega|$, d'où $|u_n - \omega| \leq \dfrac{1}{4^n}|u_0 - \omega| \leq \dfrac{1}{4^n}\,.$
Il en résulte que la suite (u_n) converge vers $\omega = \sqrt{2} - 1$, la convergence étant assez rapide.

B.

1. $\mathbb{Q}$ étant un corps et f une fraction rationnelle, $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, donc

$$f(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \subset \mathbb{Q} \cap f([0,1]) \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]\,.$$

Une récurrence immédiate montre que (u_n) est une suite de rationnels.

2. On obtient facilement $u_1 = \dfrac{1}{2}, u_2 = \dfrac{2}{5}, u_3 = \dfrac{5}{12}, u_4 = \dfrac{12}{29}$ et $u_5 = \dfrac{29}{70}\,.$

3. f étant strictement décroissante, $f \circ f$ est strictement croissante. Comme $u_2 > u_0$, la suite $(u_{2n})_n$ est strictement croissante (l'inégalité précédente est conservée par $f \circ f$ et se propage par récurrence à tous les indices pairs). De même, le fait que $u_1 > u_3$ implique que la suite $(u_{2n+1})_n$ est strictement décroissante.

4. On a donc $u_4 < \omega < u_5$ et $u_5 - u_4 = \dfrac{29}{70} - \dfrac{12}{29} = \dfrac{1}{2030} < 10^{-3}$. Il vient alors

$$1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29} < \sqrt{2} < 1 + \frac{29}{70} = \frac{99}{70},$$

soit $1,413\,79 < \sqrt{2} < 1,414\,29$ d'où la valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = 1,414 \pm 10^{-3}$.

5.a. On a immédiatement $p_1 = 1$, $q_1 = 2$; $p_2 = 2$, $q_2 = 5$.

5.b. Si n divise b et $a + 2b$, n divise b et $(a + 2b) - 2b = a$, donc $n = 1$.

5.c. La relation $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{q_n}{p_n + 2q_n}$ et le fait que q_n et p_n sont premiers entre eux montrent que $p_{n+1} = q_n$ et $q_{n+1} = p_n + 2q_n$ (on utilise l'unicité de l'écriture sous forme irréductible d'un nombre rationnel, q_n et $p_n + 2q_n$ étant premiers entre eux d'après la question précédente).

II. Approximation de la fonction tangente hyperbolique par une suite de fonctions rationnelles

A.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$; il en va de même de la fonction $t \mapsto -2t \operatorname{sh} t$ qui est donc intégrable sur $[0, x]$. Il résulte du théorème fondamental du calcul intégral que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. Si l'on suppose f_n continue sur $\mathbb{R}$, le même raisonnement montre que f_{n+1} est continue sur $\mathbb{R}$, d'où, par récurrence, la continuité de f_n sur $\mathbb{R}$, pour tout entier n.

2. On a

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= -2\int_0^x t \operatorname{sh} t\, dt = \big[-2t \operatorname{ch} t\big]_0^x + 2\int_0^x \operatorname{ch} t\, dt = -2x \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x,\\
f_2(x) &= \int_0^x 4t^2 \operatorname{ch} t\, dt - 4\int_0^x t \operatorname{sh} t\, dt = 4x^2 \operatorname{sh} x - 12\int_0^x t \operatorname{sh} t\, dt\\
&= 4x^2 \operatorname{sh} x + 6 f_1(x) \quad \text{d'où } f_2(x) = 4x^2 \operatorname{sh} x - 12x \operatorname{ch} x + 12 \operatorname{sh} x.
\end{aligned}$$

3. La relation précédente montre que l'égalité de l'énoncé est vérifiée pour $n = 2$; on la suppose vérifiée pour un entier $n \geq 2$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \int_0^x -2t\Big(2(2n-1) f_{n-1}(t) + 4t^2 f_{n-2}(t)\Big)\, dt\\
&= 2(2n-1)\big[f_n(t)\big]_0^x + \big[4t^2 f_{n-1}(t)\big]_0^x - 8\int_0^x t f_{n-1}(t)\, dt\\
&= 2(2n-1) f_n(x) + 4x^2 f_{n-1}(x) + 4 f_n(x)\\
&= 2(2n+1) f_n(x) + 4x^2 f_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la relation cherchée, à l'ordre $n + 1$. Ceci démontre, par récurrence, la relation A.3. pour tout entier $n \geq 2$.

4.a. On suppose que $Q(x) \operatorname{sh} x - P(x) \operatorname{ch} x = 0$ ou encore $e^x\big(Q(x) - P(x)\big) = e^{-x}\big(Q(x) + P(x)\big)$. Le membre de droite de l'égalité précédente tend vers 0 quand $x \to +\infty$; il en va donc de même

du membre de gauche, donc $Q - P = 0$, car le produit d'un polynôme non nul par e^x tend vers $+$ ou $-\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc $Q = P$, d'où $Q(x)e^{-x} = 0$ et $Q = P = 0$ en multipliant par e^x.

4.b. & c. L'unicité résulte du a. Si les deux suites proposées existent, on a nécessairement, d'après la question A.3.,

$$\begin{aligned} Q_n \operatorname{sh} x - P_n \operatorname{ch} x = {} & 2(2n-1)\big(Q_{n-1} \operatorname{sh} x - P_{n-1} \operatorname{ch} x\big) \\ & + 4x^2\big(Q_{n-2} \operatorname{sh} x - P_{n-2} \operatorname{ch} x\big) \end{aligned}$$

d'où, par le résultat obtenu en a.,

$$Q_n = 2(2n-1)Q_{n-1} + 4x^2 Q_{n-2} \qquad P_n = 2(2n-1)P_{n-1} + 4x^2 P_{n-2}\,.$$

Ces relations de récurrence démontrent l'existence des suites cherchées à partir du moment où l'existence des polynômes Q_0, Q_1, P_0 et P_1 est établie. Il est manifeste en effet que Q_n (*resp.* P_n) est un polynôme si Q_{n-1} et Q_{n-2} (*resp.* P_{n-1} et P_{n-2}) le sont. On a immédiatement $Q_0(x) = 1$, $P_0(x) = 0$, $Q_1(x) = 2$ et $P_1(x) = 2x$. On a donc démontré l'existence et l'unicité des deux suites cherchées.

4.d. Q_0 et Q_1 sont pairs et à coefficients dans $\mathbb{N}$; il en résulte, par une récurrence immédiate, qu'il en va de même pour tous les polynômes Q_n (en effet, les relations de récurrence du 4.c. montrent à l'évidence que si Q_{n-1} et Q_{n-2} sont à coefficients dans $\mathbb{N}$, il en va de même de Q_n et $x^2 Q_{n-2}$ ayant la même parité que Q_{n-2}, Q_n est aussi pair). De même, les polynômes P_n sont à coefficients dans $\mathbb{N}$ et impairs.

4.e. On vérifie immédiatement que la relation $Q_n(x) \geq Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$ est satisfaite pour $n = 0$ et 1. On la suppose vraie jusqu'à l'ordre $n-1$. L'égalité $Q_n(0) = 2(2n-1)Q_{n-1}(0)$ donne alors $Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$, puis on a

$$Q_n(x) \geq 2(2n-1)Q_{n-1}(x) + 4x^2 Q_{n-2}(0) \geq 2(2n-1)Q_{n-1}(0) = Q_n(0),$$

car $Q_{n-2}(x) \geq Q_{n-2}(0) > 0$ par hypothèse de récurrence au rang $n-2$, d'où le résultat au rang n.

B.

1. La majoration demandée est évidente si $n = 0$. On la suppose vraie pour un entier $n \geq 1$; alors

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_0^{|x|} 2\frac{t^{2n+1}}{n!} \operatorname{sh} t\, dt \leq 2\frac{\operatorname{sh}|x|}{n!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!} \operatorname{sh}|x|,$$

ce qui démontre, par récurrence, la relation proposée.

2. On a donc $\left|\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| = \left|\dfrac{f_n(x)}{\operatorname{ch} x Q_n(x)}\right| \leq \dfrac{x^{2n}}{n!} \operatorname{th}|x| \dfrac{1}{Q_n(x)}\cdot$ La minoration de la question (II.A.4.e) donne alors $\left|\operatorname{th} x - \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leq \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, (car $\operatorname{th}|x| \leq 1$).

3. Soit A un réel positif ; si x réel appartient à $[-A, +A]$, on a la majoration

$$\left|\operatorname{th} x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leq \frac{A^{2n}}{(2n)!}\cdot$$

On note γ_n cette dernière quantité et l'on observe que $\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \dfrac{A^2}{(2n+1)(2n+2)}$, expression qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ceci montre que la suite (γ_n) converge vers 0 (γ_n est majoré

par une suite géométrique convergente), donc que la suite $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right)_n$ converge uniformément sur le segment $[-A,+A]$ vers $\operatorname{th} x$; le réel $A>0$ étant quelconque, on a établi la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ de la suite $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right)_n$ vers $\operatorname{th} x$, donc aussi sa convergence simple sur tout $\mathbb{R}$ (tout point de $\mathbb{R}$ est contenu dans un segment de $\mathbb{R}$).

III. Développements en fractions continues

On a facilement $T(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$; donc $a_0=1$ et $\omega=\sqrt{2}-1$, d'où $\omega_1=T(\omega)=\omega$ donc $\omega_2=\omega=\sqrt{2}-1$ et $a_1=2$, $a_2=2$.

A.

1. Par définition de T, $T(0)=0$ et si $0<x<1$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq\dfrac{1}{x}<\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)+1$, donc $0\leq T(x)<1$. Enfin, l'inégalité $\dfrac{1}{x}>1$ donne $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq 1$.

2.a. Si $\omega\in\mathbb{Q}$, il est clair que $T(\omega)\in\mathbb{Q}$, (même si $\omega=0$). Inversement, si $T(\omega)\in\mathbb{Q}$, $\dfrac{1}{\omega}\in\mathbb{Q}$ car $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\omega}\right)$ est dans $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$. Si ω est irrationnel, $T(\omega)$ est lui aussi irrationnel, donc aussi $T^n(\omega)$ pour tout entier $n\geq 0$. En particulier, $T^n(\omega)$ est non nul pour tout entier naturel n.

2.b. On divise q par p : $q=np+r$ où $0\leq r<p$. On a donc $\dfrac{q}{p}=n+\dfrac{r}{p}$ et $0\leq\dfrac{r}{p}<1$, donc $\mathrm{E}\left(\dfrac{q}{p}\right)=n$ et $T(\dfrac{p}{q})=\dfrac{r}{p}\cdot$ Si ω est rationnel, on peut l'écrire sous forme irréductible $\omega=\dfrac{p}{q}$, auquel cas $T(\omega)=\dfrac{r}{p}$, avec $r<p$, sauf si $p=0$, auquel cas $r=0$. Donc $T^2(\omega)=T(\dfrac{r}{p})=\dfrac{r_1}{r}$ où $r_1<r$. On a, de proche en proche, $T^{n+1}(\omega)=\dfrac{r_n}{r_{n-1}}$ $(n\geq 1)$ où la suite (r_n) d'entiers est *strictement* décroissante et positive tant que r_n est non nul. Cette suite est donc identiquement nulle à partir d'un certain rang n_0 : si ω est rationnel positif, il existe un rang $n_0\geq 1$ tel que $T^n(\omega)=0$ si $n\geq n_0$ et $T^n(\omega)\neq 0$ sinon.

3. On a $0<\omega<1$ et ω irrationnel, donc $T^{n-1}(\omega)\in]0,1[$ pour tout $n\geq 1$, d'où $a_n\geq 1>0$.

B.

1.a. On a $\varphi_n\big(T^n(\omega)\big)=\varphi_{n-1}\left(\dfrac{1}{a_n+T^n(\omega)}\right)$; mais $T^n(w)=T\big(T^{n-1}(\omega)\big)$, donc

$$a_n+T^n(\omega)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right)+\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}-\mathrm{E}\left(\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right)=\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}$$

d'où l'égalité $\varphi_n\big(T^n(\omega)\big)=\varphi_{n-1}\big(T^{n-1}(\omega)\big)$ qui donne

$$\varphi_n\big(T^n(\omega)\big)=\varphi_0\big(T^0(\omega)\big)=a_0+\omega=\alpha\,.$$

1.b. φ_{n+1} est la composée de φ_n et d'une fonction visiblement strictement décroissante ; si donc φ_n est strictement monotone, il en va de même de φ_{n+1}, les sens de variation de ces deux fonctions étant opposés. Comme φ_0 est strictement croissante, les fonctions φ_{2n} sont aussi strictement croissantes tandis que les fonctions φ_{2n+1} sont strictement décroissantes.

1.c. On a donc $r_{2n}=\varphi_{2n}(0)$; comme $T^{2n}(\omega)$ est strictement positif et que φ_{2n} est strictement croissante, on $r_{2n}<\varphi_{2n}\big(T^{2n}(\omega)\big)=\alpha$. De même, on a $\alpha=\varphi_{2n+1}\big(T^{2n+1}(\omega)\big)<\varphi_{2n+1}(0)=r_{2n+1}$ d'où l'encadrement demandé.

1.d. L'égalité

$$r_{n+2} - r_n = \varphi_{n+1}\Big(\frac{1}{a_{n+2}}\Big) - \varphi_n(0) = \varphi_n\Bigg(\frac{1}{a_{n+1} + \dfrac{1}{a_{n+2}}}\Bigg) - \varphi_n(0)$$

montre que si n est pair, $r_{n+2} - r_n > 0$ tandis que $r_{n+2} - r_n < 0$ si n est impair (on utilise le fait que φ_n est monotone). Les suites $(r_{2n})_n$ et $(r_{2n+1})_n$ sont donc respectivement strictement croissante et décroissante.

1.e. La suite $(r_{2n})_n$ est croissante et majorée par α donc convergente ; de même $(r_{2n+1})_n$ est décroissante et minorée par α donc convergente.

2.a. Par définition de φ_0, on a nécessairement $p_0 = a_0$, $p_1 = 1 + a_0 a_1$, $q_1 = a_1$ si l'on impose $q_0 = 1$. On vérifie alors facilement par récurrence que si $\varphi_n(x) = \dfrac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}$, et que si l'on définit p_{n+1} et q_{n+1} par les égalités $p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$ et $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$, alors φ_{n+1} est bien de la forme recherchée. Il en résulte que $r_n = \varphi_n(0) = \dfrac{p_n}{q_n}$ ·

2.b.i. Pour tout entier $n \geq 1$, les entiers a_n sont tous minorés par 1 ainsi que les entiers p_n et q_n. Les relations de récurrence définissant les suites (p_n) et (q_n) donnent alors immédiatement : $p_{n+1} > p_n$ et $q_{n+1} > q_n$. Les suites (p_n) et (q_n) sont strictement croissantes.

2.b.ii. On a $q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1} \geq 2q_{n-1}$.

2.b.iii. L'égalité $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = -(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$ donne

$$p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n(p_1 q_0 - q_0 p_1) = (-1)^{n+1}\,.$$

2.b.iv. La relation précédente montre que tout diviseur commun à p_n et q_n divise 1 : p_n et q_n sont premiers entre eux ($n \geq 1$).

3.a. Il résulte des questions 2.b.ii. & iii. que

$$\Big|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\Big| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{2q_n q_{n-1}} \leq 2^{-n}\frac{1}{q_1 q_0} \leq 2^{-n}\,.$$

Ceci montre que la série $\sum\Big(\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\Big)$ converge absolument, donc converge, si bien que la suite $(r_n) = \big(\dfrac{p_n}{q_n}\big)$ des sommes partielles converge.

3.b. On a vu en (1.c.) que $r_{2n} < r_{2n+2} < \alpha < r_{2n+1}$; il en résulte que

$$|\alpha - r_{2n}| < |r_{2n} - r_{2n+1}| = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} \leq 2^{-2n} \quad \text{et que}$$

$$|\alpha - r_{2n+1}| < |r_{2n+2} - r_{2n+1}| = \frac{1}{q_{2n+2}q_{2n+1}} \leq 2^{-(2n+1)}\,.$$

On a donc, pour tout entier $n > 0$, $|r_n - \alpha| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} < 2^{-n}$, ce qui démontre la convergence vers α de la suite (r_n).

3.c. Le 2.b.ii. donne la minoration $q_n q_{n+1} \geq 2q_{n-1}q_n$ d'où l'on tire

$$2|r_n - \alpha| < 2|r_n - r_{n+1}| = \frac{2}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n q_{n-1}} = |r_{n-1} - r_n| < |r_{n-1} - \alpha| + |r_n - \alpha|$$

qui donne le résultat demandé.

3.d.i. On a $pb - aq > 0$ donc $pb - aq \geq 1$, puisqu'il s'agit d'entiers. De même $qc - pd \geq 1$. Tenant compte de $bc - ad = 1$, on obtient $c(pb - aq) + a(qc - pd) \geq a + c$ donc $p \geq a + c$; de même $q \geq b + d$. Comme a, b, c et d sont strictement positifs, on a nécessairement les inégalités strictes $p > a$, $p > c$, $q > b$ et $q > d$.

3.d.ii. On suppose que $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right|$ et que n est pair, pour fixer les idées. Il en résulte que $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{p_n}{q_n} - \alpha < \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ donc que $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_n}{q_n} \cdot$ La question précédente donne le résultat demandé : $p > p_n$ et $q > q_n$.

4.a. On a obtenu en I.B.5. les valeurs de p_i et q_i pour $i = 0$ et 1 et le (c.) de cette question donne immédiatement les deux relations indiquées. Inversement, la relation $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ et la relation analogue vérifiée par la suite (q_n) impliquent que les suites $(p_{n+1} - q_n)_n$ et $(q_{n+1} - 2q_n - p_n)_n$ vérifient toutes deux cette même relation (linéaire). Mais ces deux nouvelles suites ont toutes deux leurs termes d'ordre 0 et 1 nuls ; elles sont donc identiquement nulles (Cf. rappel fait en début d'énoncé). Les suites définies en I.B.5. sont caractérisées par les relations de récurrence et les conditions initiales de la présente question (III.B.4)

4.b. On a vu (Préliminaires du III) que $T(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1$, que $a_0 = 1$ et que $a_n = 2$ si $n > 0$. On a donc $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$.

5.a. On sait qu'il existe un premier indice n_0 à partir duquel $T^n(\omega) = 0$. Ceci implique $\alpha = \varphi_{n_0}(0) = r_{n_0} = [a_0, a_1, \ldots a_{n_0}]$. Si l'on écrit α sous forme irréductible $\frac{p}{q}$ et si l'on divise p par q, on a $p = a_0 q + r_1$ où $r_1 \in [0, q[$; il en résulte que $\alpha - a_0 = r_1/q \in [0, 1[\cap\mathbb{Q}$ et que a_0 est bien la partie entière de α. Alors $a_1 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha - a_0}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{q}{r_1}\right)$ = quotient de la division euclidienne de q par r_1 et ainsi de suite. La succession des (a_n) non nuls $(n < n_0)$ est donc la succession des quotients successifs dans la recherche du p.g.c.d des entiers p et q. Comme $r_{n_0} < r_{n_0-1}$ et que a_{n_0} est le quotient exact de r_{n_0-1} par r_{n_0} (puisque $T^{n_0}(\omega) = 0$), on voit que $a_{n_0} > 1$, donc que $a_{n_0} \geq 2$.

5.b. La suite des divisions euclidiennes donne respectivement :

$$\frac{193}{71} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 2] \qquad \text{et} \qquad \frac{2721}{1001} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 2]$$

IV. Développement en fraction continue de e

1.a. Résulte immédiatement du II.A.4.c., des expressions obtenues pour les premiers polynômes $Q_0 = 1$, $P_0 = 0$, $Q_1 = 2$ et $P_2 = 2x$ et de l'unicité des deux suites (p_n) et (q_n).

1.b. On a donc $a_0 = 0$ et $a_n = 2(2n - 1)$ si $n \geq 1$, d'où le développement recherché

$$\mathrm{th}\,\frac{1}{2} = [0, 2, 6, 10, \ldots, 2(2n - 1), \ldots].$$

2.a. Résulte immédiatement de la définition de $\mathrm{th}\,\frac{1}{2} \cdot$

2.b. L'inégalité $q_n > p_n$ est vérifiée pour $n = 0$ et 1 et se transmet (par récurrence) aux indices supérieurs car les coefficients $2(2n - 1)$ et 1 de la relation de récurrence sont strictement positifs pour $n \geq 2$.

2.c. On note que $\left(\dfrac{q_n+p_n}{q_n-p_n}\right) = \left(\dfrac{1+\dfrac{P_n(\frac12)}{Q_n(\frac12)}}{1-\dfrac{P_n(\frac12)}{Q_n(\frac12)}}\right)$; d'après la partie II, cette suite converge vers $\dfrac{1+\operatorname{th}\frac12}{1-\operatorname{th}\frac12}$, c'est-à-dire e, d'après le 2.a. Il résulte aussi de la question III.B.1.c., de l'encadrement $r_{2n} < \operatorname{th}\frac12 < r_{2n+1}$ et de la croissance stricte de $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$, que

$$\left(\frac{q_{2n}+p_{2n}}{q_{2n}-p_{2n}}\right) < e < \left(\frac{q_{2n+1}+p_{2n+1}}{q_{2n+1}-p_{2n+1}}\right).$$

2.d. Les suites (u_n) et (v_n) vérifient évidemment les mêmes relations de récurrence (linéaires) que les suite (p_n) et (q_n). On obtient tout de suite $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $v_1 = 1$ d'où $|u_0v_1 - u_1v_0| \neq 1$: on voit que $\dfrac{u_n}{v_n}$ ne peut être le développement en fraction continue d'ordre n de e, car la condition du III-B-2-b-iii n'est pas satisfaite.

2.e. On trouve $u_2 = 19$, $v_2 = 7$; $u_3 = 193$, $v_3 = 71$; $u_4 = 2\,721$ et $v_4 = 1\,001$.

On note α le nombre réel dont le développement en fraction continue est

$$[2,\, 1,\, 2,\, 1,\, 1,\, 4,\, 1,\, \ldots,\, 1,\, 2n+2,\, 1,\, \ldots]$$

et $\dfrac{y_n}{z_n}$ la forme irréductible de son développement à l'ordre n.

2.e.i. On sait qu'alors $y_n = c_n y_{n-1} + y_{n-2}$; on en tire les égalités

$$\begin{aligned} y_{3n-2} - 2(2n-1)y_{3n-5} - y_{3n-8} &= y_{3n-3} + y_{3n-4} - 2(2n-1)y_{3n-5} + y_{3n-7} - y_{3n-6} \\ &= 2y_{3n-4} + 2y_{3n-5} - 2(2n-1)y_{3n-5} - 2y_{3n-6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On obtient évidemment la même relation pour la suite (z_n).

2.e.ii. Les deux suites (u_n) et (y_n) vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 ; de plus, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ d'où $u_2 = 19$ tandis que $\dfrac{y_1}{z_1} = 2 + \dfrac11 = \dfrac31$ ce qui donne $y_1 = 3 = u_1$. On a aussi $\dfrac{y_4}{z_4} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = \dfrac{19}{7}$ donc $y_4 = 19 = u_2$ si bien que $u_n = y_{3n-2}$ pour tout entier $n \geq 1$.

De même, $v_n = z_{3n-2}$ $(n \geq 1)$.

2.f. On a vu en 1.c. que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est convergente et de limite e. Il en résulte que la sous-suite $\left(\dfrac{y_{3n-2}}{z_{3n-2}}\right)_n$ de la suite $\left(\dfrac{y_n}{z_n}\right)_n$ est convergente et de limite e. Or la suite $\left(\dfrac{y_n}{z_n}\right)_n$ est convergente et de limite α (puisqu'elle est associée au développement en fraction continue de α). Il en résulte que $\alpha = e$ d'où $e = [2,\, 1,\, 2,\, 1,\, 1,\, 4,\, 1,\, 1,\, \ldots,\, c_n,\, \ldots]$.

2.g. Si l'on accepte d'introduire "à la main" la suite des valeurs c_n, le programme est simple à écrire ; il nécessite cinq mémoires (deux pour le calcul des y_n et deux pour celui des z_n, plus une

mémoire tampon). Supposons que les mémoires relatives à "y" répondent aux noms de A et B et que l'on dispose d'une mémoire de réserve T ; en ce cas, le calcul du numérateur s'obtient de la façon suivante :

i) initialisation : $A = 3$, $B = 2$.

ii) boucle :
α) envoyer le contenu de A dans T (sauvegarde).
β) multiplication de A par c_n (à introduire au clavier).
γ) ajouter B à A.
δ) transfert du contenu de T dans B (récupération de y_{n-1}).
ε) retour en α.

A ce stade, A et B contiennent les numérateurs y_n et y_{n-1}. Un calcul analogue doit être mené pour les dénominateurs z_n.

Si l'on travaille avec une machine affichant dix chiffres (sans passer en mode "scientifique"), on constate que l'on peut conduire l'opération jusqu'au rang $n = 22$. On obtient dans ces conditions le nombre rationnel suivant $\dfrac{848\,456\,353}{312\,129\,649}$; le rang n étant pair, ce nombre rationnel minore e, l'erreur commise étant majorée par l'inverse du produit du dénominateur (à savoir 312 129 649) par le dénominateur suivant (dont la représentation "scientifique" suffit bien pour estimer une erreur). On obtient pour l'erreur une majoration par $6,3 \times 10^{-19}$; la division euclidienne exacte de 848 456 353 par 312 129 649 donne donc 17 décimales exactes de e et la 18$^{\text{ème}}$ décimale est connue à une unité près. Un calcul simple donne :

$$2,718\,281\,828\,459\,045\,234\,7 < e < 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,4$$

Une précision supérieure nécessiterait une programmation spéciale.

≪≪≪≪≪≪≪≪≪ ≫≫≫≫≫≫≫≫≫

ENONCÉ DE LA DEUXIÈME COMPOSITION

DU CAPES INTERNE 1990

L'épreuve est construite sur le thème du tétraèdre, à partir d'activités envisageables en classe.

La première partie porte sur une étude de configurations planes que l'on exploite dans la deuxième partie relative à des tétraèdres particuliers. Ces deux parties sont indépendantes dans une large mesure. La troisième partie est consacrée à l'étude des sections planes d'un tétraèdre quelconque ; elle met en œuvre le produit vectoriel. Cette dernière partie est indépendante des deux premières.

Première partie

Soit dans le plan quatre demi-droites distinctes Sx, Sy, Sz et St de même origine S. Les angles géométriques $\widehat{xSy}$ et $\widehat{ySz}$ d'une part, $\widehat{ySz}$ et $\widehat{zSt}$ d'autre part, sont adjacents. Chacun de ces trois angles a une mesure strictement inférieure à π et la somme de leurs mesures est strictement inférieure à 2π.

La construction de quatre points M, N, P, Q appartenant respectivement aux demi-droites Sx, Sy, Sz et St et satisfaisant à certaines contraintes fait l'objet de cette première partie.

1. Dans cette question la contrainte (C_1) à laquelle sont assujettis les quatre points M, N, P et Q appartenant respectivement aux demi-droites Sx, Sy, Sz et St est la suivante :

(C_1)
- M, N, P et Q sont distincts de S ;
- SM = SQ ;
- Les trois triangles SMN, SNP et SPQ ont la même aire.

1.1. Démontrer que si quatre points M, N, P et Q satisfont à la contrainte (C_1) alors il en est de même de leurs images dans toute homothétie de centre S et de rapport k, $k > 0$.

Dans la suite de cette première partie, le point M de la demi-droite Sx, M distinct de S, est supposé donné.

1.2. *a.* Faire une figure d'étude $\mathcal{F}_1$ représentant les quatre demi-droites Sx, Sy, Sz et St ainsi que le point M, en prenant :

$$\widehat{xSy} = \frac{2\pi}{3}; \qquad \widehat{ySz} = \frac{\pi}{6}; \qquad \widehat{zSt} = \frac{\pi}{4}; \qquad SM = 5 \text{ cm}.$$

On s'appuiera sur cette figure pour traiter la question 1.2.*b* suivante dans laquelle la longueur SM et les angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ ne sont plus particularisés.

b. En utilisant le fait que l'égalité des aires des triangles SMN et SNP équivaut à l'égalité des distances des points M et P à la droite (SN), montrer que les triangles SMN et SNP ont la même aire si et seulement si le milieu U du segment [MP] appartient à la droite (SN). Situer d'une manière analogue le milieu V du segment [NQ] pour que les triangles SNP et SPQ aient la même aire.

En déduire, à partir de la donnée du point M, la détermination des points N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C_1). Construire ces points sur la figure $\mathcal{F}_1$.

1.3. Dans cette question, on étudie des configurations particulières.

a. Faire une figure $\mathscr{F}_2$ représentant les quatre demi-droites Sx, Sy, Sz et St en prenant :

$\widehat{xSy} = \dfrac{2\pi}{3}$; $\widehat{ySz} = \dfrac{\pi}{6}$; $\widehat{zSt} = \dfrac{\pi}{2}$; le point M est tel que SM = 5 cm.

Construire sur la figure $\mathscr{F}_2$ les points M, N, P, Q vérifiant la contrainte (C_1). Montrer que dans ce cas particulier la droite (PQ) est parallèle à la droite (SN) et en déduire que le point V, milieu du segment [NQ], est aussi le milieu du segment [SP]. Montrer également que le triangle NPQ a pour périmètre, le périmètre de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q et pour aire, l'aire commune aux triangles SMN, SNP et SPQ.

b. Plus généralement, les angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ et la distance SM n'étant plus particularisés, on recherche pour quelles configurations les points M, N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C_1) sont tels que le milieu V du segment [QN] soit aussi le milieu du segment [SP].

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) le point V, milieu du segment [QN], est le milieu du segment [SP] ;
(*ii*) le quadrilatère SNPQ est un parallélogramme ;
(*iii*) la droite (SN) est parallèle à la droite (PQ) ;
(*iiii*) le milieu du segment [MQ] appartient à la droite (SN).

En déduire que, les points M, N, P et Q satisfaisant à (C_1), le point V milieu du segment [QN] est également le milieu du segment [SP] dans les deux cas particuliers suivants :

1° La mesure de l'angle $\widehat{xSy}$ est la somme des mesures des deux angles $\widehat{ySz}$ et $\widehat{zSt}$.
Les propriétés du 1.3.*a.* relatives au périmètre et à l'aire du triangle NPQ se généralisent-elles ?

2° La somme des mesures des angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ est égale à π.

En s'appuyant sur une figure, montrer dans ce cas particulier les propriétés suivantes :
- les triangles SMN, SNP et SPQ sont isométriques ;
- le triangle NPL, où L désigne le point d'intersection des droites (MN) et (PQ) a même périmètre et même aire que les triangles SMN, SNP et SPQ ;
- le point U, milieu du segment [MP], est aussi le milieu du segment [SN].

2. Dans cette question, on cherche quelles conditions imposer aux demi-droites Sx, Sy, Sz, St pour que, M étant toujours donné, les quatre points M, N, P, Q appartenant respectivement à ces demi-droites et satisfaisant à la contrainte (C_1) vérifient aussi la propriété (p) :

(p) On peut construire un triangle NPR tel que :
- les points S et R sont de part et d'autre de la droite (NP) ;
- NR = NM ; PR = PQ ;
- les triangles NPR et SNP ont la même aire.

On note toujours U le milieu du segment [MP] et V le milieu du segment [NQ].

2.1. Montrer que si le point R existe, alors le milieu W du segment [SR] appartient à la droite (NP).

2.2. En exploitant la question 1.3. *b*, montrer que la propriété (p) est réalisée pour les quatre points M, N, P, Q satisfaisant à (C_1) dans les cas particuliers suivants :

— la somme des mesures des trois angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ est égale à π ;
— la mesure de l'un des trois angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ est égale à la somme des mesures des deux autres.

Dans chacun de ces cas, faire une figure indiquant la construction du point R. Indiquer chaque fois la disposition des points U, V, W par rapport aux points I, J, K, milieux respectifs des côtés [SN], [SP] et [PN] du triangle SNP.

2.3. Soit M, N, P, Q quatre points satisfaisant à la contrainte (C_1) ; on recherche à quelles conditions la propriété (p) est réalisée. Pour cela, en supposant que le point R existe, on étudie la disposition des six points U, V, W, I, J, K, où I, J et K désignent toujours les milieux respectifs des segments [SN], [SP] et [NP].

a. Démontrer les égalités :

$$UJ = VI; \qquad WJ = VK; \qquad UK = WI.$$

b. Soit T le point d'intersection des perpendiculaires menées des points M et Q respectivement aux droites (SN) et (SP).

Montrer que $NM^2 - NT^2 = PQ^2 - PT^2$. En déduire que le point T appartient à la perpendiculaire menée de R à la droite (NP).

c. Soit H l'orthocentre du triangle SNP. Démontrer que les points U, V et W sont les projetés orthogonaux du milieu Ω du segment [TH] sur les droites (SN), (SP), (PN) respectivement.

d. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle SNP.

On suppose $U \neq I$ et $V \neq J$. Démontrer que $W = K$; pour cela, on mettra en œuvre dans un premier temps la rotation r telle que $r(U) = I$ et $r(J) = V$ après avoir caractérisé son centre.

e. Déduire de cette étude que les seules dispositions possibles des points U, V, W, I, J, K pour que la propriété (p) soit réalisée sont :

1°	$U = I$;	$V = J$;	$W = K$.
2°	$U \neq I$;	$V \neq J$;	$W = K$.
3°	$U \neq I$;	$V = J$;	$W \neq K$.
4°	$U = I$;	$V \neq J$;	$W \neq K$.

2.4. En utilisant les questions 2.2. et 2.3, quelle conclusion peut-on apporter à l'étude entreprise dans cette deuxième question ?

3. Dans le cas particulier où les demi-droites Sx et St sont opposées, les triangles SMN, SNP, SPQ sont isométriques. Leur périmètre est celui de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q. Plus généralement, on recherche quelles conditions imposer aux demi-droites Sx, Sy, Sz, St pour que l'on puisse assujettir quatre points M, N, P et Q appartenant respectivement aux demi-droites Sx, Sy, Sz, St à la contrainte (C_2) :

(C_2)
- M, N, P, Q sont distincts de S et SM = SQ.
- Les trois triangles SMN, SNP et SPQ ont le même périmètre égal au périmètre de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q.

3.1. Montrer que l'on peut toujours supposer le point M donné.

3.2. Soit quatre points M, N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C_2).

Écrire les relations liant les nombres $x = SM$, $y = SN$, $z = SP$, $l_1 = MN$, $l_2 = NP$, $l_3 = PQ$.

Exprimer x, y, z en fonction de l_1, l_2, l_3 et conclure.

Deuxième partie

A. *Tétraèdre trirectangle.*

L'étude porte sur le « patron » d'un tel tétraèdre. Soit un tétraèdre SABC et (π) le plan de la face ABC ; on appelle développement dans (π) (ou « patron ») du tétraèdre, l'ensemble des quatre triangles formé par la face ABC et les rabattements sur (π), à l'extérieur de ABC, des trois autres faces, les droites (BC), (CA) et (AB) servant de charnières. Les rabattements de S sont notés S_1 (face SBC), S_2 (face SCA) et S_3 (face SAB).

Dans toute cette question, on impose que les trois faces SBC, SCA et SAB soient rectangles en S ; on dira que le tétraèdre est trirectangle en S.

1.1. Soit H la projection orthogonale de S sur le plan (π) et H_1 la projection orthogonale de S sur la droite (BC). Faire un dessin en perspective. Montrer que les points A, H, H_1 sont alignés. Quel est le rôle de H pour la face ABC ? Montrer que cette face a trois angles aigus.

1.2. Sachant que les côtés de la face ABC ont pour longueurs

$$BC = \sqrt{10}, \qquad CA = \sqrt{7}, \qquad AB = \sqrt{5},$$

calculer les longueurs des arêtes [SA], [SB] et [SC]. L'unité de longueur étant 3 cm, indiquer la construction des segments [BC], [CA] et [AB] et dessiner le développement du tétraèdre. On s'appuiera sur la figure obtenue pour traiter la question suivante dans laquelle les longueurs des côtés du triangle ABC ne sont plus particularisées.

1.3. Soit ω le centre du cercle circonscrit au triangle S_1, S_2, S_3. Déterminer l'image de la droite (S_1C) dans la symétrie orthogonale d'axe (ωC) ainsi que l'image de la droite (S_1B) dans la symétrie orthogonale d'axe (ωB). Montrer que les droites (S_2C) et (S_3B) sont symétriques par rapport à la droite $(A\omega)$ et en déduire que les droites (S_1B) et (S_1C) sont symétriques par rapport à la droite (ωS_1).

1.4. On dispose d'une plaque de carton de forme circulaire sur le bord de laquelle on a marqué trois points S_1, S_2, S_3 n'appartenant pas à un même demi-cercle. Construire un triangle inclus dans la plaque et tel que « S_1, S_2, S_3, ABC » soit le développement d'un tétraèdre SABC trirectangle en S.

B. *Tétraèdre équifacial.*

1. Lien avec le tétraèdre trirectangle et le parallélépipède rectangle.

Soit SABC un tétraèdre trirectangle en S. On note P le milieu du segment [BC], Q le milieu du segment [CA] et R le milieu du segment [AB].

1.1. Démontrer que les arêtes opposées du tétraèdre PQRS ont même longueur. En déduire que les faces de ce tétraèdre sont isométriques.

On dira qu'un tel tétraèdre est équifacial.

1.2. Soit I le milieu de l'arête [PQ] et J le milieu de l'arête [SR].

Démontrer que la droite (IJ) est un axe de symétrie du tétraèdre PQRS et déterminer deux autres axes de symétrie.

Soit O le milieu du segment [IJ]. Montrer que le point O est l'isobarycentre des quatre points P, Q, R, S ainsi que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre PQRS.

1.3. Soit ABCD un tétraèdre tel que AB = CD et, E et F désignant les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD], tel que la droite (EF) soit orthogonale aux droites (AB) et (CD). Ainsi, la droite (EF) est un axe de symétrie du tétraèdre ABCD.

Soit A′, B′, C′, D′ les images respectives des sommets A, B, C, D du tétraèdre dans la symétrie centrale de centre le point Ω, milieu du segment [EF].

a. Montrer que AC′BD′ est un rectangle.

b. Démontrer que A, C′, B, D′, B′, D, A′, C sont les huit sommets d'un parallélépipède rectangle.

c. Démontrer que le tétraèdre ABCD est équifacial.

d. En s'appuyant sur un dessin, indiquer comment on peut extraire un tétraèdre équifacial d'un parallélépipède rectangle. Examiner aussi le cas particulier du cube.

2. Développement d'un tétraèdre équifacial.

Dans cette question, on admet la propriété : dans tout tétraèdre, en chaque sommet du tétraèdre les angles des faces contenant ce sommet ont une somme strictement inférieure à 2π et chacun de ces angles est strictement inférieur à la somme des deux autres.

2.1. En utilisant la première partie, montrer que pour qu'un tétraèdre soit équifacial, il suffit que ses quatre faces aient la même aire.

2.2. Établir que pour qu'un tétraèdre soit équifacial, il suffit qu'en chaque sommet du tétraèdre la somme des angles des faces contenant ce sommet soit égal à π. Pour cela, on exploitera le développement du tétraèdre.

3. Tétraèdre dans lequel l'isobarycentre Ω des sommets A, B, C, D est le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

Les points A, B, C, D vérifient par hypothèse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D} = \vec{0}. \\ \Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D. \end{cases}$$

On note E le milieu du segment [AB] et F le milieu du segment [CD].

3.1. Montrer que la droite (EF) est un axe de symétrie du tétraèdre ABCD.

3.2. Démontrer que le tétraèdre ABCD est équifacial.

Troisième partie

Tétraèdre quelconque. Aire de l'intersection avec un plan.

L'objet de cette partie est de démontrer, par le calcul vectoriel, qu'un plan de section d'aire maximale d'un tétraèdre est nécessairement le plan d'une face.

L'espace est orienté. Soit ABCD un tétraèdre ; on pose :

$$2\vec{S}_1 = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}; \quad 2\vec{S}_2 = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}; \quad 2\vec{S}_3 = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}; \quad 2\vec{S}_4 = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}.$$

1. Établir l'égalité :

$$\vec{S}_4 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3.$$

2. Sections triangulaires.

Soit les points M_1, M_2, M_3 définis par :

$$\overrightarrow{AM_1} = \alpha\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{AM_2} = \beta\overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{AM_3} = \gamma\overrightarrow{AD},$$

où α, β, γ sont trois nombres réels de l'intervalle $]0,1[$.

2.1. On pose $2\vec{T} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$.

- Exprimer $\vec{T}$ comme combinaison linéaire de $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$.
- Montrer que, pour tout réel ρ :

$$\vec{T} = (\beta\gamma - \rho)\vec{S}_1 + (\gamma\alpha - \rho)\vec{S}_2 + (\alpha\beta - \rho)\vec{S}_3 + \rho\vec{S}_4.$$

En choisissant $\rho = \inf(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$, montrer que :

$$\|\vec{T}\| \leqslant \operatorname{Max}(\|\vec{S}_1\|, \|\vec{S}_2\|, \|\vec{S}_3\|, \|\vec{S}_4\|);$$

on pourra utiliser l'égalité suivante où a, b, c désignent trois nombres réels :

$$a(b + c) - bc = a^2 - (a - b)(a - c).$$

2.2. Interpréter les normes des vecteurs $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$ et $\vec{T}$;
résoudre le problème des sections triangulaires d'aire maximale.

3. Sections quadrangulaires.

Soit les points M_1, M_2 M_3, M_4 définis par :

$\overrightarrow{AM_1} = \alpha\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM_2} = \beta\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DM_3} = \lambda\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DM_4} = \mu\overrightarrow{DB}$, où α, β, λ, μ sont quatre nombres réels de l'intervalle $]0,1[$.

On suppose que les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sont coplanaires et on pose :

$$2\vec{Q} = \overrightarrow{M_1M_3} \wedge \overrightarrow{M_2M_4}.$$

3.1. Interpréter la norme de $\vec{Q}$.

3.2. Exprimer $\vec{Q}$ comme combinaison linéaire de $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$:

$$\vec{Q} = k_1\vec{S}_1 + k_2\vec{S}_2 + k_3\vec{S}_3.$$

Vérifier que k_1 et k_2 sont positifs et que :

$$1 - k_1 - k_2 + k_3 = (1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \mu).$$

3.3. La coplanéité de M_1, M_2, M_3, M_4 s'exprime par une relation entre α, β, λ, μ. Former cette relation et en déduire que le produit précédent $(1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \mu)$ est positif.

3.4. Dans l'hypothèse $\alpha\beta \leqslant \lambda\mu$ montrer que :

$$\|\vec{Q}\| \leqslant \operatorname{Max}(\|\vec{S}_1\|; \|\vec{S}_2\|; \|\vec{S}_3\|).$$

Dans le cas où $\alpha\beta > \lambda\mu$, quelle autre expression de $\vec{Q}$ mettrait-on en œuvre pour conclure ?

Université Pierre et Marie Curie
Préparation au CAPES interne de mathématiques
P. Jarraud

Extrait de *Problèmes de mathématiques*
Ecrit du CAPES – 1988-1994
Algèbre et géométrie avec rappels de cours
F. Bories-Longuet – A. Lévy-Bruhl – P. Jarraud
Ed. Masson

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME COMPOSITION DU CAPES INTERNE 1990

Première partie

1)1) Une homothétie est une application injective qui transforme deux points distincts en deux points distincts; une homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport et les aires par le carré de son rapport; une homothétie de rapport positif laisse globalement invariante toute demi-droite issue du centre donc si quatre points M,N,P,Q satisfont à la contrainte (C_1) alors il en est de même de leurs images dans toute homothétie de centre S et de rapport k, k>0. (Rappelons que si f est une application affine d'application linéaire associée $\vec{f}$ l'aire du triangle f(M)f(N)f(P) est égale à l'aire du triangle MNP multipliée par $|\det \vec{f}|$).

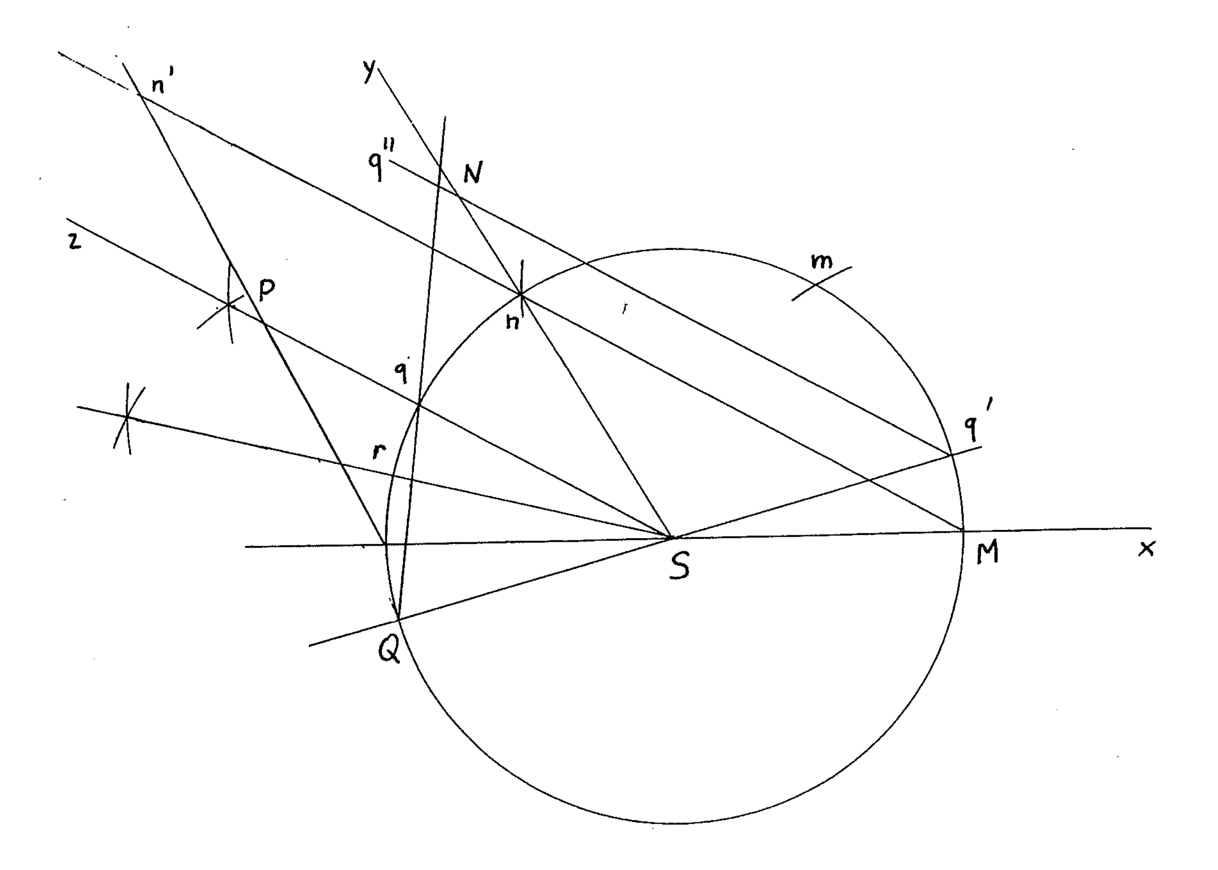
1)2)a) Effectuons une construction à la règle et au compas de la figure demandée: plaçons le point S et traçons la demi-droite Sx sur laquelle nous plaçons à l'aide du compas le point M (M appartient à Sx et au cercle $\mathscr{C}$ de centre S et rayon 5 cm). Sur le cercle $\mathscr{C}$ on construit le point m tel que mM = 5 cm puis le point n tel que nm = 5 cm à l'aide du compas. La demi-droite d'origine S et passant par n est Sy. (SM) recoupe $\mathscr{C}$ en p et la demi-droite Sz est portée par la médiatrice de [np].Cette demi-droite coupe $\mathscr{C}$ en q et la médiatrice de [qp] coupe l'arc de cercle de $\mathscr{C}$ d'extrémités p et q ne contenant pas M en un point r; le cercle de centre p passant par r recoupe $\mathscr{C}$ en Q.

1)2)b) Le double de l'aire du triangle SMN est égale au produit de la longueur SN et de la distance de M à la droite (SN). Le double de l'aire du triangle SPN est égale au produit de la longueur SN et de la distance de P à la droite (SN). Ces deux aires sont égales si et seulement si M et P sont équidistants de (SN); par hypothèse M et P sont de part et d'autre de (SN) car les angles géométriques $\widehat{xSy}$ et $\widehat{ySz}$ ont une mesure strictement inférieure à π ; M et P sont équidistants de (SN) si et seulement si le milieu U de [MP] appartient à (SN). De même les triangles SNP et SPQ ont même aire si et

seulement si les points N et Q sont équidistants de (SP) , c'est à dire si et seulement le milieu V de [NQ] appartient à (SP).

Ce résultat permet de construire le point P comme point d'intersection de Sz et de l'image de Sy dans l'homothétie de centre M et rapport 2. Le point N est obtenu comme point d'intersection de Sy et de l'image de Sz dans l'homothétie de centre Q et rapport 2.

Pour la construction dans le cas de la figure $\mathcal{F}_1$ il suffit de construire l'image de Sy dans l'homothétie de centre M et rapport 2 et pour celà de construire les images de deux points : S a pour image p et le cercle de centre n et rayon nM recoupe (Mn) en l'image n' de n; l'image de Sy est la demi-droite d'origine p, portée par (pn') et contenant n'.L'image de Sz dans l'homothétie de centre Q et rapport 2 est la demi-droite d'origine le point q' diamétralement opposé à Q sur $\mathcal{C}$ et contenant q" l'image de q, image obtenue comme point d'intersection du cercle de centre q et rayon Qq avec (Qn). N est le point d'intersection de cette demi-droite et de Sy.

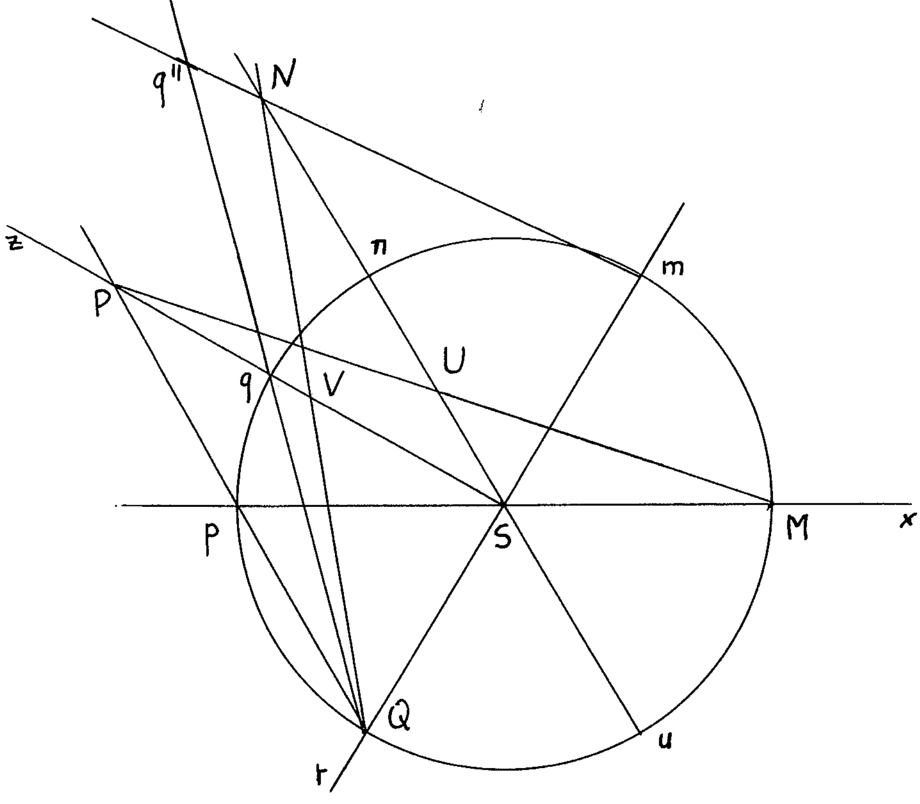


1)3)a) Remarquons que $\widehat{ySz} + \widehat{zSt} = \widehat{xSy}$ donc Sy est la médiatrice de [QM] et pour construire $\mathcal{F}_2$ il suffit de construire Sy et Sz comme en 1)2)a) puis de

tracer la droite Sy qui coupe $\mathscr{C}$ en u; le cercle de centre u passant par M coupe $\mathscr{C}$ en Q. On remarque alors que l'homothétique de Sy dans l'homothétie de centre M et rapport 2 est la droite (pQ), où p est le symétrique de M par rapport à S. On a bien (PQ) //(SN). La symétrie de centre V transforme Q en N et la droite (QP) en la parallèle à (QP) passant par N c'est à dire en (SN); l'image de P dans cette symétrie est donc le point d'intersection de (VP) et (SN); c'est donc S, et V est aussi le mileu de [SP].

NP + PQ + QN = NP + PQ + NM car N appartient à la médiatrice de [QM].

L'aire du triangle NPQ est égale à l'aire du triangle SNQ en utilisant la symétrie de centre V, et à l'aire du triangle SNM en utilisant la réflexion d'axe Sy.



1)3)b) Montrons que (i) ⇒ (ii) , (ii) ⇒ (iii) , (iii) ⇒ (iiii).

(i) ⇒ (ii): si V, milieu du segment [QN], est milieu du segment [SP] le quadrilatère SNPQ est un parallélogramme.

(ii) ⇒ (iii): si SNPQ est un parallélogramme, (SN) est parallèle à (PQ).

(iii) ⇒ (iiii): si (SN) est parallèle à (PQ), les distances des points P et Q à la droite Sy sont égales à la distance de M à Sy donc le milieu de [MQ] appartient à la parallèle menée par U à (QP), c'est à dire à (SN).

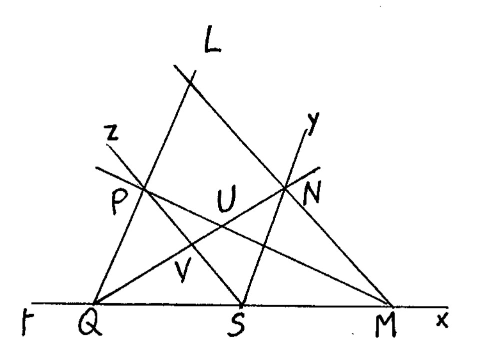
(iiii) ⇒ (i): si le milieu J de [MQ] appartient à (SN), (JU) est parallèle à (PQ) donc (SN) est parallèle à (PQ) et la symétrie de centre V envoie P sur

S (même raisonnement qu'en 1)3)a)).

Cas particuliers

1) Lorsque la mesure de l'angle $\widehat{xSy}$ est la somme des mesures des deux angles $\widehat{ySz}$ et $\widehat{zSt}$, la droite (SN) est parallèle à la droite (PQ), c'est la même démonstration qu'en 1)3)a). Les propriétés relatives au périmètre et à l'aire du triangle NPQ montrées dans 1)3)a) sont encore valables.

2) Si la somme de la mesure des angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$ et $\widehat{zSt}$ est égale à π, les points S,M et Q sont alignés et le milieu S de [MQ] appartient bien à (SN). La propriété (iiii) est vérifiée; le milieu V de [QN] est le milieu de [SP] donc $\vec{UV} = 1/2\ \vec{NP} = 1/2\ \vec{SQ} = 1/2\ \vec{MS}$ et le quadrilatère SMNP est un parallélogramme; les segments [MP] et [SN] ont même milieu U. La symétrie par rapport au point U transforme le triangle SMN en le triangle SNP et ces deux triangles sont isométriques. De même les triangles SNP et SPQ sont isométriques en utilisant la symétrie par rapport à V, milieu commun de [QN] et [SP].

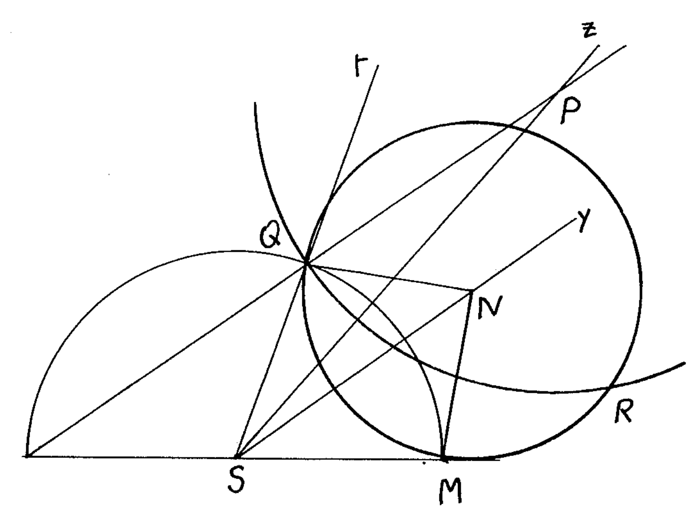


S est le milieu de [QM] et (SP) est parallèle à (MN) dans le parallélogramme SMNP donc P est le milieu de [QL]; (PN) étant parallèle à (SM), N est le milieu de [ML] et le triangle NPL est l'image du triangle SMN par la translation de vecteur $\vec{SP}$; il a même périmètre et même aire que les triangles SMN, SNP, et SPQ.

2)1) Si R existe les points R et S sont à la même distance de (NP) car les aires des triangles NPR et SNP sont égales; de plus R et S sont de part et d'autre de (NP) donc le milieu W de [RS] appartient à (NP).

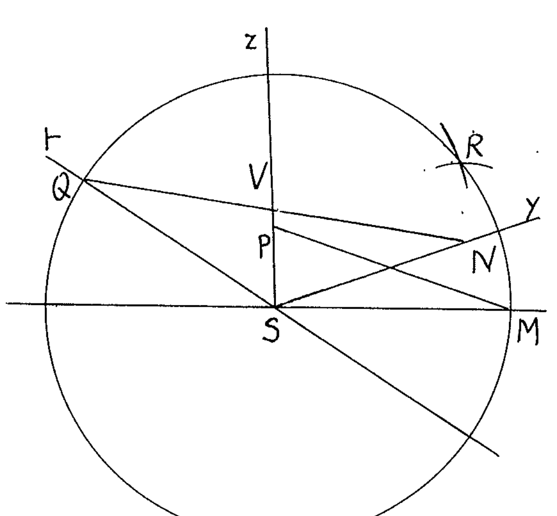
2)2) Si M,N,P,Q satisfont la condition (C_1) et si de plus la somme des mesures des trois angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$ et $\widehat{zSt}$ est égale à π, on est dans les conditions de 1)3)b)1) et le point L vérifie la propriété (*p*). En effet R et S sont de part et d'autre de (NP), diagonale du parallélogramme SPLN, et NL = NM , PL = PQ et les triangles NPL et SNP ont même aire.

Si M,N,P,Q satisfont la condition (C_1) et si de plus la mesure de l'un des trois angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySz}$, $\widehat{zSt}$ est égale à la somme des mesures des deux autres on a par exemple $\widehat{xSy} = \widehat{ySz} + \widehat{zSt}$; les triangles SNQ et SNM sont égaux et le cercle de centre N et rayon NM coupe le cercle de centre P et rayon PQ en



Q et R qui sont de part et d'autre de (NP), S et R sont de part et d'autre de (NP); Q et R sont symétriques par rapport à (NP) donc les triangles NPR et NQP ont même aire; les triangles SNP et SQP ayant même aire, les triangles NPR et SNP ont même aire.

Si $\widehat{zSt} = \widehat{xSy} + \widehat{ySz}$, il suffit de remarquer que la symétrie par rapport à St ramène au cas précédent (les points M et Q sont à permuter).



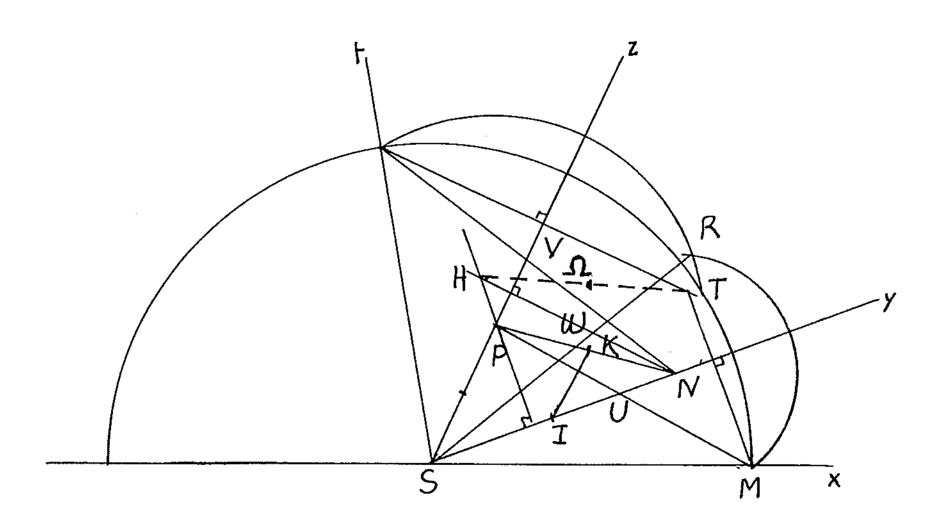
Si $\widehat{ySz} = \widehat{xSy} + \widehat{zSt}$, le point d'intersection R du cercle de centre P et rayon QP et du cercle de centre N et rayon NM non situé du même côté de (NP) que S vérifie la propriété (*p*); c'est de plus le symétrique de M par rapport à Sy car ce symétrique R' vérifie $\widehat{ySR'} = \widehat{xSy}$ donc $\widehat{R'Sz} = \widehat{zSt}$ et les triangles R'SP et QSP sont égaux.

2)3)a) On utilise plusieurs fois les propriétés de la "droite des milieux" dans le triangle.
VI = 1/2 SQ = 1/2 SM = UJ
WJ = 1/2 PR = 1/2 PQ = VK
UK = 1/2 NM = 1/2 NR = WI.

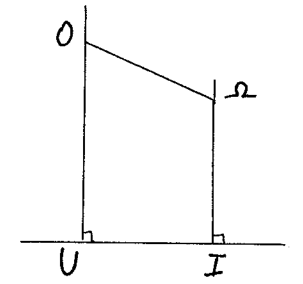
2)3)b) T appartient à la hauteur issue de Q dans le triangle SPQ donc:
$TP^2 - TS^2 = QP^2 - QS^2$ (on peut aussi se souvenir du fait que l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$ est une droite perpendiculaire à (AB)).
Le point T appartient à la perpendiculaire menée de M à la droite (SN) donc $TS^2 - TN^2 = MS^2 - MN^2$ et $MN^2 - NT^2 = MS^2 - TS^2 = QS^2 - TS^2 = PQ^2 - PT^2$ .Par la propriété (*p*) MN = NR et PR = PQ donc $NR^2 - NT^2 = PR^2 - PT^2$ et

$NR^2 - PR^2 = NT^2 - PT^2$. Le point T appartient à la perpendiculaire menée de R à la droite (NP).

2)3)c) Considérons la projection orthogonale sur (SP). Q et T ont la même projection car (TQ) est perpendiculaire à (SP); de même N et H ont la même projection; les milieux de [NQ] et [TH] ont donc la même projection qui est le point V milieu de [NQ]. Par le même raisonnement U est le projeté orthogonal du milieu Ω de [TH] sur (SN) et W le projeté orthogonal de Ω sur (NP).



2)3)d) Les longueurs UJ et VI étant égales il existe un déplacement qui envoie U sur I et J sur V et ce déplacement ne peut être une translation car les droites (UI) et (VJ) ne sont pas parallèles. C'est une rotation r dont le centre est le point d'intersection des médiatrices de [UI] et de [VJ]. Montrons que le milieu de [ΩO] appartient à la médiatrice de [UI]. Le



trapèze ΩOIU est rectangle et la médiatrice de [IU] passe par le milieu de [ΩO]. Il en est de même de la médiatrice de [VJ]. Si W et K sont distincts, le milieu de [ΩO] serait aussi le centre de la rotation qui enverrait W sur K et J sur V car WJ = VK ; mais ces deux rotations ont même centre et envoient J sur V, elles sont égales. Mais UK = WI, donc la même rotation envoie alors K sur W, et cette rotation est une symétrie

centrale, et les trois segments [UI],[VJ],[WK] ont même milieu, le milieu de [ΩO], et ceci n'est pas possible. On en conclut que W et K coïncident.

2)3)e) L'étude faite en 2)3)d) montre que si $U \neq I$ et $V \neq J$ alors $W = K$. On montrerait de même que $U \neq I$ et $W \neq K$ entraîne $V = J$, que $V \neq J$ et $W \neq K$ entraîne $U = I$. Il reste à voir ce qui se passe lorsque $U = I$ et $V = J$ par exemple. On a alors $WV = VK$ et $UK = WU$ et (VU) est médiatrice de [WK] si les points W et K sont distincts, or la médiatrice de [WK] est orthogonale à (NP) et (VU) est parallèle à (NP) comme droite des milieux dans le triangle SNP. Nécessairement W et K coïncident. On traite de façon analogue les cas où deux des milieux des segments [MP],[NQ],[SR] sont milieux de deux des segments [SN],[SP],[PN]. En conclusion seules les trois configurations proposées dans 2)3)e) sont possibles et les études menées en 2)2) montrent que ces configurations existent.

2)4) Les résultats de 2)3) et de 2)2) montrent que les configurations de 2)3)e) sont les seules possibles et qu'elles existent. Réciproquement montrons que si la disposition des points U,V,W,I,J,K est l'une de celles de la question 2)3)e) alors les quatre points M,N,P,Q satisfont à l'un des cas particuliers de 2)2).

Si $U = I$, $V = J$, $W = K$ alors (NP) est parallèle à (SQ) car le quadrilatère QPNS est un parallélogramme; (NP) est parallèle à (SM) car le quadrilatère SPNM est un parallélogramme et les points Q,S et M sont alignés: la somme des mesures des trois angles $\widehat{xSy}$, $\widehat{ySx}$, $\widehat{zSt}$ est égale à π.

Si $U \neq I$, $V \neq J$ et $W = K$ alors le quadrilatère SPRN est un parallélogramme et (RN) est parallèle à (SP). Dans le triangle QNR, (SP) passe par le milieu de [QN] et est parallèle à (NR): (SP) passe par le milieu de [NQ]. P étant équidistant de N et R ,la médiatrice de [NQ] est (SP) et Sz est la bissectrice de l'angle des demi-droites St et [SR). De même Sy est la bissectrice de l'angle des demi-droites [SR) et Sx. La mesure de l'angle ySz est égale à la somme des mesures des angles $\widehat{xSy}$ et $\widehat{zSt}$.

Si $U = I$, $V \neq J$ et $W = K$ alors le quadrilatère SPNM est un parallélogramme et (NM) est parallèle à (SP). Le milieu de [MQ] appartient à Sz et ce n'est pas le point S car alors M,Q et S sont alignés et par 2)2) $V = J$. La médiatrice de [MQ] est Sz et les angles $\widehat{tSz}$ et $\widehat{zSx}$ ont des mesures égales.

Si $U \neq I$, $V = J$ et $W = K$ la mesure de l'angle $\widehat{ySz}$ est égale à la somme des mesures des angles $\widehat{xSy}$ et $\widehat{zSt}$.

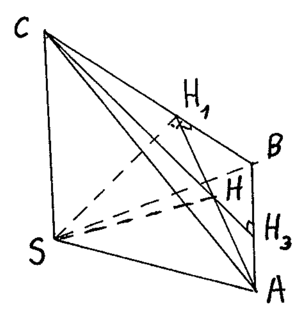
3)1) Si M correspond à une solution, tout autre M' point de la demi-droite [SM) distinct de S est solution: en effet l'homothétie de centre S et de rapport $\overline{SM'}/\overline{SM}$ envoie les points M,N,P,Q sur quatre points qui vérifient (C_2).

3)2) Les relations liant x, y, z, l_1, l_2, l_3 sont:
$x + l_1 + y = y + l_2 + z = z + l_3 + x = l_1 + l_2 + l_3$
ce qui entraîne $x = l_2$, $y = l_3$, $z = l_1$ donc les quadrilatères SMNP et SNPQ sont des parallélogrammes et les demi-droites Sx et Sz sont opposées.

Deuxième partie

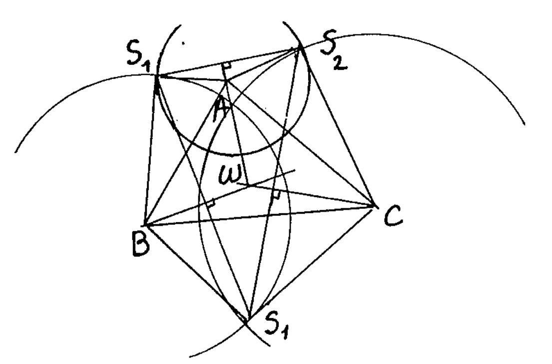
A. Tétraèdre trirectangle

1)1) La droite (BC) est perpendiculaire à (SH_1) et à la droite (SH) qui est perpendiculaire à toutes les droites du plan (ABC): elle est donc perpendiculaire au plan (SHH_1). La droite (SA) est perpendiculaire au droites (SB) et (SC) donc au plan (SBC) et en particulier à (BC). La droite



(BC) étant perpendiculaires à (SA) et à (SH_1) est perpendiculaire au plan (SAH_1) et les deux plans (SHH_1) et (SAH_1) sont confondus et les trois points A, H et H_1 appartenant à l'intersection de ce plan et du plan (ABC) sont alignés. La droite (AH) est perpendiculaire à (BC); de même (BH) est perpendiculaire à (AC) (on introduit la projection orthogonale de S sur (AC)). Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
Pour montrer que le triangle ABC a ses trois angles aigus il suffit de montrer que H est un point intérieur au triangle. Pour celà remarquons que H_1 appartient à [BC] comme pied de hauteur dans le triangle rectangle SBC et que H appartient à $[AH_1]$ comme pied de hauteur dans le triangle rectangle SAH_1.

1)2) Pour constuire à la règle et au compas les longueurs AB, BC et CA il est utile de construire $\sqrt{5}$ comme longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés de longueur 1 et 2, puis de construire $\sqrt{10}$ comme longueur



de la diagonale d'un carré de côté de longueur $\sqrt{5}$, puis de construire $\sqrt{7}$ comme longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés de longueurs respectives $\sqrt{5}$ et $\sqrt{2}$.

Les arêtes [SA], [SB], [SC] ont des longueurs qui vérifient:

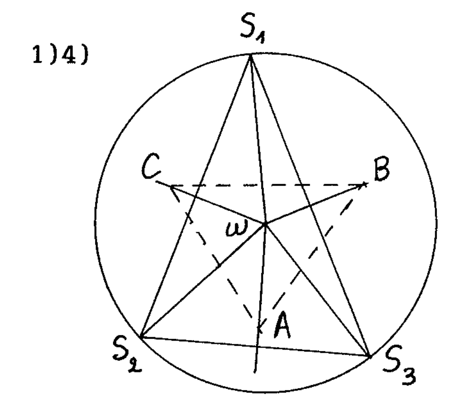
$SA^2 + SB^2 = 5$ $\qquad$ $SA^2 + SC^2 = 7$

$SC^2 + SB^2 = 10$ d'où $SA = 1$, $SB = 2$, $SC = \sqrt{6}$.

Pour dessiner le développement du tétraèdre il suffit de dessiner le triangle ABC puis de construire S_1 en remarquant que $SA = S_1A$ et $SB = S_1B$. On construit de même S_2 et S_3. (Un rabattement est en fait une rotation.)

1)3) $CS_2 = CS_1 = CS$ donc la médiatrice de $[S_2S_1]$ passe par C et est la droite $(C\omega)$, et l'image de (S_1C) dans la symétrie orthogonale d'axe (ωC) est la droite (S_2C). L'image de la droite (S_1B) dans la symétrie orthogonale d'axe (ωB) est la droite (S_3B). Les droites (S_2A) et (S_3A) sont symétriques dans la symétrie orthogonale d'axe (ωA) donc leurs perpendiculaires en S_2 et en S_3 aussi: les droites (S_2C) et (S_3B) sont symétriques par rapport à $(A\omega)$. Notons s_1, s_2 et s_3 les symétries orthogonales par rapport aux droites (ωB), (ωA), (ωC). La composée $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ admet pour points fixes ω et S_1; c'est donc la symétrie orthogonale d'axe (ωC); or l'image par cette composée de (S_1B) est (S_1C) d'où le résultat demandé.

1)4)



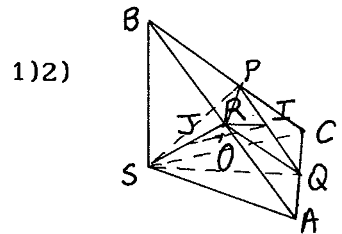
Utilisons les résultats de la question précédente: (S_1B) et (S_1C) sont symétriques par rapport à (ωS_1) donc $\widehat{C\omega S_1} = \widehat{S_1\omega B}$; de plus B est un point de la médiatrice de $[S_1S_3]$ et C est un point de la médiatrice de $[S_1S_2]$. On construit A de même.

B Tétraèdre équifacial

1)1) RP est égale à la moitié de AC par les propriétés des droites du milieu dans le triangle ABC. SQ est égale à la moitié de AC par les propriétés du

triangle rectangle SAC. De même PQ et SR sont égales ainsi que RQ et SP. Les faces du tétrèdre PQRS sont donc isométriques.

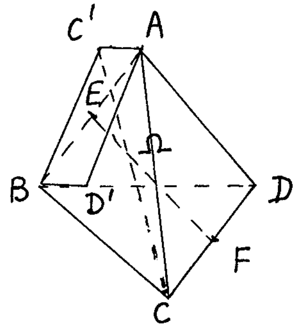
1)2)



Les triangles RPQ et SQP sont isométriques donc les médianes correspondantes sont égales: RI = SI ; le point I appartient au plan médiateur de [SR] et (IJ) est orthogonale à (SR). La droite (IJ) est orthogonale à (PQ) et (IJ) est un axe de symétrie du tétraèdre. Le tétraèdre a deux autres axes de symétrie, les droites joignant les milieux de [RP] et de [SQ] d'une part, les milieux de [RQ] et de [SP] d'autre part.

O est le barycentre de (I,1)et (J,1) et par associativité du barycentre le barycentre de (S,1), (R,1),(P,1) et (Q,1) c'est à dire l'isobarycentre des quatre points P,Q,R,S. O appartient à (IJ) qui est contenue dans le plan médiateur de [SR] donc OR = OS. O appartient aux trois autres axes de symétrie donc O est équidistant de P,Q,R et S.

1)3)a) La symétrie de centre Ω envoie C sur C' et D sur D' donc le milieu F de [CD] sur le milieu de [C'D']: E est donc le milieu de [C'D'] mais c'est aussi le milieu de [AB] donc le quadrilatère AC'BD' est un parallélogramme. Les diagonales de ce parallélogramme ont même longueur car C'D' = CD = AB. C'est donc un rectangle.

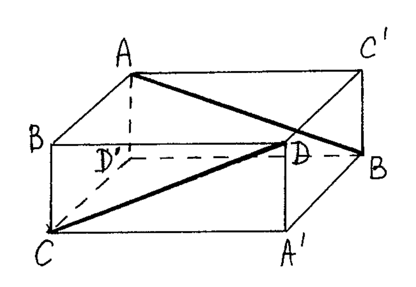


1)3)b) La symétrie de centre Ω envoie le rectangle AC'BD' sur le rectangle A'CB'D donc AC'BD'B'DA'C est un parallélépipède; pour montrer que c'est un parallélépipède rectangle il suffit de montrer que le parallélogramme BA'CD' est un rectangle; Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD car $\Omega A = \sqrt{\Omega E^2 + AE^2} = \sqrt{\Omega F^2 + FD^2} = \Omega D$; et le parallélogramme BDB'D' a ses diagonales égales donc (BD') est orthogonale à (B'D'); (BD') est orthogonale à deux droites non parallèles du plan AB'CD' donc à ce plan et en particulier à (CD').

1)3)c) D'après les résultats de 1)1) il suffit de démontrer que les arêtes opposées du tétraèdre ABCD ont même longueur pour montrer que ce tétraèdre est équifacial. Utilisons la symétrie orthogonale s d'axe (EF).

s(A) = B ; s(B) = A ; s(D) = C ; s(C) = D donc AD = s(A)s(D) = BC et AC = s(A)s(C) = BD. Par hypothèse AB = CD.

1)3)d) Soit le parallélipipède rectangle AC'BD'B'DA'C. On obtient un tétraèdre équifacial en considérant les extrémités des diagonales non parallèles de deux faces parallèles du parallélépipède: en effet soient les faces parallèles AC'BD' et B'DA'C du parallélépipède. Les milieux E et F de [AB] et de [CD] sont tels que (EF) est orthogonale aux plans (ABC') et (B'DC); de plus AB = CD, le tétraèdre ABCD est donc équifacial.



2)1) Si un tétraèdre est équifacial les faces de ce tétraèdre sont isométriques et ont donc même aire.

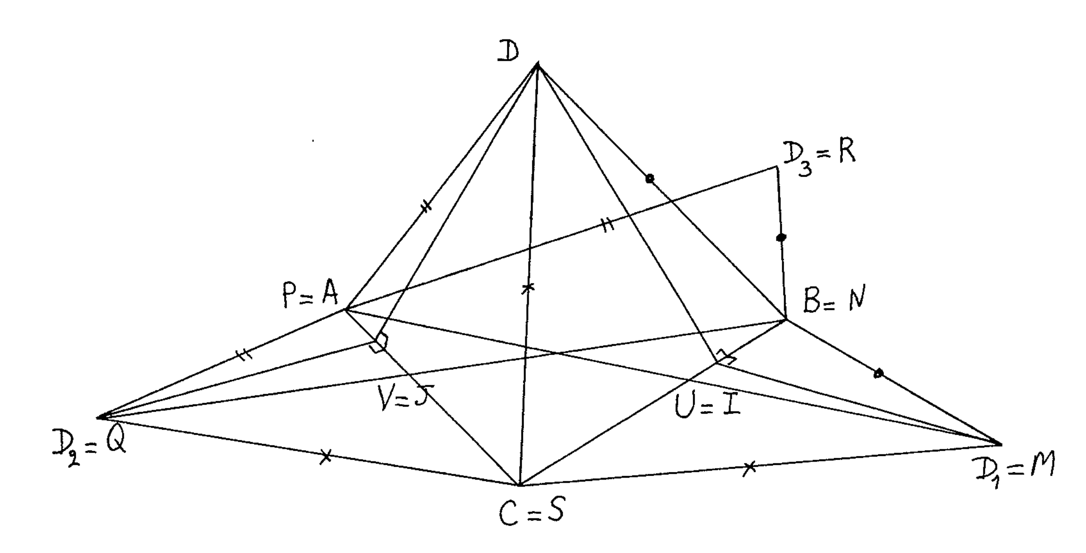
Réciproquement soit un tétraèdre ABCD dont les quatre faces ont même aire et soit son développement dans (ABC), les rabattements de D étant notés D_1(face DBC), D_2(face DAC) et D_3(face DAB). Les rotations étant des isométries on a les égalités de longueur suivantes:

$CD_2 = CD_1 (= CD)$ $AD_2 = AD_3 (= AD)$ $BD_3 = BD_1 (=BD)$

et les égalités d'aire suivantes:

-les trois triangles CAD_2, CAB et CBD_1 ont la même aire

-les triangles ABD_3 et ABC ont la même aire.

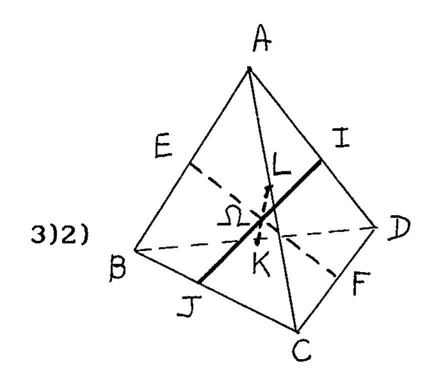


De plus les points A,B,D_1,D_2 sont distincts de S et les points C et D_3 sont de part et d'autre de (AB). Toutes ces propriétés et la propriété admise en ce qui concerne les angles des faces contenant un sommet font que les points D_1,B,A,D_2,C et D_3 sont exactement dans la situation des points M,N,P,Q,S et R vérifiant les contraintes (C_1) et (p) de la première partie. La question 2)4) de cette première partie nous permet d'affirmer que nous sommes dans un des cas particuliers de 2)2). Parmi ces cas particuliers seul le cas où la somme des mesures des trois angles $\widehat{D_1CB},\widehat{BCA}$ et $\widehat{ACD_2}$ est égale à π est possible car on admet que, dans tout tétraèdre, en chaque sommet du tétraèdre, chacun des angles des faces contenant ce sommet est strictement inférieur à la somme des deux autres. Alors par I)1)3)b) les triangles SD_1B, SAB et SAD_2 sont isométriques; le triangle D_3AB est lui aussi isométrique aux trois autres car $AB = CD_1$ (U = I), $BD_3 = BD_1$ et $AD_3 = AD_2 = BC$ (V = J). Le tétraèdre ABCD est donc équifacial.

2)2) Si en chaque sommet du tétraèdre la somme des angles des faces contenant ce sommet est égale à π, on a pour le développement du tétraèdre ABCD dans le plan (ABC), le point C jouant le rôle de S, le fait que le milieu du segment $[AD_1]$appartient à (BC) et le fait que le milieu de $[BD_2]$ appartient à (AC): par I)1)2)b) les points D_1,B,A,D_2 satisfont à la contrainte (C_1) donc les triangles CBD_1,CBA et CAD_2 ont la même aire. En répétant ce raisonnement pour le sommet B on obtient que les faces du tétraèdre ont la même aire et par la question précédente que le tétraèdre est équifacial.

3)1) Ω est un point de la droite (EF) qui vérifie ΩA = ΩB, c'est donc un point du plan médiateur de [AB] et (ΩE) est ortogonale à (AB). De même (EF) est orthogonale à (CD) et la droite (EF) est axe de symétrie du tétraèdre ABCD.

3)2)



Soit I, J, K ,L les milieux respectifs de [AD],[BC],[BD],[AC]. Les droites (IJ) et (KL) contiennent le point Ω et sont axes de symétrie pour le téraèdre ABCD. Les faces du tétraèdre ABCD sont isométriques et le tétraèdre est équifacial.

TROISIEME PARTIE

Tétraèdre quelconque. Aire de l'intersection avec un plan

1) $2\vec{S}_1 + 2\vec{S}_2 + 2\vec{S}_3 = \vec{AC} \wedge \vec{AD} + \vec{AD} \wedge \vec{AB} + \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{AD} \wedge \vec{CA} + \vec{AD} \wedge \vec{AB} + \vec{AB} \wedge \vec{AC}$
$= \vec{AD} \wedge (\vec{CA} + \vec{AB}) + (\vec{AC} + \vec{CB}) \wedge \vec{AC} = \vec{AD} \wedge \vec{CB} + \vec{CB} \wedge \vec{AC} = \vec{CD} \wedge \vec{CB} = \vec{BC} \wedge \vec{BD}$
$= 2\vec{S}_4$

2)1) $2\vec{T} = (\vec{AM}_2 - \vec{AM}_1) \wedge (\vec{AM}_3 - \vec{AM}_1) = (\beta\vec{AC} - \alpha\vec{AB}) \wedge (\gamma\vec{AD} - \beta\vec{AC}) = \beta\gamma\vec{AC} \wedge \vec{AD}$
$+ \alpha\beta\vec{AB} \wedge \vec{AC} - \alpha\gamma\vec{AB} \wedge \vec{AD} = 2\beta\gamma\,\vec{S}_1 + 2\alpha\beta\,\vec{S}_3 + 2\alpha\gamma\,\vec{S}_2$
d'où, pour tout réel ρ: $(\beta\gamma-\rho)\vec{S}_1 + (\gamma\alpha-\rho)\vec{S}_2 + (\alpha\beta-\rho)\vec{S}_3 + \rho\vec{S}_4$
$= \beta\gamma\vec{S}_1 + \gamma\alpha\vec{S}_2 + \alpha\beta\vec{S}_3 + \rho(\vec{S}_4 - \vec{S}_1 - \vec{S}_2 - \vec{S}_3) = \vec{T}$.
Les trois réels α, β, γ jouant des rôles symétriques, on peut supposer $\alpha \le \beta \le \gamma$ et prendre pour ρ la valeur proposée par l'énoncé à savoir $\alpha\beta$ puisque les trois réels α, β, γ sont strictement positifs.
$\vec{T} = (\beta\gamma-\alpha\beta)\vec{S}_1 + (\gamma\alpha-\alpha\beta)\vec{S}_2 + \alpha\beta\vec{S}_4$
d'où $\|\vec{T}\| \le (\beta\gamma - \alpha\beta + \gamma\alpha - \alpha\beta + \alpha\beta)\max(\|\vec{S}_1\|, \|\vec{S}_2\|, \|\vec{S}_4\|)$
et comme $\beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta = \gamma^2 - (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ qui est inférieur ou égal à 1
$\|\vec{T}\| \le \max(\|\vec{S}_1\|, \|\vec{S}_2\|, \|\vec{S}_3\|, \|\vec{S}_4\|)$.

2)2) La norme du produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est égale à la surface du triangle ABC, donc la norme de $\vec{S}_1$ (respectivement $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$) représente l'aire de la face ACD (respectivement ADB, ABC, BCD) et celle de $\vec{T}$ représente l'aire de la section du tétraèdre $M_1M_2M_3$.
La question 2)1) permet de prouver que toute section triangulaire a une aire inférieure ou égale à la plus grande aire des faces du tétraèdre: en effet ce résultat a été montré pour une section triangulaire avec des sommets appartenant aux trois arêtes issues de A et pour toute section triangulaire les trois points appartiennent à trois arêtes issues d'un même sommet.
Supposons que $\|\vec{S}_1\|$ soit l'aire maximale des faces et supposons que les points M_1, M_2, M_3 définis en 2) avec les hypothèses de la démonstration faites en 2)1) soient tels que l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ soit égale à $\|\vec{S}_1\|$; on a alors :
$\|\vec{S}_1\| \le (\gamma^2 - (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta))\|\vec{S}_1\|$ d'où $1 \le \gamma^2 - (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \le 1$ donc γ vaut 1 et est égal à α et à β, et le triangle $M_1M_2M_3$ est le triangle ADC. On conclut que les sections triangulaires d'aire maximale sont obtenues avec le plan d'une face.

3) *Sections quadrangulaires*

3)1) La norme de $\vec{Q}$ s'interprète en terme d'aire: le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est convexe comme intersection d'un plan et d'un convexe, à savoir l'enveloppe convexe des quatre points A, B, C, D. Si on choisit un vecteur unitaire $\vec{u}$ orthogonal au plan $\mathcal{P}$ défini par les points M_1, M_2, M_3, M_4 et si on oriente le plan $\mathcal{P}$ grâce à $\vec{u}$ (une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$ de $\mathcal{P}$ est alors directe si et seulement si la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{u})$ est directe), les bases $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3})$ et $(\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_4})$ de $\mathcal{P}$ sont de même sens et les produits vectoriels $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_3} \wedge \overrightarrow{M_1M_4}$ ont des composantes de même signe sur $\vec{j}$ et sont colinéaires à $\vec{j}$. On a donc $\|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}\| + \|\overrightarrow{M_1M_3} \wedge \overrightarrow{M_1M_4}\|=\|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}+ \overrightarrow{M_1M_3} \wedge \overrightarrow{M_1M_4}\| = \|\overrightarrow{M_1M_3} \wedge \overrightarrow{M_2M_4}\|$ et la norme de $\vec{Q}$ est égale à la somme des aires des triangles $M_1M_2M_3$ et $M_1M_3M_4$ c'est à dire à l'aire du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$.

3)2) $\overrightarrow{M_1M_3}= \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM_3}= - \alpha\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{DC} = - \alpha\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} + (1-\lambda)\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{M_2M_4}= \overrightarrow{M_2A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM_4}= - \beta\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \mu\overrightarrow{DB} = \mu\overrightarrow{AB} - \beta\overrightarrow{AC} + (1-\mu)\overrightarrow{AD}$

$2\vec{Q} = 2\vec{S}_1\ (\lambda(1-\mu)+\beta(1-\lambda)) + 2\vec{S}_2\ (\alpha(1-\mu)+(1-\lambda)\mu) + 2\vec{S}_3(\alpha\beta-\lambda\mu)$

Les réels k_1 et k_2 sont positifs comme sommes de termes positifs; de plus:

$1 - k_1- k_2+ k_3 = 1 - (\lambda(1-\mu)+\beta(1-\lambda)) - (\alpha(1-\mu)+(1-\lambda)\mu) + (\alpha\beta-\lambda\mu)$

$= (1-\alpha-\lambda)\ (1-\beta-\mu).$

3)3) Les points M_1,M_2,M_3,M_4 sont coplanaires si et seulement si le déterminant dans une base quelconque de l'espace des vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}\overrightarrow{M_1M_4}$ est nul.En utilisant la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ on obtient:

$$\begin{vmatrix} -\alpha & -\alpha & \mu-\alpha \\ \beta & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\mu \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_1,M_2,M_3,M_4 \text{ coplanaires}$$

Cette relation s'écrit après calculs:

M_1,M_2,M_3,M_4 coplanaires $\Leftrightarrow$ $\beta\mu(1-\lambda -\alpha) + \alpha\lambda(\beta-1+\mu) = 0$

Le produit trouvé en 3)2) vaut alors $\alpha\lambda(\beta-1+\mu)^2/\beta\mu$ et est donc positif.

3)4) Dans l'hypothèse où $\alpha\beta \le \lambda\mu$ le coefficient k_3 est négatif et la somme de termes positifs $k_1+ k_2+ (-k_3)$ est majorée par 1 (c'est la conjoction des résultats de 3)2) et de 3)3). On en déduit que:

$\|\vec{Q}\| \le (k_1+ k_2+ |k_3|\ )\ \text{Max}\ (\ \|\vec{S}_1\|,\|\vec{S}_2\|,\|\vec{S}_3\|\ ) \le \text{Max}\ (\ \|\vec{S}_1\|,\|\vec{S}_2\|,\|\vec{S}_3\|\ )$

Dans le cas où $\alpha\beta < \lambda\mu$ le réel k_3 n'est plus négatif mais pour se retrouver dans la situation antérieure il suffit de faire intervenir $\vec{S}_4$ dans l'expression de $\vec{Q}$: en effet les réels k_1-k_3 et k_2-k_3 sont positifs car

$k_1 - k_3 = \lambda(1-\mu) + \beta(1-\lambda) - (\alpha\beta-\lambda\mu) = \lambda(1-\beta) + \beta(1-\alpha)$

$k_2 - k_3 = \alpha(1-\mu) + (1-\lambda)\mu - (\alpha\beta-\lambda\mu) = \alpha(1-\mu) + \mu(1-\alpha)$

Pour tout réel k_4 on a : $\vec{Q} = (k_1-k_4)\vec{S}_1 + (k_2-k_4)\vec{S}_2 + (k_3-k_4)\vec{S}_3 + k_4\vec{S}_4$ et en choisissant k_4 égal à k_3 les coefficients k_1-k_4, k_2-k_4 sont positifs et

$$\|Q\| \leq (k_1 - k_4 + k_2 - k_4 + k_4) \text{ Max } (\|\vec{S}_1\|, \|\vec{S}_2\|, \|\vec{S}_3\|, \|\vec{S}_4\|)$$

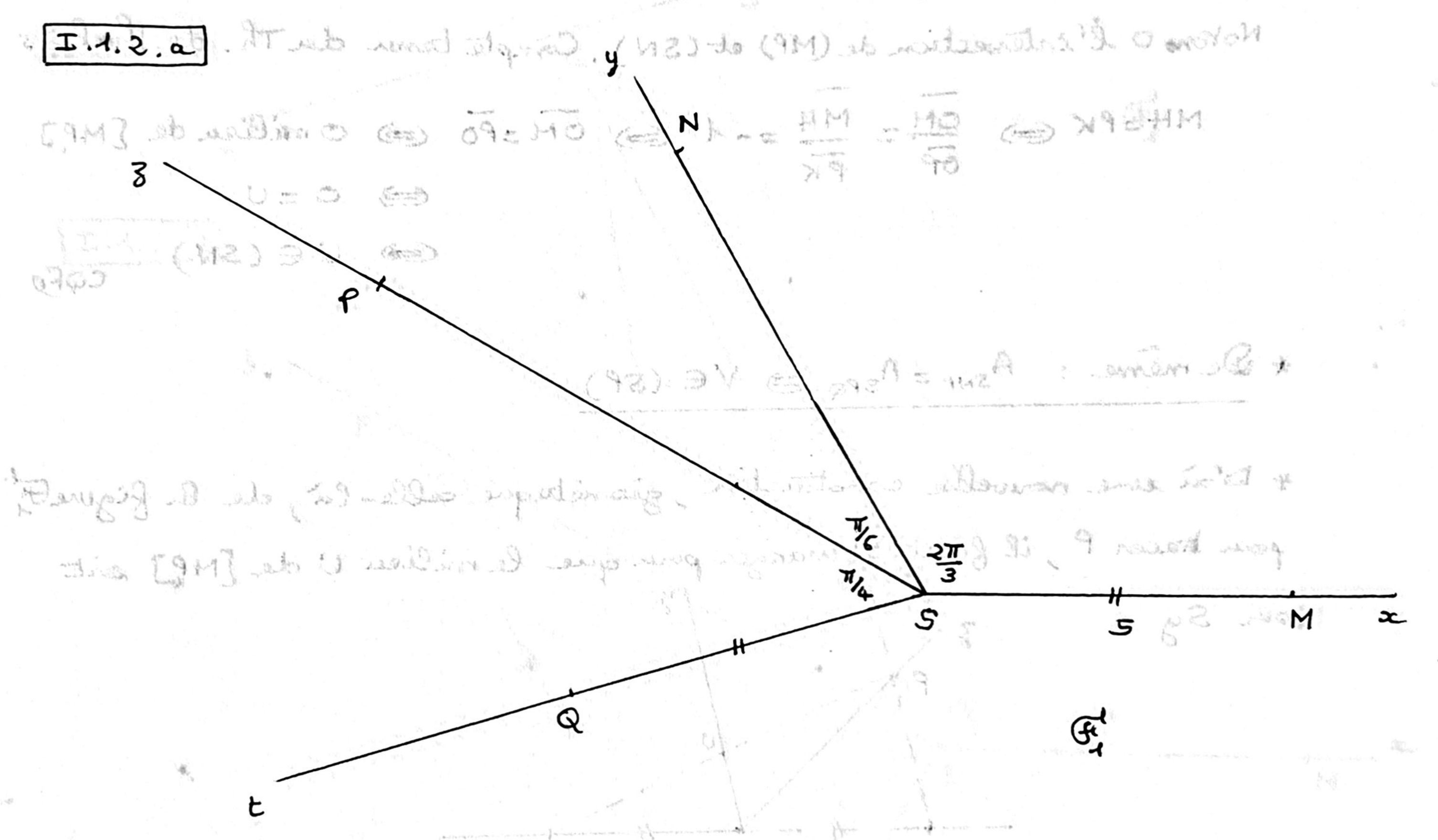
$$\leq (k_1 + k_2 - k_3) \text{ Max } (\|\vec{S}_1\|, \|\vec{S}_2\|, \|\vec{S}_3\|, \|\vec{S}_4\|) \leq \text{Max } (\|\vec{S}_1\|, \|\vec{S}_2\|, \|\vec{S}_3\|, \|\vec{S}_4\|).$$

CAPES interne 1990, 2^e composition

Solution du problème AG17 :

I.1.1 Si h est cette homothétie, si M, N, P, Q vérifient (C_1) et si $M' = h(M)$, ... alors M', N', P', Q' seront distincts de S, $S'M' = k\,SM = k\,SQ = S'Q'$ et les aires des images des triangles SMN, NSP et SPQ seront multipliées par k^2, donc encore égales.

I.1.2.a



$$A_{SMN} = \frac{1}{2} \| \vec{SM} \wedge \vec{SN} \| = \frac{1}{2} . 5 . SN . \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{4} SN$$

$$A_{SNP} = \frac{1}{2} SN . SP . \sin\frac{\pi}{6} = \frac{SN . SP}{4}$$

$$A_{SPQ} = \frac{1}{2} SP . 5 . \sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4} SP$$

L'égalité des aires s'écrit : $\frac{5\sqrt{3}}{4} SN = \frac{SN . SP}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4} SP$

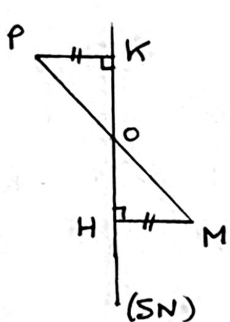
d'où

$SP = 5\sqrt{3} \simeq 8,65$ cm
$SN = 5\sqrt{2} \simeq 7$ cm

I.1.2.b

* $A_{SMN} = A_{SNP} \Leftrightarrow U \in (SN)$

$A_{SMN} = A_{SNP} \Leftrightarrow d(M,(SN)) = d(P,(SN)) \Leftrightarrow MH = PK$ avec les notations du dessin :



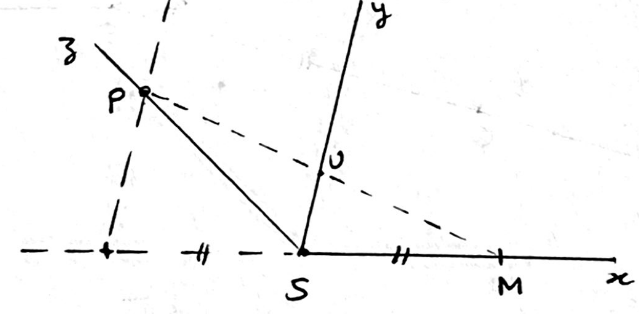
Notons O l'intersection de (MP) et (SN). Compte tenu du Th. de Thalès :

$$MH = PK \Leftrightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{MH}}{\overline{PK}} = -1 \Leftrightarrow \overline{OM} = \overline{PO} \Leftrightarrow O \text{ milieu de } [MP]$$
$$\Leftrightarrow O = U$$
$$\Leftrightarrow U \in (SN)$$

CQFD

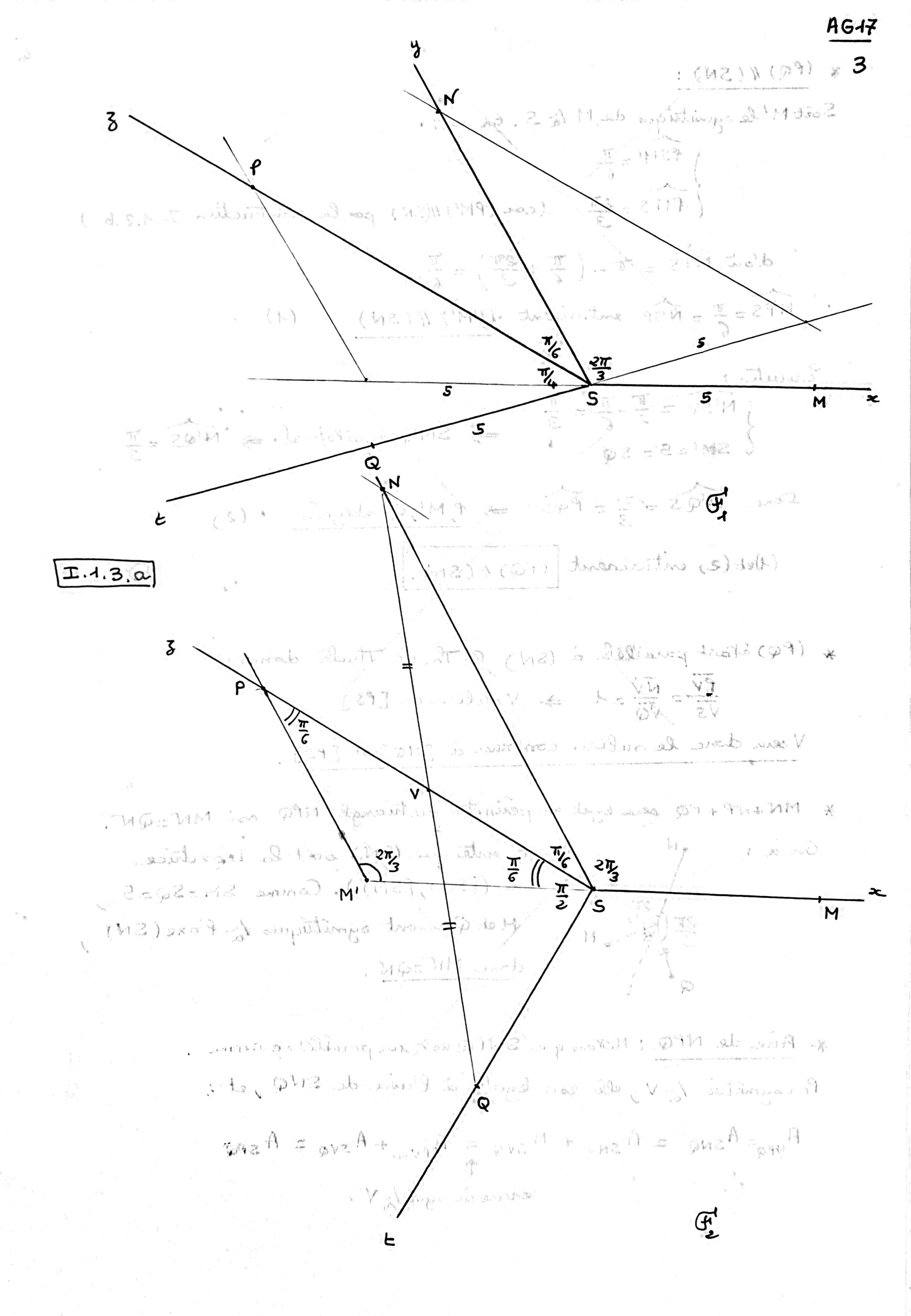
* De même : $A_{SNP} = A_{SPQ} \Leftrightarrow V \in (SP)$

* D'où une nouvelle construction, géométrique celle-là, de la figure F_1' : pour tracer P, il faut s'arranger pour que le milieu U de [MP] soit sur Sy :



On a utilisé Thalès : P est l'intersection de Sz et de la parallèle à Sy passant par le symétrique de M /à S.

On peut aussi construire P en remarquant qu'il sera sur [Sz) et sur l'image de la droite (Sy) par l'homothétie de centre M et de rapport 2.


AG17
3
y
N
z
P
π/6
π/4
2π/3
5
5
5
5
S
M
x
Q
t
F'1
I.1.3.a
N
z
P
π/6
V
2π/3
π/6
π/6
2π/3
M'
π/2
S
x
M
Q
t
F'2

* Par construction $(PM') // (SN)$ donc $\widehat{PM'S} = \widehat{NSM} = \frac{2\pi}{3}$.
De $\widehat{M'SQ} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et $SM' = SQ$ on déduit que $SM'Q$ est équilatéral, donc $\widehat{SM'Q} = \frac{\pi}{3}$.
Finalement $\widehat{PM'Q} = \widehat{PM'S} + \widehat{SM'Q} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ et les trois points P, M', Q sont alignés.
Comme $(PM') // (SN)$, on obtient bien $(PQ) // (SN)$

* On peut appliquer le Th. de Thalès puisque $(PQ) // (SN)$:

$$\frac{\overline{PV}}{\overline{VS}} = \frac{\overline{QV}}{\overline{VN}} = 1 \Rightarrow V \text{ milieu de } [PS]$$

* $MN + NP + PQ$ sera egal au périmètre du triangle NPQ ssi $QN = MN$.

On a :

de sorte que (SN) soit la bissectrice de $([SQ), [SM))$. Comme $SM = SQ = 5$, M et Q seront symétriques / à l'axe (SN) et donc $MN = QN$.

* Aire de NPQ : $SNPQ$ est un parallélogramme, donc si l'on note A_{UVW} l'aire d'un triangle UVW et si l'on utilise la symétrie par rapport à V :

$$A_{NPQ} = A_{NPV} + A_{PVQ} = A_{VSQ} + A_{PVQ} = A_{SPQ}$$

I.1.3.b

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont triviales
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) : Le Th. de Thalès montre que $(SN) // (PQ)$ et V milieu de $[NQ]$ entraînent V milieu de $[SP]$
- (ii) $\Rightarrow$ (iiii) Comme SNPQ est un parallélogramme, $A_{SNP} = A_{SNQ}$ donc $A_{SNM} = A_{SNQ}$, ce qui entraine que le milieu de $[MQ]$ appartienne à (SN) d'après le résultat ci-dessous démontré en I.1.2.b (via Thalès) :

> <u>lemme</u> : $\left.\begin{array}{l} A_{SNM} = A_{SNQ} \\ M \text{ et } Q \text{ de part et d'autre de } (NS) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$ le milieu de $[MQ]$ appartient à (SN)

- (iiii) $\Rightarrow$ (iii)

Si le milieu I de $[MQ]$ appartient à (SN), on a en notant h_M l'homothétie de centre M et de rapport 2 :

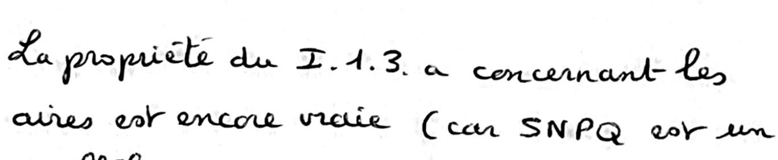
$$h_M(I) = Q \quad \text{avec } I \in (SN)$$
$$h_M(U) = P \quad \text{avec } U \in (SN)$$

d'où $h_M((SN)) = (PQ)$. Donc $(SN) // (PQ)$.

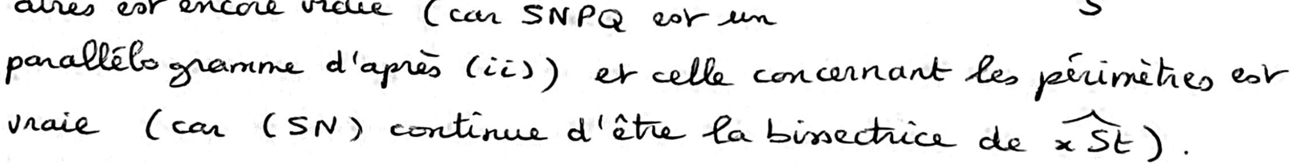
CQFD

<u>Cas particuliers</u> :

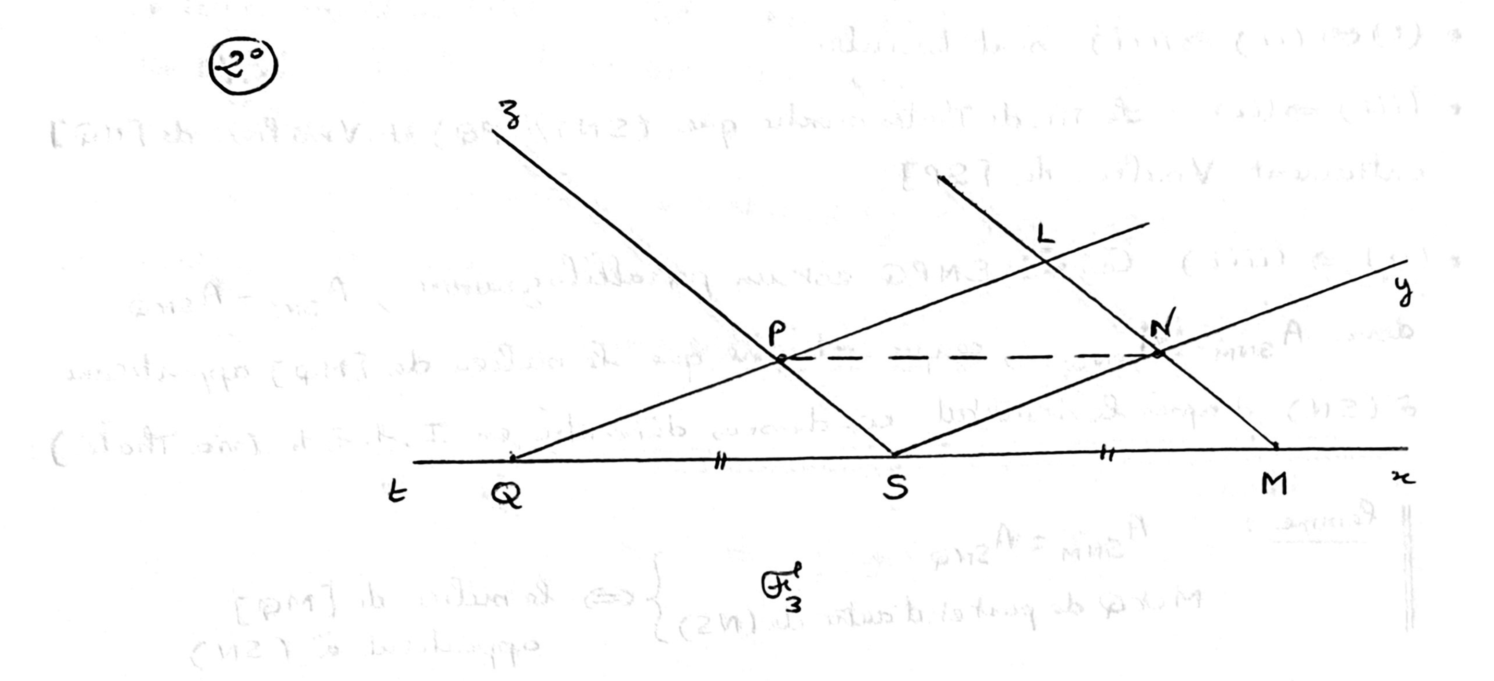
(1°) Ici le milieu de $[MQ]$ appartient à (SN) (puisque (SN) est la bissectrice de $\widehat{xSt}$ et $MS = MQ$)



La propriété du I.1.3.a concernant les aires est encore vraie (car SNPQ est un



parallélogramme d'après (ii)) et celle concernant les périmètres est vraie (car (SN) continue d'être la bissectrice de $\widehat{xSt}$).



Si la somme des angles est π, le milieu de [MQ] sera S et appartiendra à (SN), donc (iiii) sera vérifiée.

D'après les équivalences qui précèdent, SNPQ est un parallélogramme. Comme (PS)//(MN) (en effet le milieu U de [MP] appartient à (SN) d'après I.2.b), et comme (PN)//(SM), le Théorème de Thalès montre que U est aussi le milieu de [SN]) et (PN)//(SM), MNPS sera encore un parallélogramme.

Le Théorème de Thalès montre que P (resp. N) est le milieu de [LQ] (resp. [LM]). Ainsi PNS est le "triangle des milieux" (ou "triangle d'Euler") du triangle LQM. Tout provient alors du Th. de la droite des milieux (ou de Thalès) :

- les triangles SMN, SNP et LPN seront isométriques,
- le périmètre et l'aire de LPN seront ceux de SMN,
- MNPS étant un parallélogramme, les segments [MP] et [NS] auront même milieu.

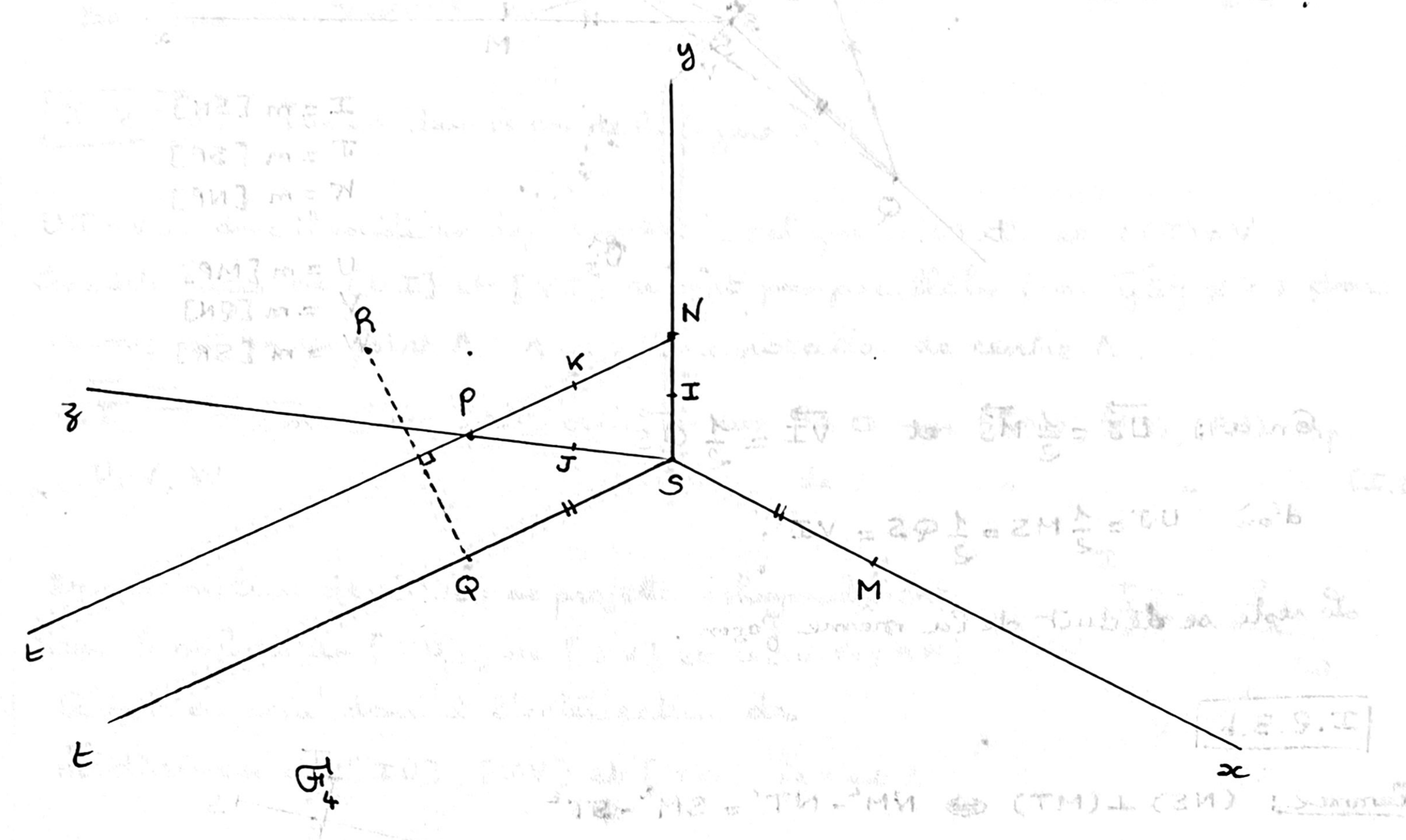
I.2.1 C'est le lemme du I.1.3.b

I.2.2

1°) La somme des angles est π : voir $\mathcal{F}_3^1$ du I.1.3.b.

(p) est réalisé avec R = L, I = U, J = V et K = W

2°) Si $\widehat{xSy} = \widehat{ySz} + \widehat{zSt}$, on se retrouve dans le cas 1° du I.1.3.b :



SNPQ est un parallélogramme (I.1.3.b). Soit R le symétrique de Q /à (PN). On a PR = PQ, et aussi :

NR = NQ = NM
↑
car (SN) est bissectrice de $\widehat{xSt}$ et SM = SQ, donc : (SN) est la médiatrice de [MQ].

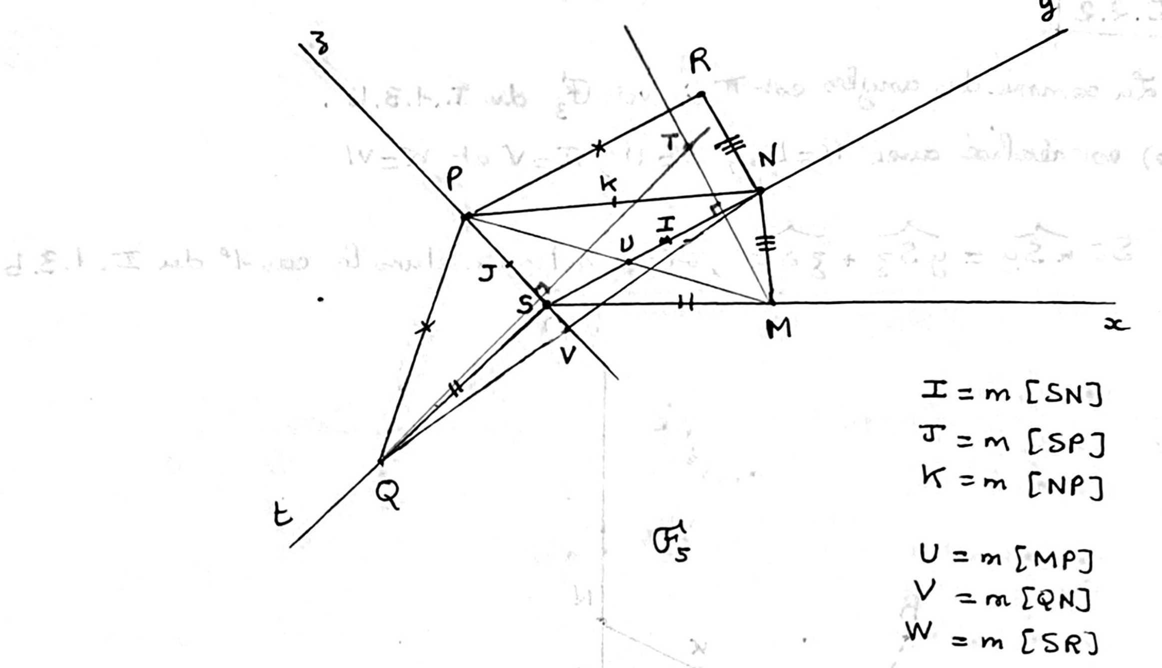
Enfin les triangles NPR et SNP auront même aire si l'on montre que les triangles NPR et MSN sont isométriques. Comme NSPQ est un parallélo-gramme (I.1.3.b, iii)), on peut écrire :

$$\begin{cases} NR = NM \\ PR = PQ = NS \\ NP = QS = MS \end{cases}$$

et achever la preuve.

I.2.3.a

On suppose que R existe, ie que l'on a la figure :



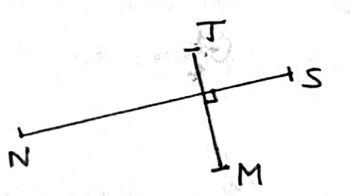
On a : $\vec{UJ} = \frac{1}{2}\vec{MS}$ et $\vec{VI} = \frac{1}{2}\vec{QS}$

d'où $UJ = \frac{1}{2}MS = \frac{1}{2}QS = VI$

Le reste se déduit de la même façon.

I.2.3.b

lemme 2 : $(NS) \perp (MT) \Leftrightarrow NM^2 - NT^2 = SM^2 - ST^2$



preuve :

$$NM^2 - NT^2 = SM^2 - ST^2 \Leftrightarrow (\vec{NS} + \vec{SM})^2 - (\vec{NS} + \vec{ST})^2 = SM^2 - ST^2$$
$$\Leftrightarrow 2\vec{NS}.\vec{SM} - 2\vec{NS}.\vec{ST} = 0$$
$$\Leftrightarrow \vec{NS}.\vec{TM} = 0$$

CQFD

Ici :

$(NS) \perp (MT) \Rightarrow NM^2 - NT^2 = SM^2 - ST^2$

$(QT) \perp (SP) \Rightarrow PQ^2 - PT^2 = SQ^2 - ST^2$

Comme $SM = SQ$, on aura : $\underbrace{NM^2}_{NR^2} - NT^2 = \underbrace{PQ^2}_{PR^2} - PT^2$

soit $NR^2 - NT^2 = PR^2 - PT^2$ donc $(NP) \perp (TR)$.

I.2.3.c

Par la projection orthogonale p sur (SN) :

$T \longmapsto p(M)$

$H \longmapsto p(P)$

Donc le milieu Ω de $[TH]$ se projettera sur le projeté du milieu de $[MP]$, soit U.

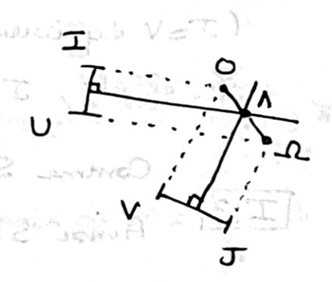
De même avec V et W.

I.2.3.d (On est dans le cas de la figure $\mathcal{F}'_5$)

$UJ = VI$ donc il existe un déplacement r tel que $r(U) = I$ et $r(J) = V$.
Les médiatrices de $[UI]$ et $[VJ]$ ne sont pas parallèles (car $\widehat{yS_3} \neq \pi$) donc se coupent en un point Λ. r sera une rotation de centre Λ.

I, J, K sont les projetés orthogonaux de O sur (SN), (PS), (PN) resp.
U, V, W " " de Ω " " (I.2.3.c)

Donc le milieu de $[O\Omega]$ se projette orthogonalement sur le milieu de $[IU]$, de $[JV]$ et celui de $[KW]$
Ce milieu sera donc à l'intersection des médiatrices de $[IU]$, $[JV]$ et $[KW]$ ie c'est Λ



Λ sera aussi le centre des rotations r' et r'' telles que :

$\begin{cases} r'(U) = I \\ r'(K) = W \end{cases}$ $\begin{cases} r''(J) = V \\ r''(W) = K \end{cases}$ (si $W \neq K$)

Si $W \neq K$, on aurait $r = r' = r''$ donc $\begin{cases} r^2(W) = W \\ r^2(\Lambda) = \Lambda \end{cases} \Rightarrow r^2 = Id$

$\Rightarrow \begin{cases} r = Id & \text{absurde (sinon } r(U) = U = I) \\ \text{ou} \\ r = s_\Lambda = \text{sym}/_{\text{à}}\, \Lambda \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(UJ)}_{//(MS)} \, // \, \underbrace{(IV)}_{//(QS)}$ (car $r(U) = I$ et $r(J) = V$)

$\Rightarrow (MS) // (QS)$

$\Rightarrow MQS$ alignés

$\Rightarrow$ on est dans le cas du I.2.2.1° où $I = U$, absurde.

Ccl : $W = K$

I.2.3.e et I.2.4

* D'après d) on ne peut avoir $U \neq I$, $V \neq J$ et $W \neq K$.
* Si $U = I$, $V = J$ et $W \neq K$, le Th. de Thalès entraîne :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} U = m[MP] \\ J = m[SP] \end{array}\right\} \Rightarrow (UJ) \parallel (MS) \\ \left.\begin{array}{l} I = m[SN] \\ V = m[QN] \end{array}\right\} \Rightarrow (IV) \parallel (SQ) \end{array}\right\} \Rightarrow (MS) \parallel (SQ) \Rightarrow M, S, Q \text{ alignés}$$

et l'on tombe dans le cas I.2.2.1° où $K = W$, absurde.

* Les seuls cas possibles sont les 4 cas de l'énoncé :

- Cas 1° : $U = I$, $V = J$, $W = K$, et on a donc 3 parallélogrammes et la figure $\mathcal{F}_3^1$. Le cas est celui du I.2.2.1°
- Cas 2° ou 3° ou 4° (aux notations près) : par ex. $I \neq U$, $J = V$ et $K \neq W$.
  Ce cas existe bel et bien, on l'a rencontré au I.2.2.2°. Il n'y en a pas d'autre :

  En effet, $J = V \Rightarrow SNPQ$ parallélogramme $\overset{I.1.3.b}{\Longrightarrow}$ le milieu Γ de $[MQ]$ est sur (SN).
  Comme $SQ = SM$, la bissectrice de $\widehat{QSM}$ sera $(S\Gamma) = (SN) = Sy$.
  Ainsi Sy sera la bissectrice de $\widehat{xSt}$ ie $\widehat{xSy} = \widehat{ySz} + \widehat{zSt}$

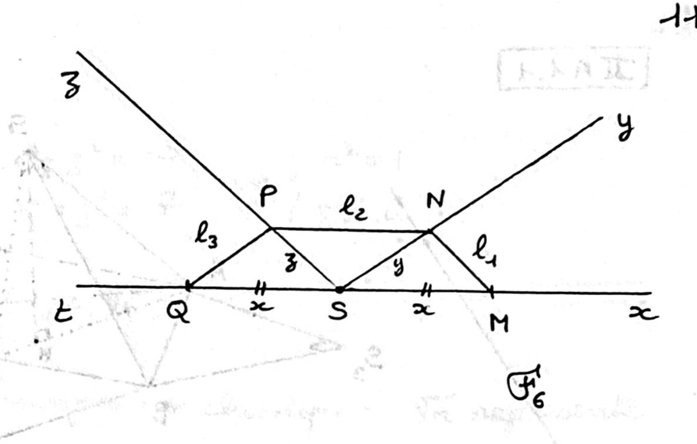
Conclusion : Les 2 cas particuliers du I.2.2 sont les seuls à fournir (p), soit :

Soient M, N, P, Q vérifiant (C_1). Alors :

$$M, N, P, Q \text{ vérifient } (p) \iff \left\{\begin{array}{l} \widehat{xSy} + \widehat{ySz} + \widehat{zSt} = \pi \\ \text{ou} \\ \text{L'un des angles } \widehat{xSy}, \widehat{ySz}, \widehat{zSt} \text{ est somme des 2 autres} \end{array}\right.$$

I.3.1

Si le choix des 3 demi-dtes entraîne l'existence d'une solution M, N, P, Q, les images de ces points par toute homothétie de centre S et de rapport > 0 seront encore solution. On peut donc placer le point M n'importe où.



I.3.2

$$x+y+l_1 = z+y+l_2 = x+z+l_3 = l_1+l_2+l_3$$

d'où $\begin{cases} x+l_1 = z+l_2 \\ x+z = l_1+l_2 \\ y+l_2 = x+l_3 \end{cases}$ $\Rightarrow l_1 = z+l_2-x$

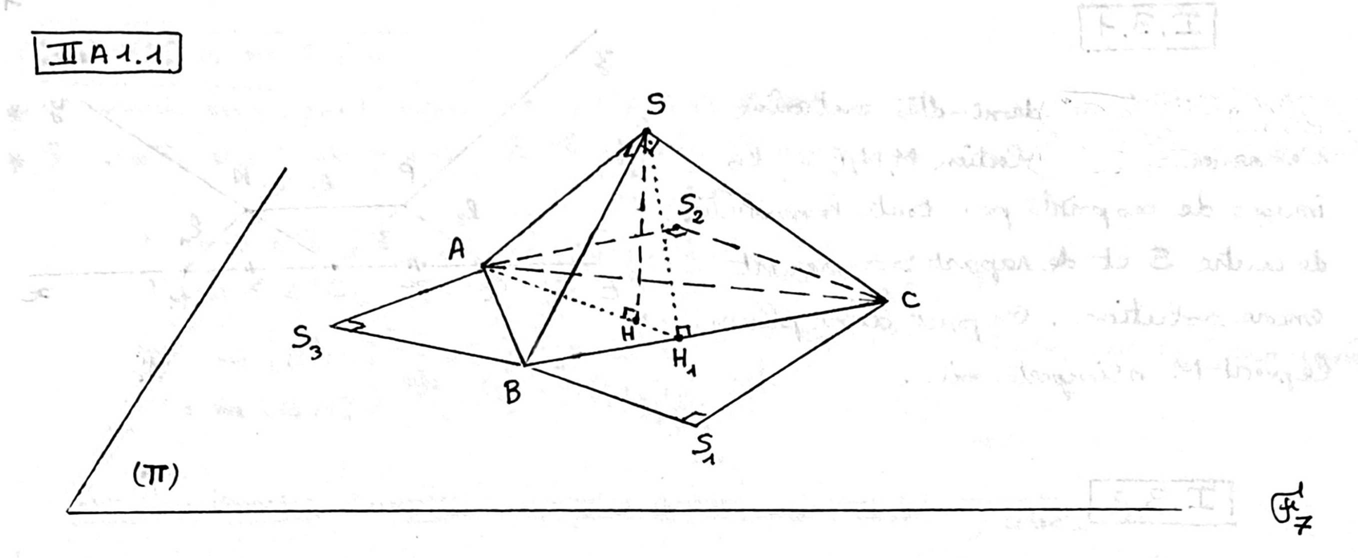
$\Rightarrow x+z = (z+l_2-x)+l_2 \Rightarrow l_2 = x$

puis $\boxed{\begin{cases} l_1 = z \\ l_2 = x \\ y = l_3 \end{cases}}$

Les triangles SMN, SNP et SPQ seront donc isométriques, donc $\widehat{xSt} = \pi$.

Ccl : (C_2) admet une solution (pour n'importe quel choix de M sur Sx) ssi les demi-droites Sx et St sont opposées.

II A 1.1



$\mathcal{F}_7$

* (SH) est perpendiculaire à π, donc orthogonale à toute droite de π, en particulier $(SH) \perp (BC)$. Comme $(SH_1) \perp (BC)$, le plan SHH_1 sera perpendiculaire à (BC), et donc la droite (HH_1) incluse dans ce plan aussi :

$$(HH_1) \perp (BC) \qquad (1)$$

D'autre part (AS) est perpendiculaire à (SB) et à (SC), donc au plan SBC, et donc $(AS) \perp (BC)$. Comme $(SH_1) \perp (BC)$, le plan ASH_1 sera perpendiculaire à (BC) et en particulier :

$$(AH_1) \perp (BC) \qquad (2)$$

(1), (2) et le fait que (AH_1) et (HH_1) soient incluses dans π entraînent :

$$(AH_1) = (HH_1)$$

<u>ie A, H, H_1 alignés</u>

* <u>H sera l'orthocentre de ABC</u>

* On sait que le pied H_1 de la hauteur issue de S du triangle rectangle SBC appartient à l'hypoténuse [BC] (cela provient de $BS^2 = \overline{BH_1}.\overline{BC}$) de sorte que dans le triangle ABC :

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\overline{BH_1}.\overline{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|} \geqslant 0$$

<u>ie $\hat{B}$ est aigu</u>

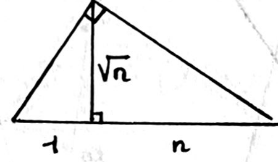
On recommence avec les autres angles.

II.A.1.2

* Posons $\begin{cases} SA = x \\ SB = y \\ SC = z \end{cases}$. On a : $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^2+z^2=10 \\ x^2+z^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-z^2=-5 \\ x^2+z^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ z^2=6 \end{cases}$

d'où $y^2=4$. Finalement $(x,y,z)=(1,2,\sqrt{6})$

* La construction de $\sqrt{n}$ à la règle et au compas est classique : $\sqrt{n}$ représente la hauteur d'un triangle rectangle qui découpe sur l'hypoténuse des segments de longueurs 1 et n :



NB : Reprenons ce calcul dans le cas général.

$$\begin{cases} x^2+y^2=AB^2 \\ y^2+z^2=BC^2 \\ x^2+z^2=AC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{2}(AC^2+AB^2-BC^2) \\ y^2=\frac{1}{2}(BC^2+AB^2-AC^2) \\ z^2=\frac{1}{2}(AC^2+BC^2-AB^2) \end{cases}$$

La construction s'avère possible ssi

$$\begin{cases} AB^2 < AC^2+BC^2 \\ AC^2 < AB^2+BC^2 \\ BC^2 < BA^2+AC^2 \end{cases}$$

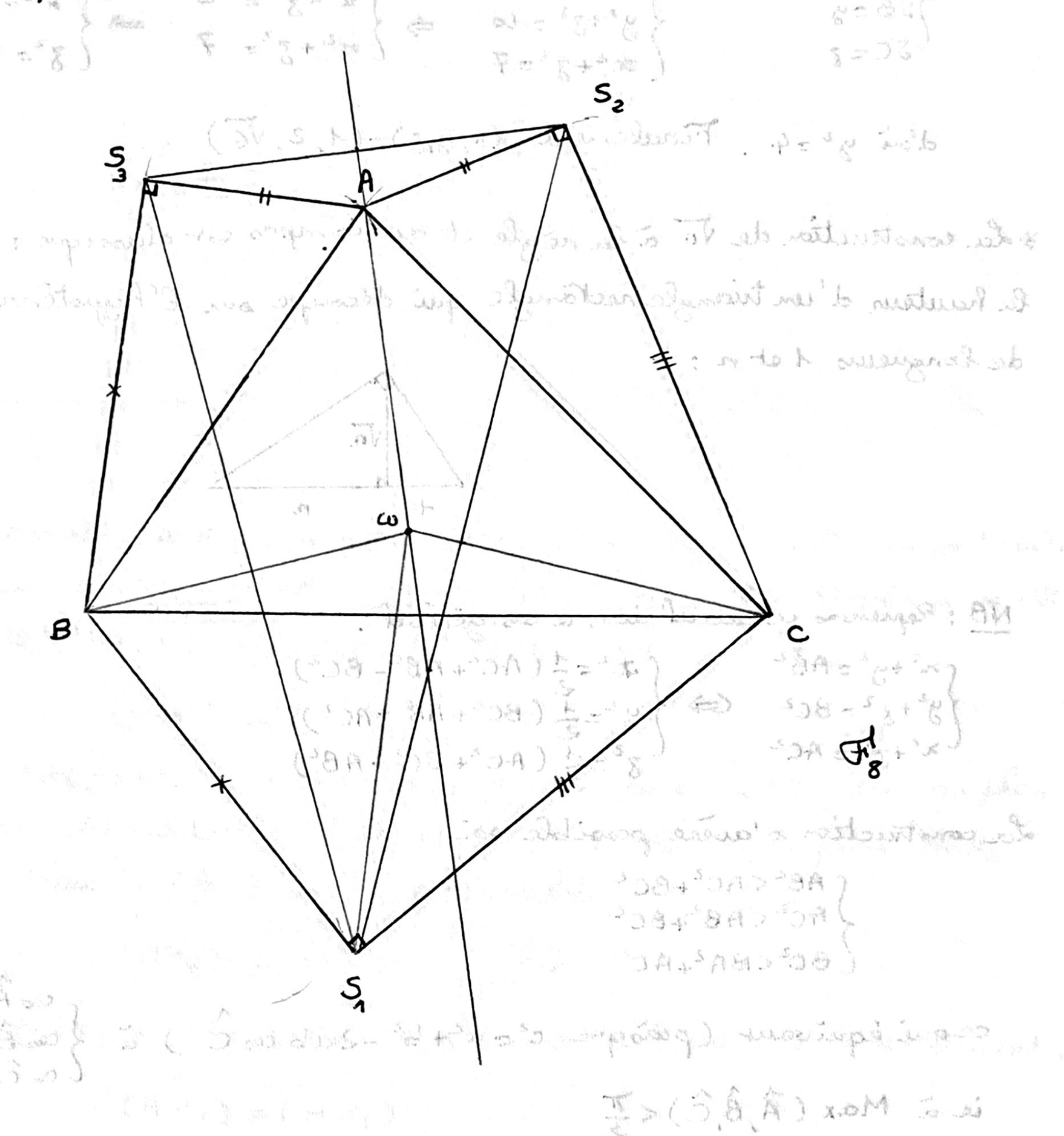
ce qui équivaut (puisque $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$) à $\begin{cases} \cos\hat{A} > 0 \\ \cos\hat{B} > 0 \\ \cos\hat{C} > 0 \end{cases}$,

ie à $\text{Max}(\hat{A},\hat{B},\hat{C}) < \frac{\pi}{2}$

Concluons : On peut construire un tétraèdre trirectangle de base ABC (cf $\mathcal{F}'_7$) ssi les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont strictement aigus.

L'unité étant le cm :

SA = 3 cm	AB ≃ 6,70 cm
SB = 6 cm	BC ≃ 9,48 cm
SC ≃ 7,35 cm	CA ≃ 7,94 cm



II.A.1.3

* (ωC) est la médiatrice de $[S_1S_2]$ donc <u>(S_1C) et (S_2C) sont sym. / à (ωC)</u>

(ωB) " " $[S_1S_3]$ donc <u>(S_1B) et (S_3B) sont sym. / à (ωB)</u>

* (ωA) est la médiatrice de (S_2S_3), et la réflexion d'axe (ωA) transforme la perpendiculaire à (AS_2) passant par S_2, ie (S_2C), en la perpendiculaire à (AS_3) passant par S_3, ie (S_3B).

Ainsi <u>(S_2C) et (S_3B) sont symétriques / à (ωA)</u>.

* D'après ce qui précède :

$s_{\omega B}(S_1B) = (S_3B)$

$s_{\omega A} \circ s_{\omega B}(S_1B) = (S_2C)$

$s_{\omega C} s_{\omega A} s_{\omega B}(S_1B) = (S_1C)$

La composée des 3 réflexions $s_{\omega C} s_{\omega A} s_{\omega C}$ sera une réflexion d'axe passant par ω, et il suffit de vérifier que S_1 est invariant par $s_{\omega C} s_{\omega A} s_{\omega C}$ pour avoir $s_{\omega S_1} = s_{\omega C} s_{\omega A} s_{\omega C}$ qui transforme (S_1B) en (S_1C).

On a : $s_{\omega C} s_{\omega A} s_{\omega C}(S_1) = s_{\omega C} s_{\omega A}(S_3) = s_{\omega C}(S_2) = S_1$.

NB : Par permutation circulaire,

(S_1B) et (S_1C) sont sym. /à (ωS_1)

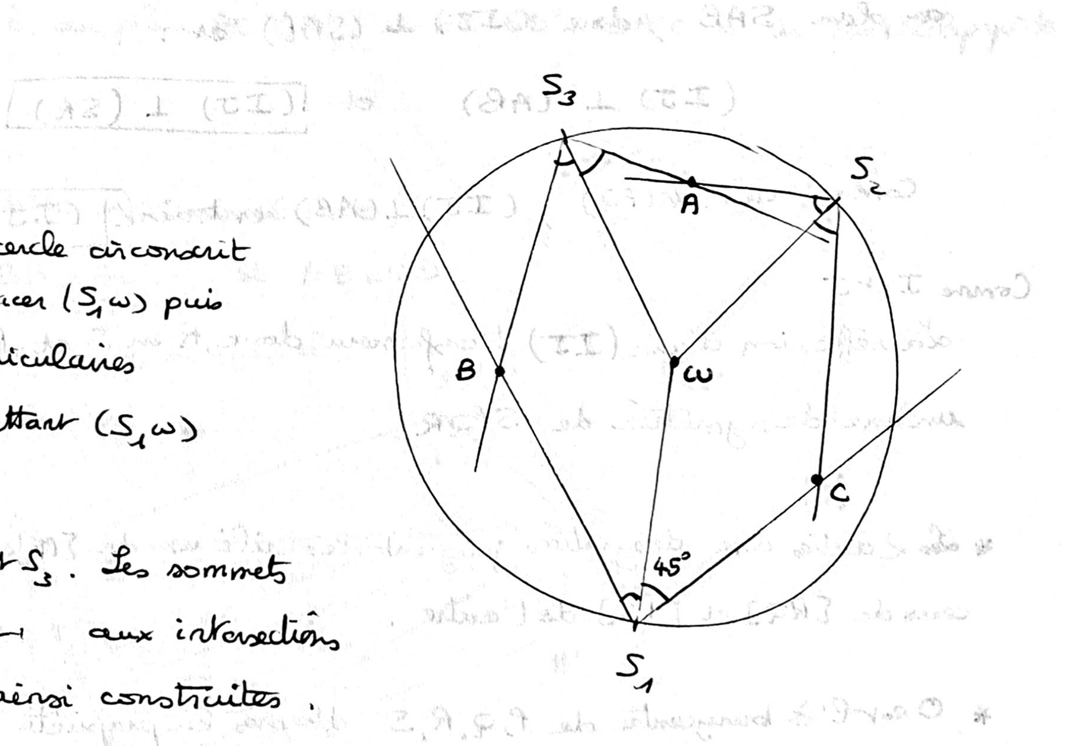
(S_3A) et (S_3B) " (ωS_3)

(S_2A) et (S_2C) " (ωS_2)

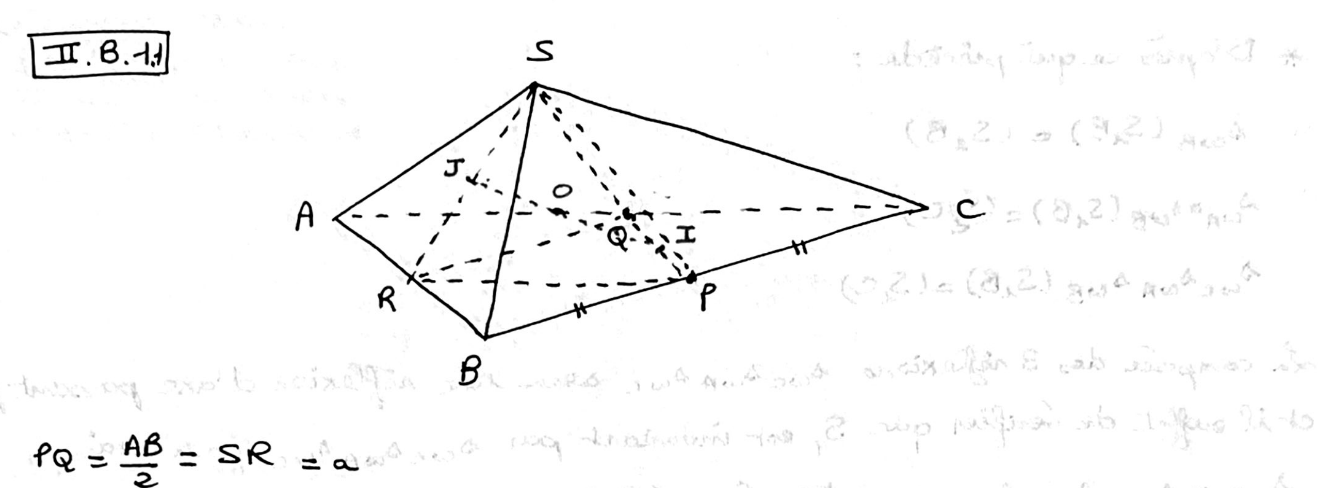
II.A.1.4

Construire le centre de cercle circonscrit à $S_1S_2S_3$, soit ω. Tracer $(S_1\omega)$ puis les 2 demi-dtes perpendiculaires d'origine S_1 et admettant $(S_1\omega)$ comme bissectrice.

Recommencer avec S_2 et S_3. Les sommets A, B et C cherchés sont aux intersections des demi-droites ainsi construites.



II.B.1.1



$PQ = \frac{AB}{2} = SR = a$

De même $RQ = SP = b$ et $PR = SQ = c$.

Les 4 faces de PQRS sont donc isométriques.

II.B.1.2

* I et J sont les milieux de [CR] et [SR] donc (IJ) // (SC).
(SC) étant perpendiculaire aux droites SA et SB, sera orthogonale au plan SAB, donc (IJ) ⊥ (SAB) et :

$(IJ) \perp (AB)$ et $\boxed{(IJ) \perp (SR)}$

Comme (AB) // (PQ), (IJ) ⊥ (AB) entraine $\boxed{(IJ) \perp (PQ)}$

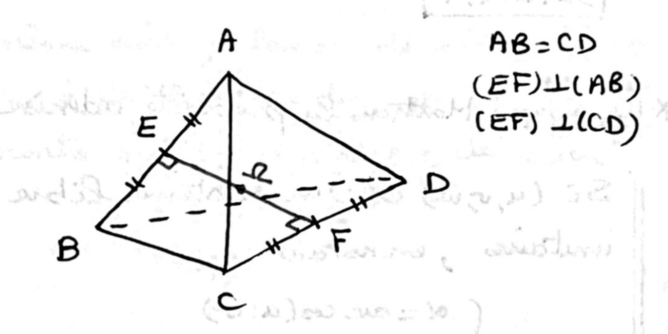
La réflexion d'axe (IJ) transformera donc R en S et P en Q, et sera un axe de symétrie de SPQR

* Les 2 autres axes de symétries joignent les milieux de [PR] et [QS] d'une part, ceux de [RQ] et [PS] de l'autre.

* O est l'isobarycentre de P, Q, R, S d'après la propriété d'associativité du barycentre. De plus (OJ) étant incluse dans le plan médiateur de [SR], on a OS = OR. De même OP = OQ
Il suffit de recommencer en utilisant le fait que O est aussi le milieu des milieux de [SQ] et [PR] pour obtenir OS = OQ et OP = OR, et conclure : <u>O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre SPQR</u>.

II.B.1.3

a)



Milieu de [AB] : E

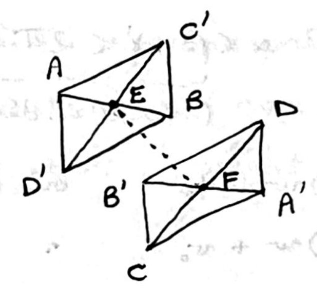
Milieu de [C'D'] $= s_\Omega$(milieu de [CD])

$= s_\Omega(F) = E$

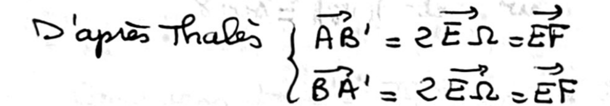
De plus $AB = CD = C'D'$.

Les diagonales [AB] et [C'D'] se coupent en leur milieu ie $AC'BD'$ est un rectangle.

b)



$AC'BD'$
$B'DA'C$ } sont des rectangles.



D'après Thalès $\begin{cases} \overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{E\Omega} = \overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{E\Omega} = \overrightarrow{EF} \end{cases}$

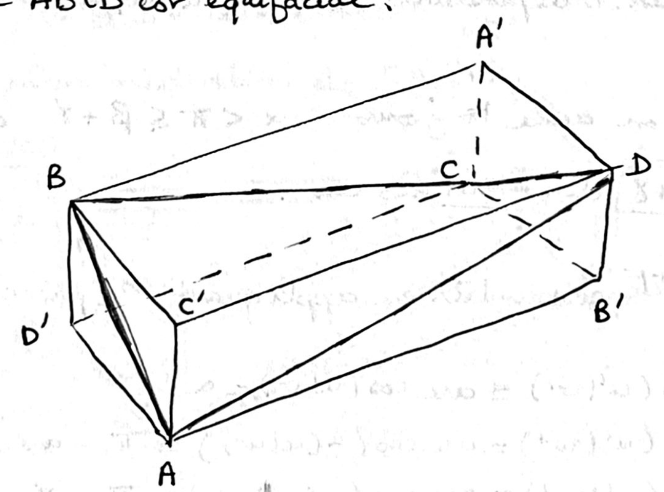
De plus $(AB') // (E\Omega)$ et $(E\Omega)$ est orthogonale à (AB) et à $(C'D')$, donc (AB') sera orthogonale au plan $AC'BD'$, et $AC'BD'B'DA'C$ est un parallélépipède rectangle.

c) Comme $AC'BD'B'DA'C$ est un pavé droit,

$BC = AD = BD = AC$ et $AB = CD$

impliquent que $ABCD$ est équifacial.

d)



II.B.2

* Remarque : Montrons la propriété admise.

Si (u,v,w) est un système libre de vecteurs unitaires, en notant

$$\begin{cases} \alpha = \arccos(u|v) \\ \beta = \arccos(u|w) \\ \gamma = \arccos(v|w) \end{cases}$$

on a : $\alpha < \beta+\gamma < 2\pi - \alpha$

(se sent en développant le tétraèdre)

preuve :

* $\begin{cases} u = (u|w)w + u_0 \\ v = (v|w)w + v_0 \end{cases}$ où u_0 orthogonal à w et $\|u_0\| = \sin\beta$
" v_0 " w et $\|v_0\| = \sin\gamma$

ou encore : $\begin{cases} u = \cos\beta . w + u_0 \\ v = \cos\gamma . w + v_0 \end{cases}$

Cela étant, $\alpha < \beta+\gamma \iff \cos\alpha > \cos(\beta+\gamma)$ si $\beta+\gamma \in [0,\pi]$

et :

$\cos\alpha = (u|v) = (\cos\beta . w + u_0 \mid \cos\gamma . w + v_0) = \cos\beta.\cos\gamma + (u_0|v_0)$
$> \cos\beta.\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta+\gamma)$

d'après Cauchy-Schwartz, l'inégalité étant stricte puisque u_0 et v_0 sont lin. indépendants (sinon u, v, w liés !)

* Si $\beta+\gamma \geq \pi$, on aura toujours $\alpha < \pi \leq \beta+\gamma$ ce qui assure l'inégalité $\boxed{\alpha < \beta+\gamma}$ dans tous les cas.

* La seconde inégalité se montre en appliquant la précédente à $\begin{cases} u' = -u \\ v' = -v \\ w' = w \end{cases}$.

Alors : $\begin{cases} \alpha' = \arccos(u'|v') = \arccos(u|v) = \alpha \\ \beta' = \arccos(u'|w') = \arccos(-(u|w)) = \pi - \arccos(u|w) = \pi - \beta \\ \gamma' = \arccos(v'|w') = \arccos(-(v|w)) = \pi - \gamma \end{cases}$

$\alpha' < \beta' + \gamma'$ devient : $\alpha < (\pi-\beta) + (\pi-\gamma)$

$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ CQFD

* Si les 4 faces d'un tétraèdre ont la même aire, alors son développement est une figure comme celles envisagées à la Ière partie et vérifiant les contraintes (C_1) et (p). I.2.4 montre que la figure est de l'un des 2 types suivants :

- $\widehat{xSy} + \widehat{ySz} + \widehat{zSt} = \pi$ (1)

ou

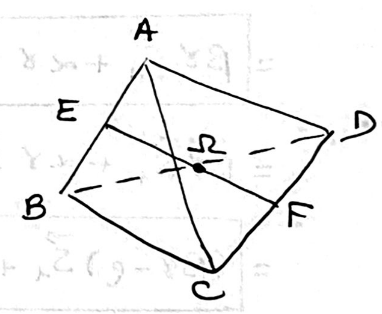
- l'un des angles $\widehat{xSy}, \widehat{ySz}, \widehat{zSt}$ est la somme des 2 autres. (2)

(2) est à éliminer (car $\alpha < \beta + \gamma$ d'après la remarque précédente) de sorte que le développement du tétraèdre soit de la forme $\mathcal{F}_3'$ correspondant à (1), et que les faces SMN, SNP, SPQ et PNL soient isométriques (II.1.3.b.2°)

<u>Concluons donc à II.B.2.1 et II.B.2.2 :</u>

Le tétraèdre est équifacial ssi ses 4 faces ont la même aire.
Dans ce cas, son développement est donné par la figure $\mathcal{F}_3'$ et :

$$\widehat{xSy} + \widehat{ySz} + \widehat{zSt} = \pi$$



II.B.3.1

Ω et E étant à égale distance de A et B, ils appartiendront au plan médiateur de [AB], donc <u>(AB) ⊥ (EΩ)</u>.

De même <u>(CD) ⊥ (FΩ)</u>.

Par associativité du barycentre, Ω sera l'isobarycentre de E(2), F(2) i.e le milieu de [EF]. Ω, E, F seront donc alignés et ce qui précède donne :

<u>(EF) orthogonal à (AB) et à (CD)</u>

On en déduit 3.1 puis E (resp. F) est milieu de [AB] (resp. [CD])

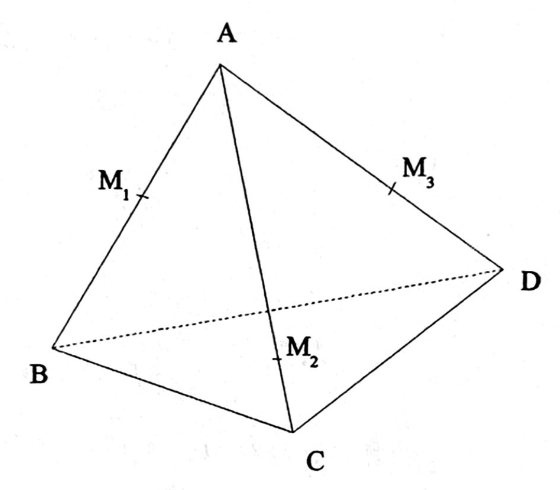
II.B.3.2

II.B.3.1 entraîne $AC = BD$. De même $AB = CD$, et il suffit d'appliquer II.B.1.3.

III.1

$$\begin{aligned} 2\vec{S}_4 &= \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \wedge \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \\ &= 2\vec{S}_2 + 2\vec{S}_3 + 2\vec{S}_1 \end{aligned}$$

d'où $\vec{S}_4 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$.



III.2.1

▶

$$\begin{aligned} 2\vec{T} &= \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} \\ &= \left(\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM_2}\right) \wedge \left(\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM_3}\right) \\ &= \overrightarrow{M_1A} \wedge \overrightarrow{AM_3} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \overrightarrow{AM_3} \\ &= -\alpha\gamma\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} - \beta\alpha\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} + \beta\gamma\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \\ &= 2\alpha\gamma\vec{S}_2 + 2\beta\alpha\vec{S}_3 + 2\beta\gamma\vec{S}_1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \beta\gamma\vec{S}_1 + \alpha\gamma\vec{S}_2 + \alpha\beta\vec{S}_3 \\ &= \beta\gamma\vec{S}_1 + \alpha\gamma\vec{S}_2 + \alpha\beta\vec{S}_3 + \rho\left(\vec{S}_4 - \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3\right) \\ &= (\beta\gamma - \rho)\,\vec{S}_1 + (\gamma\alpha - \rho)\,\vec{S}_2 + (\alpha\beta - \rho)\,\vec{S}_3 + \rho\vec{S}_4. \end{aligned}$$

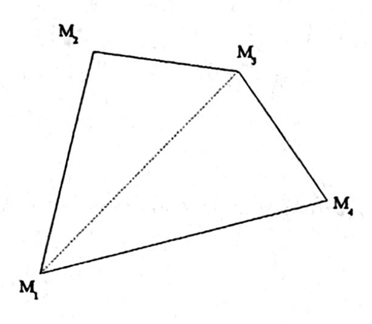
▶ Posons $M = \text{Max}\left(\left\|\vec{S}_1\right\|, \left\|\vec{S}_2\right\|, \left\|\vec{S}_3\right\|, \left\|\vec{S}_4\right\|\right)$. Quitte à changer les notations $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, α, β, γ, on peut supposer (sans restreindre la généralité) que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ et prendre alors $\rho = \alpha\beta$. Avec ce choix $\rho = \alpha\beta \leq \alpha\gamma$ et $\rho = \alpha\beta \leq \beta\gamma$, et l'inégalité précédente entraîne

$$\begin{aligned} \left\|\vec{T}\right\| &\leq ((\beta\gamma - \rho) + (\gamma\alpha - \rho) + (\alpha\beta - \rho) + \rho)\,M \\ &\leq (\beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta)\,M \\ &\leq (\gamma\,(\beta + \alpha) - \beta\alpha)\,M \\ &\leq (\gamma - \alpha)\,(\gamma - \beta)\,M \leq M. \end{aligned}$$

III.2.2 , $\left\|\overrightarrow{S}_1\right\|$ représente l'aire du triangle ACD, d'où l'énoncé désiré lorsque le plan coupe seulement trois arêtes du tétraèdre.

III.3.1 , $\left\|\overrightarrow{Q}\right\|$ représente l'aire du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$.En effet

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{Q}\right\| &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M_1M_3}\wedge\overrightarrow{M_2M_4}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M_1M_3}\wedge\overrightarrow{M_2M_1}+\overrightarrow{M_1M_3}\wedge\overrightarrow{M_1M_4}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}+\overrightarrow{M_1M_3}\wedge\overrightarrow{M_1M_4}\right\|.\end{aligned}$$



Comme le quadrilatère est convexe, $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}\right)$ et $\left(\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_4}\right)$ ont même orientation, et les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}\wedge\overrightarrow{M_1M_4}$ seront colinéaires et de même sens. Par suite

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{Q}\right\| &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}\right\|+\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M_1M_3}\wedge\overrightarrow{M_1M_4}\right\| \\ &= \text{Aire}\,(M_1M_2M_3)+\text{Aire}\,(M_1M_3M_4)=\text{Aire}\,(M_1M_2M_3M_4)\,.\end{aligned}$$

III.3.2

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{Q} &= \overrightarrow{M_1M_3}\wedge\overrightarrow{M_2M_4} \\ &= \left(\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM_3}\right)\wedge\left(\overrightarrow{M_2A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM_4}\right) \\ &= \left(-\alpha\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC}\right)\wedge\left(-\beta\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{DB}\right) \\ &= \left(-\alpha\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\,\overrightarrow{AD}\right)\wedge\left(\mu\overrightarrow{AB}-\beta\overrightarrow{AC}+(1-\mu)\,\overrightarrow{AD}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\overrightarrow{Q}=(\lambda\,(1-\mu)+\beta\,(1-\lambda))\,\overrightarrow{S}_1+(\mu\,(1-\lambda)+\alpha\,(1-\mu))\,\overrightarrow{S}_2+(\alpha\beta-\lambda\mu)\,\overrightarrow{S}_3.$$

On obtient bien $\overrightarrow{Q}=k_1\overrightarrow{S}_1+k_2\overrightarrow{S}_2+k_3\overrightarrow{S}_3$ avec

$$\begin{cases} k_1=\lambda\,(1-\mu)+\beta\,(1-\lambda) \\ k_2=\mu\,(1-\lambda)+\alpha\,(1-\mu) \\ k_3=\alpha\beta-\lambda\mu.\end{cases}$$

Les réels k_1 et k_2 sont bien positifs, et l'on vérifie que $1-k_1-k_2+k_3=(1-\alpha-\lambda)\,(1-\beta-\mu)$.

Enoncé de la Première Composition

du Capes Interne 1991

Ce problème propose l'étude de suites de nombres réels et de suites de nombres complexes définies par des relations de récurrence analogues (parties I et III).

La partie II rattache au nombre π certaines des suites étudiées au I et donne des méthodes de calcul approché de π.

Dans la partie III, on définit les fonctions racine carrée et argument cosinus hyperbolique sur $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, fonctions que l'on utilise dans l'étude des suites complexes envisagées.

I. Étude de suites réelles

L'objectif de cette partie est l'étude de suites adjacentes.

1. On désigne par $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de réels définie par la relation de récurrence :

(1) $$C_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + C_n}{2}}$$

et la donnée de son premier terme C_0, $C_0 \geqslant -1$.

a. Construire, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

b. Étudier, suivant la valeur de C_0, le comportement de la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$: monotonie, convergence, limite. Chaque cas sera illustré par un graphique.

2. On définit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs par les relations de récurrence :

(2) $$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}} \end{cases}$$

et la donnée des premiers termes a_0 et b_0 strictement positifs.

a. Étudier le cas $a_0 = b_0$. Dans la suite, on suppose $a_0 \neq b_0$.

b. Proposer une construction géométrique de a_1 et b_1 connaissant a_0 et b_0 dans chacun des cas $a_0 < b_0$ et $a_0 > b_0$.

c. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. Suite auxiliaire.

On pose, pour tout entier naturel n, $\gamma_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (1) et que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1}$.

4. Limite des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. On suppose $a_0 < b_0$.

Soit α le réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ défini par $\gamma_0 = \cos \alpha$.

Montrer que :

$$\gamma_1 = \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = b_0 \frac{\sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Donner les expressions, en fonction de n, α et b_0, de γ_n, b_n et a_n.

Montrer que la limite commune aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $b_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

b. On suppose $a_0 > b_0$.

Soit α le réel positif défini par $\gamma_0 = \operatorname{ch} \alpha$. Par une démarche analogue à la précédente, déte limite commune aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On rappelle que, pour tout réel α,

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}), \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}), \quad \operatorname{sh} \alpha = 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{ch} \alpha = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}}{2}(b_n - a_n).$$

En déduire, dans le cas où $a_0 < b_0$, que, pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(b_n - a_n) \qquad \text{puis que} \qquad b_n - a_n \leqslant \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0).$$

6. On prend :

$$a_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \qquad b_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

et on pose, pour tout entier naturel n,

$$p_n = \frac{1}{b_n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_n = \frac{1}{a_n}.$$

a. En utilisant l'algorithme décrit au 3. et en s'aidant de la calculatrice, calculer p_n et P_n pour les vale 3, 4, 5 de n. On en donnera des valeurs approchées à 10^{-4} près que l'on présentera dans un table

Montrer que les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers π.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant \mathrm{P}_n - p_n \leqslant \frac{1}{4^n} \times 3\sqrt{3} \qquad \text{puis que} \qquad 0 \leqslant \pi - p_n \leqslant \frac{1}{4^n} \times 3\sqrt{3}.$$

À partir de quel rang n_0 est-on assuré que p_n approche π à moins de 10^{-8} près ?

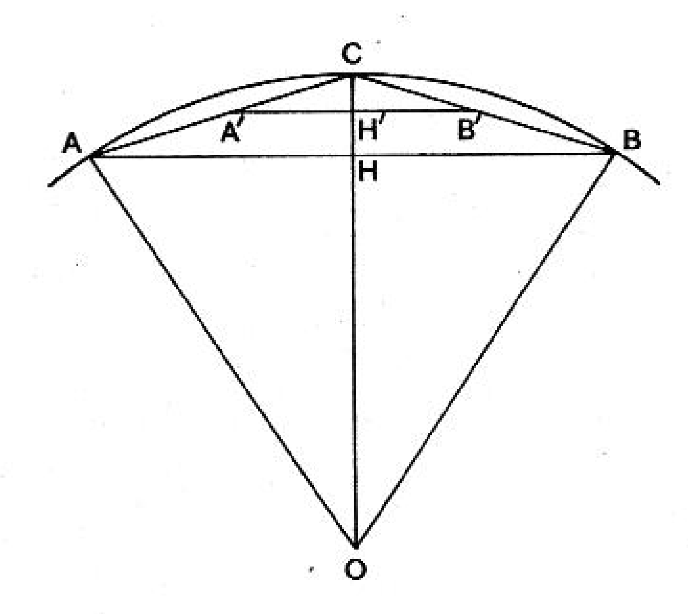
II. CALCUL APPROCHÉ DE π PAR LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE

A. Interprétation géométrique des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. On désigne par r_k et R_k le rayon respectivement du cercle inscrit et du cercle circonscrit à un p convexe régulier à k côtés de périmètre 2. Utilisant la configuration ci-dessous où la corde AB du c centre O représente le côté de ce polygone convexe régulier à k côtés, où C est le milieu de l'arc AB,

les milieux des segments [AC] et [BC], H et H' les intersections de la droite (OC) avec les droites (AB) et (A'B'), établir qu'on a, pour $k \geqslant 3$,

(3) $$2\, r_{2k} = r_k + R_k \qquad \text{et} \qquad R_{2k}^2 = r_{2k}\, R_k .$$



2. On désigne par l_k et L_k les demi-périmètres des polygones convexes réguliers à k côtés respectivement inscrit et circonscrit au cercle unité.

   En utilisant une homothétie convenable, montrer que :

$$l_k = \frac{1}{R_k}, \qquad L_k = \frac{1}{r_k}.$$

   Déduire de (3) qu'on a, pour $k \geqslant 3$,

(4) $$\frac{1}{L_{2k}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_k} + \frac{1}{l_k}\right) \qquad \text{et} \qquad l_{2k} = \sqrt{L_{2k}\, l_k}$$

3. Établir, indépendamment des résultats précédents, qu'on a pour $k \geqslant 3$,

(5) $$l_k = k \sin\frac{\pi}{k} \qquad \text{et} \qquad L_k = k \tan\frac{\pi}{k}.$$

4. Comment rattacher à cette étude celle des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies au paragraphe I.6. ?

B. Accélération de la convergence

Les notations sont celles du paragraphe I.6.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$p_n = 3 \times 2^n \sin\frac{\pi}{3 \times 2^n} \qquad \text{et} \qquad P_n = 3 \times 2^n \tan\frac{\pi}{3 \times 2^n}.$$

2. Déterminer les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ telles que :

$$p_n = \pi + \frac{\lambda_1}{4^n} + \frac{\lambda_2}{4^{2n}} + \frac{\lambda_3}{4^{3n}} + o\left(\frac{1}{4^{3n}}\right)$$

$$P_n = \pi + \frac{\mu_1}{4^n} + \frac{\mu_2}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

On rappelle, qu'au voisinage de 0,

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + o(u^7)$$

$$\operatorname{tg} u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2}{15}u^5 + o(u^5).$$

3. On pose :

$$u_n = \frac{1}{3}(2p_n + P_n)$$

$$v_n = \frac{1}{3}(4p_{n+1} - p_n).$$

Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n - \pi \sim \frac{\pi^5}{5 \times 3^4 \times 4^{2n+1}} \qquad \text{et} \qquad v_n - \pi \sim \frac{-\pi^5}{5!}\,\frac{1}{3^4 \times 4^{2n+1}}.$$

4. À partir du tableau dressé au paragraphe I.6., donner des valeurs approchées de u_n et v_n pour les val 1, 2, 3, 4 de n en précisant l'approximation. On présentera les résultats dans un nouveau tableau.

5. À partir de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, construire une suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ permettant une nouvelle amélioration c convergence, en définissant w_n comme barycentre de v_n et v_{n+1} avec des coefficients indépendants d

III. ÉTUDE DE SUITES DE NOMBRES COMPLEXES

Définition préliminaire. On prolonge à $\mathbf{C}$ la définition de la racine carrée d'un nombre réel positif manière suivante :

- si z est réel négatif, on pose $\sqrt{z} = i\sqrt{|z|}$ (ainsi $\sqrt{-1} = i$),
- sinon $\sqrt{z}$ est le nombre complexe de carré z dont la partie réelle est positive.

Vérifier que, dans ce dernier cas, $\sqrt{z} = \dfrac{z + |z|}{\sqrt{z + \bar{z} + 2|z|}}$.

Le plan $\mathscr{P}$ orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considére dan plan les points A, M, N d'affixes respectives $1, z, \sqrt{z}$.

Pour z non nul, vérifier l'égalité $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})\ (2\pi)$.

Montrer que le point N appartient à l'angle saillant $\widehat{AOM}$.

On désigne par $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de complexes définie par la relation de récurrence

$$\gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\gamma_n}{2}}$$

et la donnée de son premier terme $\gamma_0, \gamma_0 \neq 1$, et par $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les suites de complexes déf par leurs premiers termes $a_0 = \gamma_0$, $b_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$b_{n+1} = b_n\gamma_{n+1}, \qquad a_{n+1} = b_{n+1}\gamma_{n+1}.$$

A. Étude des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Vérifier, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \qquad b_{n+1}^2 = b_n a_{n+1}.$$

2. *Exemple :*

On choisit ici $\gamma_0 = -1 + 4i$. Calculer, avec éventuellement une précision de 10^{-3} sur les parties réelles et imaginaires, les termes $\gamma_1, \gamma_2, a_1, a_2, b_1, b_2$ de ces suites et placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ d'affixes respectives $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$.

3. Pour étudier la convergence des suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est commode, par extension de l'étude faite dans le cas réel au paragraphe I.4., d'introduire les fonctions hyperboliques sur $\mathbb{C}$.

Pour tout complexe z, de partie réelle x et de partie imaginaire y, on pose :

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y;$$
$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y;$$
$$\operatorname{ch} 2z = 2\operatorname{ch}^2 z - 1, \qquad \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \qquad |\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y - 1.$$

(Il est inutile de vérifier ces résultats qui seront admis.)

a. Soit γ un nombre complexe.

Montrer que, si z est solution sur $\mathbb{C}$ de l'équation $\gamma = \operatorname{ch} z$, e^z prend l'une ou l'autre de deux valeurs Z_1 et Z_2 inverses l'une de l'autre.

Montrer que l'équation $\gamma = \operatorname{ch} z$ a une solution et une seule $z = x + iy$ pour laquelle :

$$(x, y) \in (\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]) \cup (\{0\} \times [0, \pi]).$$

Cette solution est notée $\operatorname{Arg\,ch} \gamma$.

Étudier le cas où γ est réel.

b. On pose $z_0 = \operatorname{Arg\,ch} \gamma_0$ (on a supposé γ_0 différent de 1 donc z_0 n'est pas nul).

Montrer, pour tout naturel n :

$$\gamma_n = \operatorname{ch} \frac{z_0}{2^n}, \qquad b_n = \frac{\operatorname{sh} z_0}{2^n \operatorname{sh} \frac{z_0}{2^n}}$$

et vérifier :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{ch} \frac{z_0}{2^n} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(2^n \operatorname{sh} \frac{z_0}{2^n}\right) = z_0.$$

Conclure : les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite L.

Retrouver, pour γ_0 réel convenable, les résultats du paragraphe I.4.

B. Étude des suites des arguments

On pose $z_0 = u + iv$ où u et v sont des nombres réels. On désigne par A_n et B_n les images respectives de a_n et b_n dans le plan $\mathscr{P}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, A_{n+1} se trouve dans l'angle saillant $\widehat{A_n O B_n}$.

2. Pour tout nombre complexe Z non nul, on note Arg Z l'argument de Z appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$
Ainsi, en se reportant à la définition de z_0, on constate que $\text{Arg } e^{z_0} = v$.
Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$|\text{Arg } \gamma_n| \leqslant \frac{\pi}{2^n}$$

et que $\text{Arg } \gamma_n$ a même signe que v.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, B_{n+1} se trouve dans l'angle saillant $\widehat{A_{n+1}OB_n}$.

4. Préciser le comportement des deux suites $(\text{Arg } a_n)_{n \in N}$ et $(\text{Arg } b_n)_{n \in N}$.

5. Dans le cas où $|\text{Arg } \gamma_0| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, comparer b_{n+1} et $\sqrt{b_n a_{n+1}}$.

C. Étude des suites des modules

u et v sont définis comme au titre B.

1. Étude d'une configuration.

On désigne, dans le plan $\mathscr{P}$, par D le disque fermé de centre O et de rayon 1 et par Δ le disque fermé de mètre $[OA]$. On rappelle que A est le point d'affixe 1.

Au point P intérieur à D, on associe :
- le point P′ milieu du segment $[AP]$;
- le point Q situé dans l'angle saillant $\widehat{AOP'}$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}) = (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP'})\ (2\pi)$ et $OQ = \sqrt{OP'}$
- le point Q′ milieu du segment $[AQ]$.

Montrer que :
- les points P′ et Q sont intérieurs à Δ ;
- l'angle $\widehat{OQA}$ est obtus ;
- $OQ < OQ' < OA$.

Quelles sont les affixes des points P′ et Q si P a pour affixe γ_{n-1} $(n \geqslant 1)$?

2. On suppose $u \geqslant |v|$.

Montrer que, pour tout entier n, $|\gamma_n| > 1$, que la suite $(|b_n|)_{n \in N}$ est croissante, la $(|a_n|)_{n \in N}$ décroissante et que ces deux suites sont adjacentes.

3. On suppose les conditions suivantes réalisées :

$$0 \leqslant u < |v|, \qquad |\gamma_0| < 1.$$

Montrer que, pour tout n, $|\gamma_n| < 1$, que la suite $(|b_n|)_{n \in N}$ est décroissante et que la suite $(|a_n|)_{n \geqslant 1}$ croissante.

On pourra utiliser les résultats de la question 1 en remarquant par exemple que A_n est l'image de B_n dai similitude de centre O associée au nombre complexe γ_n.

4. On suppose seulement $0 \leqslant u < |v|$.

On définit, pour t réel, $\psi(t) = \text{sh}^2(tu) - \sin^2(tv)$. Déterminer le signe de ψ au voisinage de 0.

Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0, les résultats de la question 3 sont encore valables.

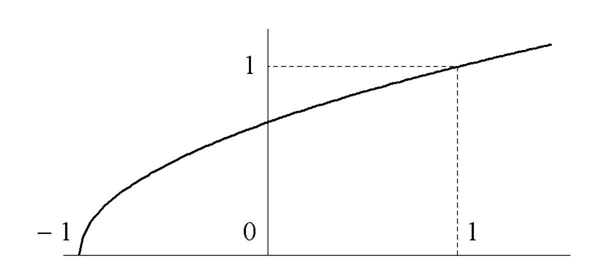
Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

Cl. Piquet
07.12.96

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1991

I. Étude de suites réelles

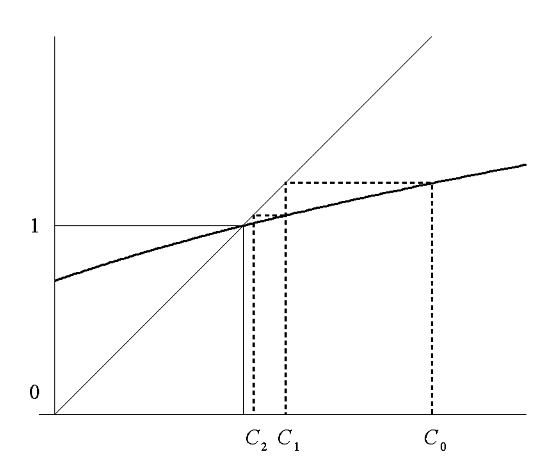
1.a. La fonction f est monotone croissante sur $[-1,\infty[$, dérivable sur $]-1,\infty[$. La courbe représentative de f possède une tangente verticale au point $(-1,0)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ tandis que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$: l'axe Ox est direction asymptotique de la courbe et la branche infinie est une branche parabolique.



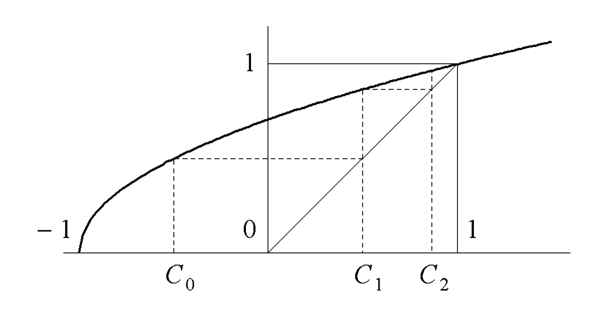
1.b. - i). Si $C_0=1$, il est immédiat que $C_n=1$ pour tout $n\in N$: la suite (C_n) est stationnaire, donc monotone.

- ii). Si $C_0>1$, on a $1<\dfrac{1+C_0}{2}<C_0$ donc $1<C_1^2<C_0$ d'où $1<C_1<C_1^2<C_0$. Comme f est strictement croissante, on a $f(1)<f(C_1)<f(C_0)$ ou $1<C_2<C_1$ et une récurence immédiate montre que $1<C_{n+1}<C_n$: (C_n) est décroissante minorée, donc convergente. Si C désigne sa limite, on a $C=\sqrt{\dfrac{1+C}{2}}$ car f est continue, donc $2C^2=C+1$ ou encore $(C-1)(2C+1)=0$ donc $C=1$ puisque $C\geq 1$:

(C_n) converge en décroissant vers 1.



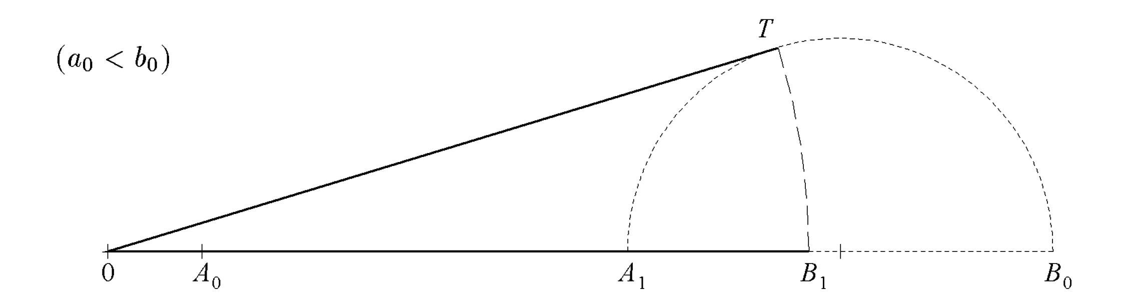
- iii). Si $-1\leq C_0<1$, on a $C_0<\dfrac{1+C_0}{2}<1$ d'où $C_0<C_1^2<1$ et donc $C_0<C_1^2<C_1<1$ (on note que $C_1>0$ car f est à valeurs positives) ; on voit comme précédemment que (C_n) est monotone croissante et majorée par 1. Si C est la limite de cette suite, on a encore $(C-1)(2C+1)=0$ donc $C=1$ puisque $C>C_1\geq 0$.



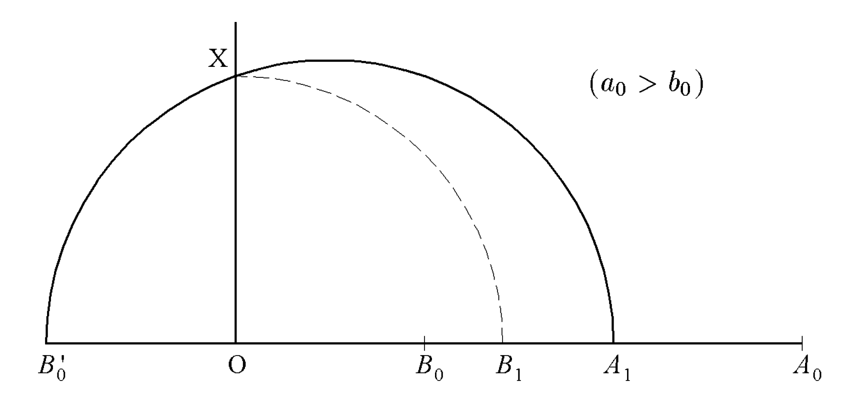
2. On vérifie immédiatement que $b_n a_{n+1} > 0$, donc (b_n) est parfaitement définie.

2.a. Si $a_0 = b_0$ on a $a_1 = a_0$ et $b_1 = a_0$; on vérifie, par récurrence, que $a_n = b_n = a_0$ pour tout n entier ≥ 0. En effet, si $a_n = b_n$, on a $a_{n+1} = a_n$ donc $b_{n+1} = a_n$ et $a_{n+1} = b_{n+1} = a_n = a_0$.

2.b. On commence par placer sur une demi-droite Ox les points A_0 et B_0 aux distances respectives a_0 et b_0. On construit alors le point A_1 milieu du segment A_0B_0 ; la distance au point O de A_1 est a_1. On peut interpréter le produit b_0a_1 comme valeur de la puissance du point O par rapport au cercle de diamètre A_1B_0 ; il suffit alors de construire l'une des tangentes à ce cercle qui passe par O, et la distance de O à son point de contact T sera égale à b_1 car $b_1^2 = b_0a_1$. L'avantage de cette construction est sa symétrie relativement au rôle joué par A_0 et B_0, son inconvénient est la faible précision de la construction si le segment A_0B_0 est "petit".



On peut aussi lire $b_1^2 = b_0a_1$ comme une égalité remarquable dans un triangle rectangle : si b_1 est la longueur de la hauteur abaissée sur l'hypothénuse et si les distances du pied de cette hauteur aux deux côtés voisins sont respectivement a_1 et b_0, cette relation est vérifiée, d'où la construction suivante : on place comme précédemment les points O, A_0 et B_0, et l'on construit le milieu A_1 du segment A_0B_0. Si $a_0 > b_0$, on construit le symétrique B_0' de B_0 par rapport à O. Le cercle de diamètre A_1B_0' coupe la perpendiculaire Oy en O à Ox en un point X tel que $OX^2 = OB'.OA_1$. Il suffit alors de reporter cette longueur sur Ox pour obtenir le point B_1 distant de b_1 de O.



2.c. Si $b_n < a_n$, on a $b_n < a_{n+1} < a_n$ donc $b_n < b_{n+1} < a_{n+1}$. L'inégalité $b_n < a_n$ implique donc $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$.

De même, si $b_n > a_n$, on obtient $b_n > b_{n+1} > a_{n+1} > a_n$. Il en résulte que si $b_0 < a_0$, une récurrence immédiate donne

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_n < \cdots < a_n < \cdots < a_1 < a_0$$

donc (a_n) (resp.(b_n)) est strictement décroissante minorée (resp. croissante majorée). Ces deux suites convergent donc respectivement vers a et b tels que $a = \frac{1}{2}(a+b)$ soit $a = b$: les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. L'hypothèse $a_0 < b_0$ conduit à une conclusion analogue : (a_n) (resp.(b_n)) est strictement croissante majorée (resp. décroissante minorée) et ces deux suites ont même limite.

3. γ_n existe puisque $b_n > 0$ pour tout $n \in N$. On calcule

$$\gamma_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a_n + b_n)a_{n+1}}{b_n a_{n+1}} = \frac{1}{2}(1+\gamma_n)$$

d'où $\gamma_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\gamma_n}{2}}$ $(\gamma_{n+1} > 0)$: $\forall n \in N$, $b_n\gamma_{n+1} = b_n \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = b_{n+1}$; ce qui est la relation demandée.

4.a. $a_0 < b_0$ implique (d'après le 2))

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_1 < b_0 \,.$$

On a $\gamma_1 = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = |\cos\dfrac{\alpha}{2}| = \cos\dfrac{\alpha}{2}$ puisque $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$; donc

$$b_1 = b_0\gamma_1 = b_0 \cos\frac{\alpha}{2} = b_0 \frac{\sin\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} \,.$$

On a donc $\gamma_0 = \cos\alpha$, $b_0 = b_0$, $a_0 = b_0\cos\alpha$.

$$\gamma_1 = \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad b_1 = b_0\frac{\sin\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad a_1 = \gamma_1 b_1 = b_0 \frac{\sin\alpha}{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}$$

On vérifie par récurrence que

$$\gamma_n = \cos\frac{\alpha}{2^n}, \qquad b_n = b_0\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}, \qquad a_n = \gamma_1 b_1 = b_0 \frac{\sin\alpha}{2^n\tan\dfrac{\alpha}{2^n}}$$

Ces formules sont vérifiées pour $n = 0$ et 1. Supposons les exactes pour un entier n. Alors $\gamma_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos\dfrac{\alpha}{2^n})} = \cos\dfrac{\alpha}{2^{n+1}}$ (car $\dfrac{\alpha}{2^{n+1}} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$), donc

$$b_{n+1} = b_n\gamma_{n+1} = b_0 \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}} \cdot \cos\frac{\alpha}{2n+1} = b_0 \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin\dfrac{\alpha}{2^{n+1}}}$$

et $a_{n+1} = b_{n+1}\gamma_{n+1}$ donne $a_{n+1} = b_0 \dfrac{\sin\alpha}{2^{n+1}\tan\dfrac{\alpha}{2^{n+1}}}$.

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\tan x}{x} = 1$; on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(b_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\dfrac{\alpha}{2^n}}{\tan\dfrac{\alpha}{2^n}} \right) = b_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad \text{et de même} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b_0\frac{\sin\alpha}{\alpha} \,.$$

4.b. Si $a_0 > b_0$, il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $\operatorname{ch} a = \gamma_0 > 1$. On a immédiatement $\gamma_1 = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch}\alpha}{2}} = \operatorname{ch}\dfrac{\alpha}{2}$, $b_1 = b_0 \operatorname{ch}\dfrac{\alpha}{2} = b_0 \dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{2\operatorname{sh}\dfrac{\alpha}{2}}$ et $a_1 = b_1\gamma_1 = b_0\dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{2\operatorname{th}\dfrac{\alpha}{2}}$

On vérifie, comme précédemment (récurrence) que, pour tout n,

$$\gamma_n = \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2^n}, \qquad b_n = b_0\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2^n\operatorname{sh}\dfrac{\alpha}{2^n}}, \qquad a_n = b_0\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2^n\operatorname{th}\dfrac{\alpha}{2^n}}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x} = \lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}}\dfrac{\operatorname{th}x}{x} = 1$, on obtient comme précédemment,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = b_0\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}.$$

5. On a $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = (b_n - a_{n+1})a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}(b_n - a_n)$. Si $a_0 < b_0$, on sait (quest. 4.a.) que $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$ et que $b_{n+1} + a_{n+1} > 2a_{n+1}$ donc $0 < b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{4}(b_n - a_n)$, car $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = (b_{n+1} - a_{n+1})(b_{n+1} + a_{n+1})$ d'où $\forall n \in N$, $0 < b_n - a_n < \dfrac{1}{4^n}(b_0 - a_0)$.

6.a. $a_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < b_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. On a donc $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ d'où $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Il résulte du 4.a. que

$$p_n = \frac{1}{b_n} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2^n\sin\dfrac{\pi}{3\times 2^n}}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = (3\times 2^n)\sin\frac{\pi}{3\times 2^n}$$

et que

$$P_n = \frac{1}{a_n} = (3\times 2^n)\tan\frac{\pi}{3\times 2^n}.$$

La limite commune des suites (p_n) et (P_n) est $\dfrac{\alpha}{b_0\sin\alpha} = \pi$.

L'algorithme du 3) revient à calculer la suite des valeurs

$$p_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ P_0 = 3\sqrt{3},\ p_{n+1} = \frac{p_n}{\cos\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}},\ P_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{\cos\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}.$$

On obtient (à 10^{-5} près) :

n	p_n	P_n
1	3	$3,464\,10$
2	$3,105\,83$	$3,215\,39$
3	$3,132\,63$	$3,159\,66$
4	$3,139\,35$	$3,146\,09$
5	$3,141\,03$	$3,142\,71$

6.b. On tire du 5. $0 < P_n - p_n = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{b_n - a_n}{a_n b_n} \leq \dfrac{1}{4^n}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{a_n b_n}$. Or $a_0 < b_0$, donc, $\forall n \in N$, $a_0 < a_n < b_n$, d'où

$$0 < P_n - p_n \leq \frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{a_0^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4^n}.$$

De plus, comme (a_n) et (b_n) sont adjacentes et de limite $1/\pi$, on a $a_n \leq \dfrac{1}{\pi} \leq b_n$, d'où $p_n < \pi < P_n$ donc $0 \leq \pi - p_n \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4^n}$.

L'inégalité $0 < \pi - p_n < 10^{-8}$ est réalisée si n vérifie

$$3\sqrt{3} < 10^{-8} \times 4^n \qquad \text{ou} \qquad 8 + \frac{3}{2}\log_{10}(3) < 2n\log_{10}(2)$$

soit $n > 14,476$. On sera certain que p_n approche π par défaut à moins de 10^{-8} près si $n \geq 15$.

II. Calcul approché de π par la méthode d'Archimède

A. Interprétation géométrique des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

A.1. On a évidemment $r_k + R_k = OH + OC = 2OH'$. Or le polygone régulier à $2k$ côtés, dont AC est l'un des côtés, a pour périmètre $2kAC$; le cercle de centre O et de rayon $OA' = OB'$ est le cercle inscrit dans ce polygone, donc $r_{2k} = \dfrac{2OA'}{2kAC} = \dfrac{OA'}{kAC}$. Or $kAH = 1$, donc

$$r_{2k} = \frac{AH.OA'}{AC} = \frac{A'H'}{A'C}A'O = \frac{OH'}{OA'}A'O = OH' = \frac{1}{2}(r_k + R_k)\,.$$

De même, $R_{2k} = \dfrac{2OA}{2kAC} = \dfrac{R_k}{kAC} = R_k\dfrac{A'H'}{A'C} = R_k\dfrac{OA'}{OC} = OA'$ d'où

$$R_{2k}^2 = OA'^2 = OH'.OC = r_{2k}R_k \qquad \left(\text{car } \frac{OH'}{OA'} = \frac{OA'}{OC}\right).$$

A.2. Une homothétie de centre O et de rapport $1/R_k$ transforme le cercle de la figure en le cercle unité, donc le demi-périmètre précédent, à savoir 1, devient $\ell_k = \dfrac{1}{R_k}$; de même $L_k = \dfrac{1}{r_k}$. On a donc

$$\frac{1}{L_{2k}} = r_{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_k} + \frac{1}{\ell_k}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ell_{2k}^2} = \frac{1}{L_{2k}}\cdot\frac{1}{\ell_k} \quad \text{soit} \quad \ell_{2k} = \sqrt{L_{2k}\ell_k}\,.$$

A.3. L'angle (OH,OA) de la figure vaut $\dfrac{2\pi}{2k} = \dfrac{\pi}{k}$, donc, $\ell_k = \dfrac{1}{R_k} = \dfrac{1}{AO} = \dfrac{1}{2}k\dfrac{AB}{AO}$, car $AB = 2/k$, donc $\ell_k = k\dfrac{AH}{AO} = k\sin\dfrac{\pi}{k}$; de même, $L_k = \dfrac{1}{r_k} = \dfrac{1}{2}k\dfrac{AB}{OH} = k\dfrac{AH}{OH} = k\tan\dfrac{\pi}{k}$.

A.4. On a $p_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sin\dfrac{\pi}{3} = \ell_3$ et $P_0 = 3\sqrt{3} = 3\tan\dfrac{\pi}{3} = L_3$. On a aussi $\dfrac{1}{P_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{P_n} + \dfrac{1}{p_n}\right)$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_nP_{n+1}}$ ce qui suggère de vérifier par récurrence que

$$p_n = \ell_{3\times 2^n} \qquad P_n = L_{3\times 2^n} \qquad (n \geq 0)\,.$$

Le cas $n = 0$ est déjà vérifié ; si ces relations sont établies jusqu'au rang n, on a : $\dfrac{1}{P_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{L_{3\times 2^n}} + \dfrac{1}{\ell_{3\times 2^n}}\right)$ d'après (4), d'où $P_{n+1} = L_{3\times 2^{n+1}}$.

De même, $p_{n+1} = \sqrt{p_nP_{n+1}} = \sqrt{\ell_{3\times 2^n}L_{3\times 2^{n+1}}} = \ell_{3\times 2^{n+1}}$ d'après (4) : les relations cherchées sont vérifiées au rang $n+1$, donc pour tout $n \geq 0$.

B. Accélération de convergence

B.1. Il résulte des questions I.4.a. et II-A.4. que

$$p_n = \ell_{3\times 2^n} = 3\times 2^n \sin\frac{\pi}{3\times 2^n}, \qquad P_n = L_{3\times 2^n} = 3\times 2^n \tan\frac{\pi}{3\times 2^n}\,.$$

B.2. On a donc $p_n = \pi\dfrac{\sin x_n}{x_n}$ pour $x_n = \dfrac{\pi}{3\times 2^n}$. Les rappels de l'énoncé donnent

$$\frac{\sin u}{u} = 1 - \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} - \frac{u^6}{5040} + o(u^6)\,.$$

Or $x_n^6 = \dfrac{\pi^6}{3^6\,.\,4^{3n}} \to 0$ lorsque $n\to\infty$. On a donc

$$p_n = \pi - \frac{\pi^3}{54\times 4^n} + \frac{\pi^5}{81\times 120\times 4^{2n}} - \frac{\pi^7}{9^3\times 5040\times 4^{3n}} + o\Big(\frac{1}{4^{3n}}\Big)$$

d'où $\lambda_1 = -\dfrac{\pi^3}{54}$, $\lambda_2 = \dfrac{\pi^5}{9\,720}$, $\lambda_3 = \dfrac{\pi^7}{3\,674\,160}$.

De même, $P_n = \pi\dfrac{\tan x_n}{x_n}$ et $\dfrac{\tan u}{u} = 1 + \dfrac{u^3}{3} + \dfrac{2u^4}{15} + o(u^4)$ donnent

$$P_n = \pi + \frac{\pi^3}{27\times 4^n} + \frac{2\pi^5}{15\times 81\times 4^{2n}} + o\Big(\frac{1}{4^{3n}}\Big)$$

d'où $\mu_1 = \dfrac{\pi^3}{27}$ et $\mu_2 = \dfrac{2\pi^5}{1\,215}$.

B.3. On a $3u_n = 2p_n + P_n = 3\pi + (2\lambda_1+\mu_1)\dfrac{1}{4^n} + (2\lambda_2+\mu_2)\dfrac{1}{4^{2n}} + o\Big(\dfrac{1}{4^{2n}}\Big)$. Or $2\lambda_1+\mu_1 = 0$ et $2\lambda_2 + \mu_2 = 2\pi^5(\dfrac{1}{9\,720} + \dfrac{1}{1\,215}) = \dfrac{\pi^5}{5\times 4\times 3^3}$ donc
$u_n - \pi = \dfrac{\pi^5}{5\times 4\times 3^4}\cdot\dfrac{1}{4^{2n}} + o\Big(\dfrac{1}{4^{2n}}\Big)$, ce qui signifie que

$$u_n - \pi \sim \frac{\pi^5}{5\times 3^4\times 4^{2n+1}} \qquad \text{lorsque} \quad n\to\infty\,.$$

De même, $3v_n = 3\pi + \dfrac{\pi^3}{9\times 6\times 4^n}(1-\dfrac{4}{4}) - \dfrac{\pi^5}{3^4\times 5!}(1-\dfrac{4}{16})\cdot\dfrac{1}{4^{2n}} + o\Big(\dfrac{1}{4^{2n}}\Big)$, d'où

$$v_n - \pi \sim -\frac{\pi^5}{5!}\cdot\frac{1}{3^4\times 4^{2n+1}}\,.$$

B.4. La construction du tableau des u_n et v_n à partir de celui des valeurs de p_n et P_n est aisée, et l'on obtient, à 10^{-4} près :

n	u_n	v_n
1	$3,154\,7$	$3,141\,1$
2	$3,142\,3$	$3,141\,6$
3	$3,141\,6$	$3,141\,6$
4	$3,141\,6$	$3,141\,6$

(La précision reste de 10^{-4} car les valeurs à 10^{-5} près du tableau de la page 4 ont été utilisées).

B.5. On a $v_n = \pi - \dfrac{\pi^5}{5!} \cdot \dfrac{1}{3^4 \times 4^{2n+1}} + o\Big(\dfrac{1}{4^{2n}}\Big)$ donc

$$v_{n+1} = \pi - \frac{\pi^5}{5!} \cdot \frac{1}{3^4 \times 4^{2n+1}} \cdot \frac{1}{16} + o\Big(\frac{1}{4^{2n}}\Big) \text{ d'où } \frac{16v_{n+1} - v_n}{15} - \pi = o\Big(\frac{1}{4^{2n}}\Big).$$

La suite (w_n) définie par $15w_n = \dfrac{16}{3}(4p_{n+2} - p_{n+1}) - \dfrac{1}{3}(4p_{n+1} - p_n)$, soit

$$w_n = \frac{64p_{n+2} - 20p_{n+1} + p_n}{45},$$

converge encore plus rapidement vers π :

$$w_n - \pi = o\Big(\frac{1}{4^{2n}}\Big).$$

III. Etude de suites de nombres complexes

On demande de vérifier que si z n'est pas un réel négatif ou nul, alors

$$\Re e \, \frac{z + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}} > 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{z + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}}\right)^2 = z.$$

On commence par noter que $z + \overline{z} + 2|z| = 2(\Re e(z) + |z|) > 0$ puisque z n'est pas un réel négatif ou nul. Donc $\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}$ existe et est un réel strictement positif.

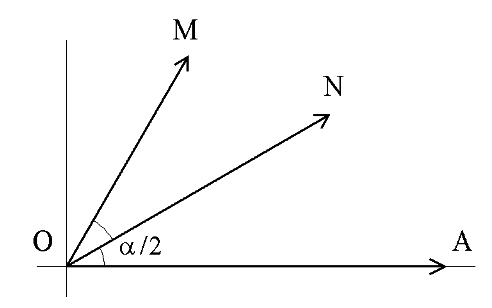
La première inégalité équivaut à $\Re e(z) + |z| > 0$ qui vient d'être démontré. Il reste à vérifier $z^2 + 2z|z| + |z|^2 = z(z + \overline{z} + 2|z|)$ qui est exact.

Comme z est ni nul ni réel négatif, il existe un unique réel $\alpha \in]-\pi, +\pi[$ tel que $z = |z|e^{i\alpha}$. L'expression $\sqrt{z} = \dfrac{z + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}}$ donne alors

$$\sqrt{z} = \sqrt{r|z|}\frac{1 + e^{i\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{soit} \qquad \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\alpha}.$$

Ceci montre que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\alpha \quad (2\pi)$ et comme $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \alpha \quad (2\pi)$, on a

$$(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) \quad (2\pi).$$



Cette égalité d'angles orientés montre que le point N est porté par la bissectrice de l'angle saillant $\widehat{AOM}$.

A. Etude des suites (a_n) et (b_n)

A.1. On a $a_0 + b_0 = \gamma_0 + 1 = 2\gamma_0^2 = 2a_1$ et $b_0 a_1 = \gamma_1^2 = b_1^2$. Les relations proposées sont donc exactes pour $n = 0$. On a aussi

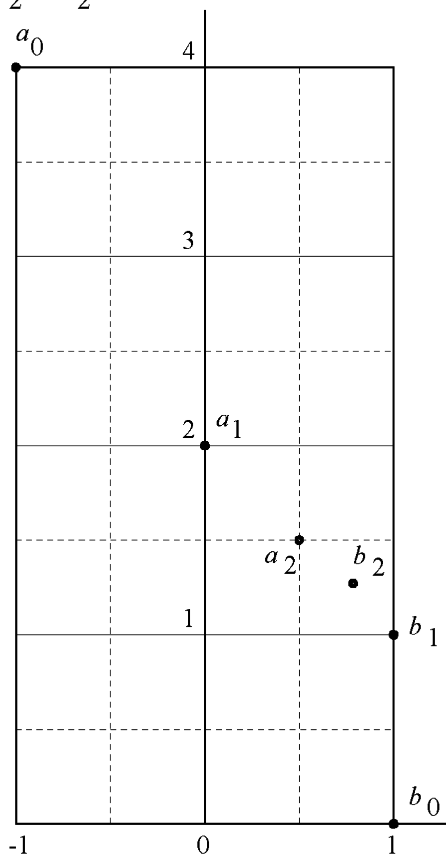
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= b_{n+2}\gamma_{n+2} && \text{par définition de } a_{n+2}\,,\\ &= b_{n+1}\gamma_{n+2}^2 && \text{par définition de } b_{n+2}\,,\\ &= \tfrac{1}{2} b_{n+1}(1+\gamma_{n+1}) && \text{par définition de } \gamma_{n+2}\,,\\ &= \tfrac{1}{2}(b_{n+1}+a_{n+1}) && \text{par définition de } a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

De même,

$$b_{n+2}^2 = b_{n+1}^2\gamma_{n+2}^2 = b_{n+1}\Big(\frac{b_{n+1}+b_{n+1}\gamma_{n+1}}{2}\Big) = b_{n+1}\Big(\frac{b_{n+1}+a_{n+1}}{2}\Big) = b_{n+1}a_{n+2}$$

par la relation démontrée ci-dessus. Les relations proposées sont donc encore exactes au rang $n+1$, donc pour tout entier $n \geq 0$ (récurrence).

A.2. Si $\gamma_0 = -1+4i$, $\gamma_1 = \sqrt{2i} = \sqrt{(1+i)^2} = 1+i$ et $\gamma_2 = \sqrt{1+\dfrac{i}{2}}$; or $|1+\dfrac{i}{2}|^2 = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$ donc $|1+\dfrac{i}{2}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ d'où, par l'égalité donnée au début de cette partie,



$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \frac{1+\dfrac{i}{2}+\dfrac{\sqrt5}{2}}{\sqrt{\sqrt5+2}} = \frac{(\sqrt5+2)+i}{2\sqrt{\sqrt5+2}}\\ &= \frac12\sqrt{\sqrt5+2} + \frac{i}{2\sqrt{\sqrt5+2}}\\ &= \frac12\sqrt{\sqrt5+2} + \frac{i}{2}\sqrt{\sqrt5-2}\,.\end{aligned}$$

On obtient alors facilement

$a_0 = -1+4i$ $\qquad a_1 = 2i$

$b_0 = 1$ $\qquad b_1 = 1+i$

$$a_2 = \frac12 + \frac{3i}{2}$$

$$b_2 = \frac12\Big(\sqrt{\sqrt5+2} - \sqrt{\sqrt5-2}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\sqrt{\sqrt5+2}+\sqrt{\sqrt5-2}\Big)\,.$$

On a, numériquement, à 10^{-3} près

$$\gamma_2 = 1{,}029 + i \times 0{,}243$$
$$b_2 = 0{,}786 + i\times 1{,}272\,.$$

A.3.a. On a $\gamma = \operatorname{ch} z$ si et seulement si $2\gamma = e^z + e^{-z}$ soit $(e^z)^2 - 2\gamma e^z + 1 = 0$ donc e^z vaut soit $\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}$, soit $\gamma - \sqrt{\gamma^2-1}$. Le produit des racines de cette équation du second degré valant 1, ces deux valeurs sont inverses l'une de l'autre.

L'une de ces racines est de module au moins égal à 1. Si l'une des racines est de module strictement supérieur à 1, (auquel cas l'autre est de module strictement inférieur à 1), elle peut

s'écrire d'une manière unique sous la forme e^{x+iy} avec $x > 0$ et $y \in]-\pi, +\pi]$. On pose alors $z = x + iy = \arg\mathrm{ch}\,\gamma$.

Sinon les deux racines sont de module 1, donc de la forme e^{iy} et e^{-iy} où l'on peut supposer $y \in [0, \pi]$; si $y = 0$, les deux racines coïncident. Il reste donc une unique racine $z = x + iy$ avec $x = 0$ et $y \in [0, \pi]$. On a donc ainsi défini une fonction $\arg\mathrm{ch}\,\gamma = z = x + iy$.

Si γ est réel :

1^er^ cas :

$|\gamma| > 1$; alors $e^z = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ est la racine (réelle) de module > 1 ce qui donne

$$\begin{cases} x = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}), & y = 0 \quad \text{si } \gamma > 1 \\ x = \ln(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}), & y = \pi \quad \text{si } \gamma < -1. \end{cases}$$

2^ème^ cas :

$|\gamma| = 1$: alors $\begin{cases} x = 0, & y = 0 \quad \text{si } \gamma = +1 \\ x = 0, & y = \pi \quad \text{si } \gamma = -1 \end{cases}$

3^ème^ cas :

$|\gamma| < 1$; alors $e^z = g + i\sqrt{\gamma^2 - 1}$ (racine carrée positive). Ce choix donne $x = 0$ et $\cos y = \gamma$ avec $y \in]0, \pi[$ donc $y = \arccos\gamma$: Si γ est réel et appartient à $[-1, +1]$, on a

$$x = 0, \quad y = \arccos\gamma \qquad \text{ou encore} \qquad \arg\mathrm{ch}\,\gamma = \arccos\gamma\,.$$

A.3.b. D'après ce qui précède, $z_0 \neq 0$ car $\gamma_0 \neq 1$.

Donc $\gamma_0 = \mathrm{ch}\,z_0$, $\gamma_1 = \sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{ch}\,z_0}{2}}$ est le nombre complexe de partie réelle positive tel que $\gamma_1^2 = \mathrm{ch}^2(z_0/2)$, c'est donc $\gamma_1 = \mathrm{ch}(z_0/2)$ car si l'on écrit $z = \arg\mathrm{ch}(\gamma_0) = x_0 + iy_0$, on a, d'après la question précédente, $x_0 \geq 0$ et $y \in]-\pi, +\pi]$ donc $\frac{1}{2}x_0 \geq 0$ et $\frac{1}{2}y_0 \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ d'où

$$\Re e\left(\mathrm{ch}\,\frac{z_0}{2}\right) = \mathrm{ch}\,\frac{x_0}{2} \cdot \cos\frac{x_0}{2} \geq 0\,.$$

Le même argument donne, par itération, $\gamma_n = \mathrm{ch}\,\dfrac{z_0}{2^n}$.

On a donc $b_{n+1} = b_n\,\mathrm{ch}\,\dfrac{z_0}{2^n}$ d'où $2^{n+1}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{z_0}{2^{n+1}} b_{n+1} = 2^n\,\mathrm{sh}\,\dfrac{z_0}{2^n} b_n$. Cette quantité est donc indépendante de n et vaut $(\mathrm{sh}\,z_0)b_0 = \mathrm{sh}\,z_0$ d'où

$$b_n = \frac{\mathrm{sh}\,z_0}{2^n\,\mathrm{sh}\,\dfrac{z_0}{2^n}}\,.$$

Les égalités

$$\mathrm{ch}(\lambda_n z_0) = \mathrm{ch}(\lambda_n x_0 + i\lambda_n y_0) = \mathrm{ch}(\lambda_n x_0)\cos(\lambda_n y_0) + i\,\mathrm{sh}(\lambda_n x_0)\sin(\lambda_n y_0)$$
$$\mathrm{sh}(\lambda_n z_0) = \mathrm{sh}(\lambda_n x_0)\cos(\lambda_n y_0) + i\,\mathrm{ch}(\lambda_n x_0)\sin(\lambda_n y_0)$$

montrent que si (λ_n) est une suite réelle de limite nulle,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{ch}(\lambda_n z_0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(\lambda_n z_0)}{\lambda_n} = x_0 + iy_0 = z_0\,.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\mathrm{sh}\,z_0}{z_0}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 1$ il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\mathrm{sh}\,z_0}{z_0}$: les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\dfrac{\mathrm{sh}\,z_0}{z_0}$.

Si z_0 est réel positif, on retrouve les résultats du I.4. En effet, z_0 réel positif correspond à γ réel > 1, soit $\dfrac{a_0}{b_0}$ réel > 1, qui est bien l'hypothèse faite en I.4.

B. Etude des suites des arguments

B.1. La relation $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ implique que le point A_{n+1} est combinaison convexe des points A_n et B_n : il se trouve donc dans l'angle saillant $\widehat{A_nOB_n}$.

B.2. Par construction de la fonction arg ch, on a vu que $\operatorname{arg ch}\gamma_0$ a une partie imaginaire appartenant à $]-\pi,+\pi]$ donc $e^{z_0} = \operatorname{arg ch}\gamma_0$ a pour argument $v \in]-\pi,+\pi]$.

On a $\gamma_n = \operatorname{ch}\dfrac{u}{2^n}\cdot\cos\dfrac{v}{2^n} + i\operatorname{sh}\dfrac{u}{2^n}\cdot\sin\dfrac{v}{2^n}$ et $\left|\dfrac{v}{2^n}\right| \in [-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}]$ dès que $n \geq 1$. Si l'on pose $\sigma_n = \arg\gamma_n$, on a $|\gamma_n|\cos\sigma_n = \operatorname{ch}\dfrac{u}{2^n}\cdot\cos\dfrac{v}{2^n} > 0$ et $|\gamma_n|\sin\sigma_n = \operatorname{sh}\dfrac{u}{2^n}\cdot\sin\dfrac{v}{2^n} > 0$. Donc $|\sigma_n| < \frac{\pi}{2}$ et $\tan\sigma_n = \operatorname{th}\dfrac{u}{2^n}\cdot\tan\dfrac{v}{2^n}$ donne $\tan|\sigma_n| \leq \tan|\dfrac{v}{2^n}|$ ($|th| \leq 1$). Comme la fonction tangente établit une bijection croissante entre $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ et $[0,+\infty[$, on a $|\sigma_n| \leq \dfrac{v}{2^n} \leq \dfrac{\pi}{2^n}$ dès que $n \geq 1$. Donc $|\arg\gamma_n| \leq \dfrac{\pi}{2^n}$ pour tout entier n.

De plus, comme $u \in [0,+\infty[$, car la fonction arg ch est de partie réelle positive (Cf. A.3.a), $\operatorname{th}\dfrac{u}{2^n} > 0$ et les deux réels $\tan(\sigma_n)$ et $\tan\dfrac{v}{2^n}$ ont même signe. Il en résulte que $\arg\gamma_n$ et v_n ont même signe.

B.3. L'égalité $b_{n+1}^2 = b_n a_{n+1}$ donne $2\arg b_{n+1} = \arg b_n + \arg a_{n+1}$ (2π) si bien que l'on a $\arg b_{n+1} = \frac{1}{2}\arg b_n + \frac{1}{2}\arg a_n$ (π) ce qui implique que l'angle de demi-droite $(0x, OB_{n+1})$ est strictement compris entre les angles (Ox, OB_n) et (Ox, OA_{n+1}) : le point B_{n+1} est donc dans l'angle saillant $\widehat{A_{n+1}OB_n}$.

B.4. De $b_{n+1} = b_n\gamma_{n+1}$ on tire $\arg b_{n+1} = \arg b_n + \arg\gamma_{n+1}$ (2π). D'après la question précédente, $|\arg b_n - \arg b_{n+1}| < \pi$ donc $\arg b_{n+1} - \arg b_n = \arg\gamma_{n+1}$. Or la série de terme général $\sum\arg\gamma_{n+1}$ est absolument convergente puisque $|\arg\gamma_{n+1}| \leq \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. Il en résulte que la suite $(\arg b_n)$ est convergente.

Comme $\arg\gamma_n$ est de signe constant, la suite $(\arg b_n)$ est monotone convergente, croissante si $\arg\gamma_0 > 0$, décroissante si $\arg\gamma_0 < 0$.

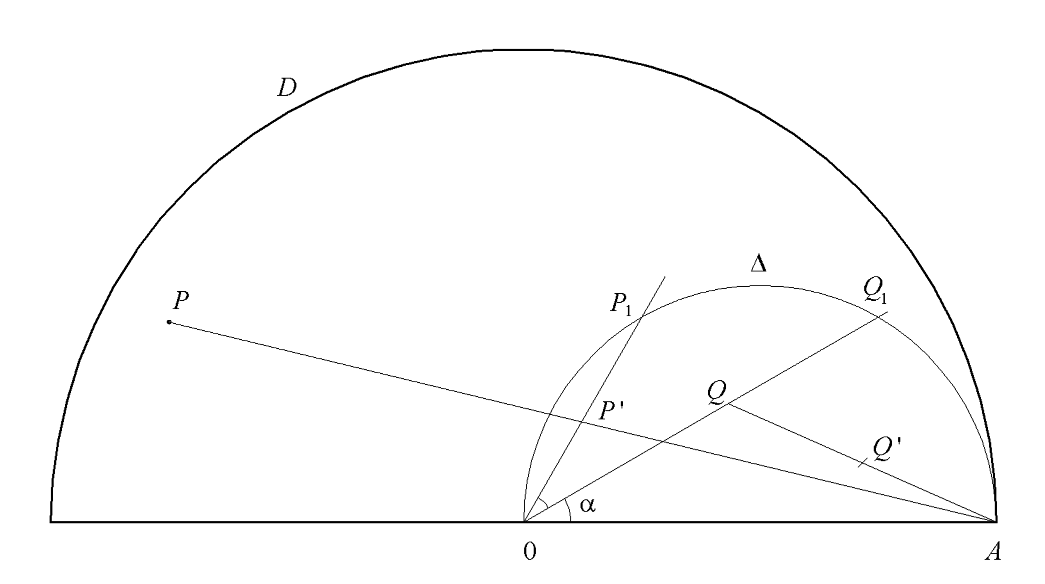
Comme $a_{n+1} = b_{n+1}\gamma_{n+1}$ on a de même $\arg a_{n+1} - \arg b_{n+1} = \arg\gamma_{n+1}$ d'où la convergence de la suite $(\arg a_n)$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\arg a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\arg b_n)$.

B.5. Si $|\arg\gamma_0| \leq \frac{\pi}{2}$, a_0 et b_0 donc aussi a_n et b_n sont de partie réelle positive. Par définition de la racine carrée complexe, $\sqrt{b_n a_{n+1}}$ est de partie réelle ≥ 0. Comme $b_{n+1}^2 = b_n a_{n+1}$ on a $b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$.

C. Etude des suites des modules

C.1. P' est l'image de P par l'homothétie de centre A et de rapport $1/2$; comme cette homothétie envoie D dans Δ et que P appartient à D, P' appartient à Δ. Or $OA = 1$, donc $OQ^2 = OP' < OP_1$: le triangle OQ_1A est rectangle en Q_1, donc, en notant α l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OQ})$, $OQ_1 = \cos\alpha$, $OP_1 = \cos 2\alpha > OP'$ d'où $OQ^2 < \cos 2\alpha$. Or $\cos 2\alpha < \cos\alpha < \cos^2\alpha$ (on suppose $P \neq A$) donc $OQ^2 < OA^2\cos^2\alpha = OQ_1^2$, d'où $OQ < OQ_1$ et Q est intérieur à Δ.

L'angle $\widehat{OQA}$ est donc de mesure minorée par celle de $\widehat{OQ_1A}$, à savoir $\pi/2$; il est donc obtus.



L'angle $\widehat{OQA}$ étant obtus, les distances OQ, OQ' et OA sont classées en ordre strictement croissant puisque Q' est le milieu du côté QA.

Si P a pour affixe γ_{n-1}, P' a pour affixe $\dfrac{1+\gamma_{n-1}}{2}$ et Q a pour affixe

$$\sqrt{\frac{1+\gamma_{n-1}}{2}} = \gamma_n \,.$$

C.2. Si $u \geq |v|$ on a $\gamma_0 = \operatorname{ch} z_0 = \operatorname{ch}(u+iv) = \operatorname{ch} u \cos v + \operatorname{sh} u \sin v$, donc

$$\begin{aligned}|\gamma_0|^2 &= \operatorname{ch}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v = (1+\operatorname{sh}^2 u)\cos^2 v + \operatorname{sh}^2 u(1-\cos^2 v)\\ &= \operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v = 1 + \operatorname{sh}^2 u - \sin^2 v\,.\end{aligned}$$

Or $\operatorname{sh}^2 u \geq u^2 \geq v^2 \geq \sin^2 v$ donc $|\gamma_0| \geq 1$. Comme le cas $\gamma_0 = 1$ est exclu, on a $u \neq 0$, donc $|\gamma_0| > 1$. L'expression $\gamma_n = \operatorname{ch} \dfrac{z_0}{2^n}$ conduit à la même conclusion pour $|\gamma_n|$.

On a donc $|b_{n+1}| > |b_n|$ et $|a_{n+1}| = |b_{n+1}| \cdot |\gamma_{n+1}| = |b_n| \cdot |\gamma_{n+1}|^2$ d'où

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\gamma_{n+1}|}{|\gamma_n|} = \left|\frac{1+\gamma_n}{2\gamma_n}\right| = \frac{1}{2}\left|1+\frac{1}{\gamma_n}\right| \leq \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{|\gamma_n|}\Big) < 1 \ :$$

Les suites $\big(|a_n|\big)$ et $\big(|b_n|\big)$ sont respectivement strictement décroissante et croissante.

De plus, $|a_{n+1}| > |b_{n+1}|$ donc

$$|a_0| > |a_1| > \cdots |a_n| > \cdots > |b_n| > \cdots > |b_1| > |b_0|\,.$$

Mais les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et de même limite L, d'après 3.a et b ; cela entraîne que $\big(|a_n|\big)$ et $\big(|b_n|\big)$ convergent vers la même limite $|L|$ et qu'elles sont adjacentes.

C.3. On a $|\gamma_{n+1}| = \sqrt{\left|\dfrac{1+\gamma_n}{2}\right|}$ donc si $|\gamma_1| < 1$, $\left|\dfrac{1+\gamma_n}{2}\right| < 1$ d'où $|\gamma_{n+1}| < 1$. Comme $|\gamma_0| < 1$ par hypothèse, on voit, par récurrence, que $|\gamma_n| < 1$ pour tout entier n.

Il en résulte que $|b_{n+1}| = |b_n| \cdot |\gamma_{n+1}| < |b_n|$: la suite $\big(|b_n|\big)$ est strictement décroissante.

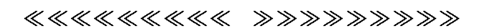
La relation $OQ < OQ' < OA$ obtenue en C.1. et appliquée avec P d'affixe γ_{n-1} donne $|\gamma_n| < \left|\dfrac{1+\gamma_n}{2}\right| < 1$ soit $1 < \left|\dfrac{\gamma_{n+1}^2}{\gamma_n}\right| = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$: la suite $\big(|a_n|\big)$ est donc strictement croissante.

C.4. On a $\psi(t) = (ut)^2 + \mathrm{o}(t^2) - (vt)^2 + \mathrm{o}(t^2)$, donc, au voisinage de l'origine, $\psi(t) \sim (u^2 - v^2)t^2$ $(u \neq v)$. Comme $u^2 < v^2$, il existe un voisinage de 0 sur lequel ψ est négative (et nulle en 0).

Or $1 - |\gamma_n| = 1 - \left|\operatorname{ch} \dfrac{z_0}{2^n}\right|$ a le signe de

$$1 - ch^2 \frac{z_0}{2^n} = \sin^2 \frac{v}{2^n} - \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2^n} = -\psi\Big(\frac{1}{2^n}\Big)$$

et est donc strictement positif pour n assez grand. On est donc ramené, à partir d'un certain rang n_0, au cas où $|\gamma_n| < 1$. On retrouve donc les conclusions de cette question à partir d'un certain rang (qui dépend a *priori*, des valeurs de u et v).

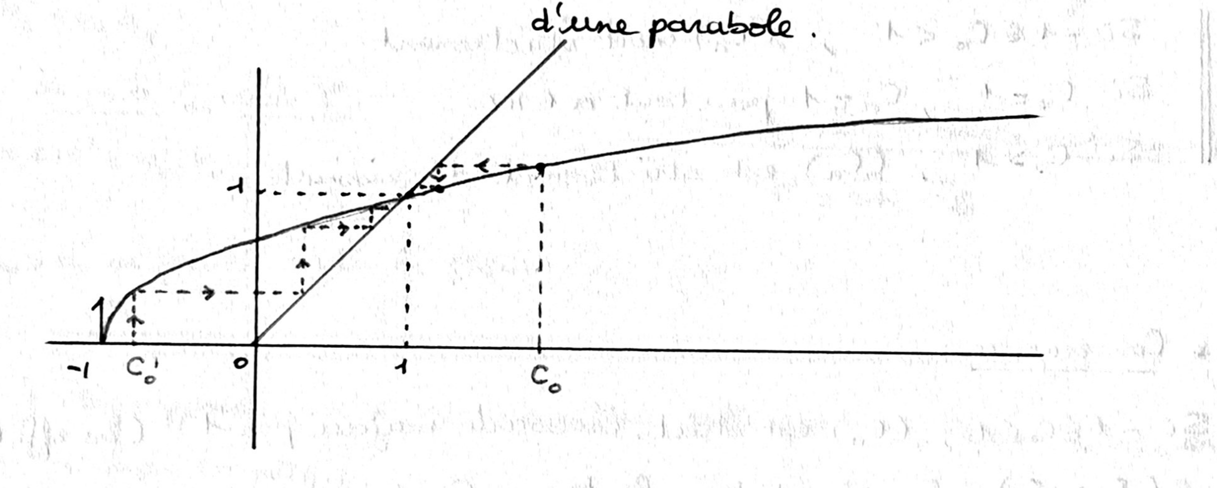


CAPES INT. 91, 1^re comp.
Etude de suites récurrentes
Approximations de π par la méthode d'Archimède.

I.1.a $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ est continue sur $[-1,+\infty[$, dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}}>0$. D'où :

x	-1		$+\infty$
f'	$\|\| +\infty$	$+$	0
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ donc f admet une branche parabolique de dir. asymptotique l'axe Ox. La courbe représentative de f est la moitié d'une parabole.



Ccl : f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ et $f([-1,+\infty[)\subset\mathbb{R}_+$. La suite (C_n) sera donc bien définie par la formule récurrente $C_{n+1}=f(C_n)$ dès que $C_0\geq -1$.

I.1.b

* Si $C_1>C_0$, alors $C_{n+1}>C_n$ pour tout n (puisque $C_{n+1}>C_n$ et f croissante entraînent $f(C_{n+1})=C_{n+2}>f(C_n)=C_{n+1}$, et permet d'obtenir le résultat par récurrence sur n).

La croissance ou la décroissance de (C_n) dépendra donc seulement des 2 premiers termes C_0, C_1 de la suite.

* α) <u>Si $C_0 \geq 0$</u> , $C_1 > C_0 \Leftrightarrow \frac{1+C_0}{2} > C_0^2 \Leftrightarrow 0 \geq 2C_0^2 - C_0 - 1$

$\Delta = 9$ donc les racines de $2x^2 - x - 1$ sont $-\frac{1}{2}$ et 1.

Ainsi :

$$\begin{cases} C_1 > C_0 \Leftrightarrow 0 \leq C_0 < 1 & \text{et alors } (C_n) \text{ croît} \\ C_1 = C_0 \Leftrightarrow C_0 = 1 & \text{et } (C_n) \text{ est stationnaire} \\ C_1 < C_0 \Leftrightarrow C_0 > 1 & \text{et } (C_n) \text{ décroît.} \end{cases}$$

β) <u>Si $C_0 < 0$</u> , $C_1 > C_0$ car C_1 est positif ou nul. (C_n) sera croissante

<u>Ccl</u> :

Si $-1 \leq C_0 < 1$, (C_n) croît strictement
Si $C_0 = 1$, $C_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Si $C_0 > 1$, (C_n) est strictement décroissante

* <u>Convergence</u> :

Si $-1 \leq C_0 < 1$, (C_n) est strict. croissante majorée par 1 (En effet $f([-1,1[) = [0,1[$ et tous les termes C_n de la suite seront dans $[-1,1[$ comme on le voit par récurrence sur n)

(C_n) convergera donc vers une limite ℓ.

Si $C_0 > 1$, $(C_n)_n$ est décroissante minorée par 0 , donc converge vers un nombre ℓ.

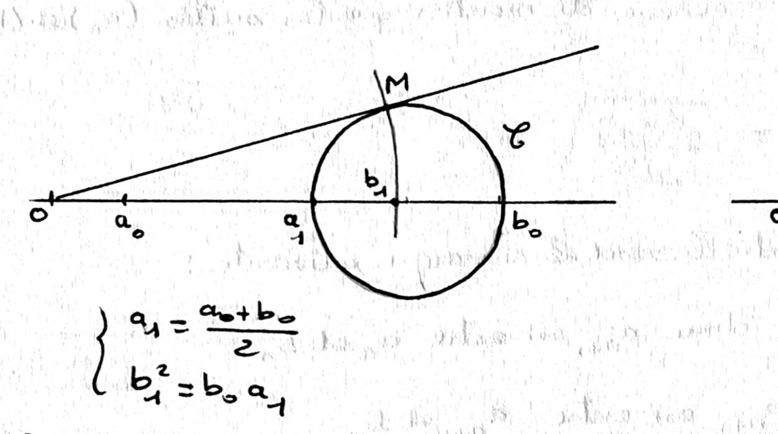
Dans les 2 cas, ℓ vérifiera $\ell = \sqrt{\frac{1+\ell}{2}}$ et $\ell \geq 0$ d'où $\ell = 1$.

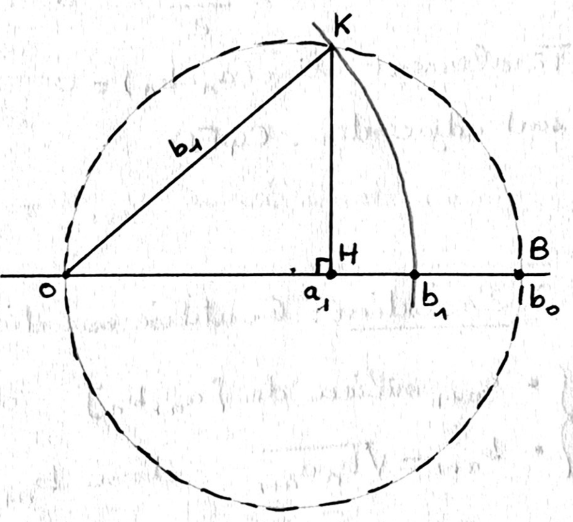
<u>Ccl</u> : $\lim_{n \to +\infty} C_n = 1$ dans tous les cas

I.2.a

Si $a_0 = b_0$, alors $a_n = b_n = a_0$ pour tout n.

I.2.b Si $a_0 < b_0$, a_1 est le milieu de $[a_0 b_0]$ et b_1 est donné par l'une des constructions :





$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2} \\ b_1^2 = b_0 a_1 \end{cases}$$

Puissance du pt O / au cercle $\mathcal{C}$:

$p = OM^2 = a_1 . b_0$

Relation dans un triangle rectangle :

$OK^2 = \overline{OH} . \overline{OB}$

Le cas $a_0 > b_0$ se traite de la m̂ façon.

I.2.c On supposera que $a_0 < b_0$ dans toute cette question, le cas $a_0 > b_0$ se résolvant de façon identique.

1° solution :

* On montre que $a_n < b_n$ $\forall n$ par récurrence :

$$a_{n+1} < b_{n+1} \iff a_{n+1}^2 < b_{n+1}^2 \iff \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2 < b_n . a_{n+1} = b_n \frac{a_n+b_n}{2}$$

$$\iff \frac{a_n+b_n}{2} < b_n \iff a_n < b_n$$

fait aboutir la récurrence.

* On vérifie alors que $a_{n+1} - a_n > 0$ et que $b_{n+1} - b_n < 0$. En effet :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} > 0$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n a_{n+1}} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_n}\right) = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{\frac{a_n+b_n}{2}} - \sqrt{b_n}\right) < 0 \quad \text{car } a_n < b_n .$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc resp. croissante et décroissante.

* (a_n) est croissante, majorée par b_0, donc converge vers a.
(b_n) est décroissante, minorée par $a_0 > 0$, donc converge vers $b > 0$.

En passant à la limite dans (2) :

$$a = \frac{a+b}{2} \quad \text{donc} \quad a = b$$

Finalement $\lim (a_n - b_n) = 0$ achève de montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. CQFD

2e solution : On utilise essentiellement la remarque suivante :

$$\begin{cases} \bullet\ a_{n+1} \text{ milieu de } [a_n, b_n] & \text{donc } a_{n+1} \text{ est entre } a_n \text{ et } b_n \\ \bullet\ b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}} & \text{donc } b_{n+1} \text{ est entre } a_{n+1} \text{ et } b_n. \end{cases}$$

Supposons toujours que $a_0 < b_0$ pour fixer les idées.

* Alors $a_n < b_n$ par récurrence sur n :

Si $a_n < b_n$, on aura $\begin{cases} a_n < a_{n+1} < b_n \\ b_{n+1} \text{ entre } a_{n+1} \text{ et } b_n \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} < b_{n+1}$

* On en déduit que (a_n) croît et que (b_n) décroît comme dans la 1re solution

* Vérifions que $\lim (b_n - a_n) = 0$:

b_{n+1} étant entre a_{n+1} et b_n, on aura :

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| < |b_n - a_{n+1}| = \left|b_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right| = \frac{|b_n - a_n|}{2} < \ldots < \frac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}}$$

par récurrence sur n. Donc $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

I.3

* $\gamma_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\gamma_n}{2}} \iff \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a_n}{b_n}\right)} \iff \dfrac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2} = \dfrac{a_n+b_n}{2b_n}$ (*)

et cette dernière égalité est vraie puisque :

$$\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2} = \frac{a_{n+1}^2}{b_n\, a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n+b_n}{2b_n}$$

* $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{\sqrt{b_n a_{n+1}}}{b_n} = \sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{b_n}} = \sqrt{\dfrac{a_n+b_n}{2b_n}} = \gamma_{n+1}$ en utilisant (*)

I.4. a

$\gamma_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$ donc $0<\gamma_0<1$ et il existe $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\gamma_0 = \cos\alpha$.

* $\gamma_1 = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_0+b_0}{2\sqrt{b_0\,\frac{a_0+b_0}{2}}} = \sqrt{\dfrac{a_0+b_0}{2b_0}} = \sqrt{\dfrac{1+\gamma_0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{2}$ (car $\cos\frac{\alpha}{2}>0$)

Ensuite I.3 donne $b_1 = b_0\gamma_1 = b_0\cos\dfrac{\alpha}{2} = b_0\dfrac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

* On vérifie que :

$$\gamma_n = \cos\frac{\alpha}{2^n} \qquad \text{et} \qquad b_n = b_0\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

par récurrence sur n.

C'est vrai au rang $n=1$, et si c'est exact jusqu'au rang n :

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n+b_n}{2\sqrt{b_n\,\frac{a_n+b_n}{2}}} = \sqrt{\frac{a_n+b_n}{2b_n}} = \sqrt{\frac{1+\gamma_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2^n}}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

Il suffit ensuite d'utiliser I.3 pour obtenir :

$$b_{n+1} = b_n\gamma_{n+1} = b_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} = b_0\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{2\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}} = b_0\frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}}$$

par application de l'hypothèse récurrente.

* Par suite $a_n = \gamma_n b_n = b_0\dfrac{\sin\alpha}{2^n\tan\frac{\alpha}{2^n}}$.

* On en déduit :

$$\lim b_n = \lim b_0 \frac{\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}} = b_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

car $\lim 2^n \sin\frac{\alpha}{2^n} = \lim\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}} \cdot \alpha\right) = \alpha$

I.4.b $\gamma_0 = \frac{a_0}{b_0} > 1$ et il existe $\alpha > 0$ tq $\operatorname{ch}\alpha = \gamma_0$.

On obtient encore :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{a_1}{b_1} = \sqrt{\frac{a_0+b_0}{2b_0}} = \sqrt{\frac{1+\gamma_0}{2}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\alpha}{2}} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} \\ b_1 = b_0\gamma_1 = b_0 \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{2\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

puis on montre, comme au I.4.a, par récurrence que :

$$\gamma_n = \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2^n} \qquad \text{et} \qquad b_n = b_0 \frac{\operatorname{sh}\alpha}{2^n \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2^n}}$$

Enfin $\boxed{\lim b_n = b_0 \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}}$ provient de $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}x}{x} = 1$.

I.5

* On a $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = b_n a_{n+1} - a_{n+1}^2 = a_{n+1}(b_n - a_{n+1}) = \frac{a_{n+1}}{2}(b_n - a_n)$

comme prévu. On déduit :

* $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2(b_{n+1}+a_{n+1})} \cdot (b_n - a_n) = \frac{1}{4} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} (b_n - a_n)$

Comme $a_0 < b_0$, la suite (a_n) croît, donc $\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \leq 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4}(b_n - a_n)$$

Par récurrence, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{4^n}}$

I.6.a

On a $\gamma_n = \frac{a_n}{b_n}$, $\gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\gamma_n}{2}}$ et $\begin{cases} b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1} \\ a_{n+1} = b_{n+1} \gamma_{n+1} \end{cases}$ $\begin{cases} p_n = \frac{1}{b_n} \\ P_n = \frac{1}{a_n} \end{cases}$

On calcule en utilisant les formules :

$$\gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\gamma_n}{2}} \quad ; \quad p_{n+1} = \frac{p_n}{\gamma_{n+1}} \quad \text{et} \quad P_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{\gamma_{n+1}}$$

Tableau :

$n=0$	$\gamma_0 = \frac{1}{2}$	$p_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2,5981$	$P_0 = 3\sqrt{3} \simeq 5,1962$
$n=1$	$\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$p_1 = 3$	$P_1 = 2\sqrt{3} \simeq 3,4641$
$n=2$	$\gamma_2 \simeq 0,9659$	$p_2 \simeq 3,1058$	$P_2 \simeq 3,2154$
$n=3$	$\gamma_3 \simeq 0,9914$	$p_3 \simeq 3,1326$	$P_3 \simeq 3,1597$
$n=4$	$\gamma_4 \simeq 0,9979$	$p_4 \simeq 3,1394$	$P_4 \simeq 3,1461$
$n=5$	$\gamma_5 \simeq 0,9995$	$p_5 \simeq 3,1410$	$P_5 \simeq 3,1427$

* Ici $a_0 < b_0$ donc $\lim a_n = \lim b_n = b_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ où $\cos\alpha = \gamma_0 = \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{2}$.

Donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\lim a_n = \lim b_n = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\pi}$

Donc $\boxed{\lim p_n = \lim P_n = \pi}$

II.6.b

- Si $n \geq 1$: $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0) = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}$

D'où : $p_n \leq P_n$ et $\frac{1}{p_n} - \frac{1}{P_n} \leq \frac{1}{4^n \, 3\sqrt{3}} \iff P_n - p_n \leq \frac{p_n P_n}{4^n \, 3\sqrt{3}}$

Il nous suffit donc de vérifier que $p_n P_n \leq (3\sqrt{3})^2$ pour obtenir $0 \leq P_n - p_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{4^n}$ (*)

Or : $p_n P_n \leq 27 \iff \frac{1}{27} \leq a_n b_n$, ce qui est assuré car $a_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \leq a_n$ (la suite $(a_n)_n$ étant croissante) et $a_n \leq b_n$ pour tout n (les suites (a_n) et (b_n) étant adjacentes)

- $a_n \leq \pi \leq b_n$ entraîne $p_n \leq \pi \leq P_n$, de sorte que l'inégalité (*) entraîne

$$\boxed{0 \leq \pi - p_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{4^n}}$$

- $\pi - p_n \leq 10^{-8}$ dès que $\frac{3\sqrt{3}}{4^n} \leq 10^{-8}$ ou $\frac{8 + \log 3\sqrt{3}}{\log 4} \leq n$ où $14{,}48 \leq n$

Si $n \geq 15$, p_n est une valeur approchée de π à 10^{-8} près.

III.4.a Sur la figure proposée, on a :

$AB = 2 \cdot AH = R_k$ et $OH = r_k$

$A'B'$ est un côté du polygone convexe régulier à $2k$ côtés de périmètre 2 et de centre O. Donc $OA' = OB' = R_{2k}$ et $OH' = r_{2k}$

Donc : $r_k + R_k = OH + OA = OC = 2\,OH' = 2\,r_{2k}$

Dans le triangle rectangle $OA'C$ de hauteur issue de A' ($A'H'$), on a

$$OA'^2 = OH' \cdot OC$$

d'où $$R_{2k}^2 = r_{2k} R_k$$

(2) est prouvé.

II.A.2

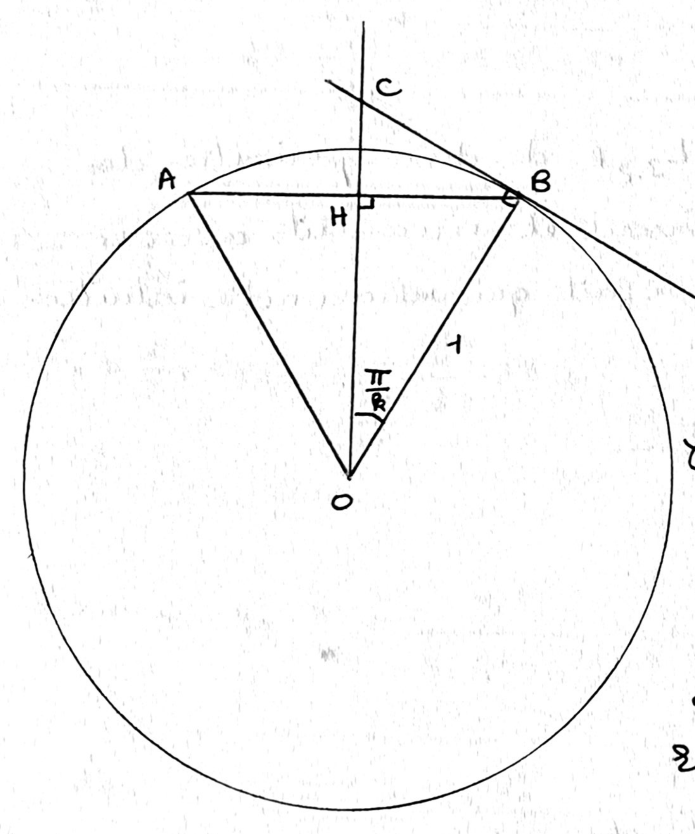
	I.1	I.2	
périmètre du polygone :	2	$2\ell_k$	$2L_k$
rayon du cercle circonscrit à ce polygone : . .	R_k	1	
" " inscrit à ce polygone : . .	r_k		1

Il y a proportionnalité entre la 1^e colonne et la 2^e colonne d'une part, et entre la 1^e colonne et la 3^e colonne d'autre part, car on passe d'une figure à l'autre par une homothétie de centre O convenable.
Par suite :

$$R_k \ell_k = 1 \qquad \text{et} \qquad r_k L_k = 1$$

Il suffit de remplacer dans (3) pour obtenir (4).

II.A.3



$\mathcal{C}$ = cercle unité

[AB] est un côté du polygone à k côtés inscrit dans $\mathcal{C}$.

2.BC est la longueur d'un côté du polygone à k côtés circonscrit au cercle $\mathcal{C}$.

En comparant les périmètres, on obtient :

$$\begin{cases} 2\ell_k = k.AB = 2k.BH = 2k \sin\frac{\pi}{k} & \Rightarrow \quad \ell_k = k \sin\frac{\pi}{k} \\ 2L_k = k.\,2BC = 2k.\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{k} & \Rightarrow \quad L_k = k\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{k} \end{cases}$$

en utilisant les relations trigonométriques dans les triangles OHB et OBC.

II.A.4

* Si $k=3$, $\quad \ell_3 = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} = b_0$

$L_3 = 3\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow r_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} = a_0$

(3) $\begin{cases} r_{2k} = \dfrac{r_k + R_k}{2} \\ R_{2k} = \sqrt{r_{2k} R_k} \end{cases}$ est alors à rapprocher de (2) $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}} \end{cases}$

Il suffit de poser $\begin{cases} a_k = r_{3.2^k} \\ b_k = R_{3.2^k} \end{cases}$ pour obtenir 2 suites (a_n) et (b_n)

vérifiant I.6. Avec les notations de I.6 et compte tenu de II.A.2 :

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{1}{b_k} = \dfrac{1}{R_{3.2^k}} = \ell_{3.2^k} \\ P_k = \dfrac{1}{a_k} = \dfrac{1}{r_{3.2^k}} = L_{3.2^k} \end{cases}$$

I.6 prouve que les suites $\ell_{3.2^k}$ et $L_{3.2^k}$ des demi-périmètres des polygones réguliers convexes resp. inscrits et circonscrits au cercle unité convergent vers π (ce qui ne fait que valider notre intuition).

II.B.1

I.4 donne $\begin{cases} a_n = b_0 \dfrac{\sin\alpha}{2^n \tan\frac{\alpha}{2^n}} \\ b_n = b_0 \dfrac{\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}} \end{cases}$

Ici $\gamma_0 = \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{2} = \cos\alpha$ donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2^n \tan\frac{\pi}{3.2^n}} \Rightarrow P_n = \dfrac{1}{a_n} = 3.2^n \tan\dfrac{\pi}{3.2^n} \\ b_n = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2^n \sin\frac{\pi}{3.2^n}} \Rightarrow p_n = \dfrac{1}{b_n} = 3.2^n \sin\dfrac{\pi}{3.2^n} \end{cases}$$

II.B.2

* $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$

$$p_n = 3.2^n \sin\frac{\pi}{3.2^n} = \pi - \frac{3.2^n.\pi^3}{6.27.2^{3n}} + \frac{3.2^n.\pi^5}{5!\,3^5.2^{5n}} - \frac{3.2^n.\pi^7}{7!\,3^7.2^{7n}} + o\left(\frac{2^n}{2^{8n}}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{p_n = \pi - \frac{\pi^3}{54.4^n} + \frac{\pi^5}{5!\,3^4.4^{2n}} - \frac{\pi^7}{7!\,3^6.4^{3n}} + o\left(\frac{1}{4^{3n}}\right)}$$

* $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

$$P_n = 3.2^n \tan\frac{\pi}{3.2^n} = \pi + \frac{3.2^n.\pi^3}{3.3^3.2^{3n}} + \frac{2}{15}\frac{3.2^n\pi^5}{3^5.2^{5n}} + o\left(\frac{2^n}{2^{5n}}\right)$$

$$\boxed{P_n = \pi + \frac{\pi^3}{27.4^n} + \frac{2\pi^5}{15.3^4.4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)}$$

II.B.3

* $$u_n = \frac{1}{3}(2p_n + P_n) = \frac{1}{3}\left[3\pi + \underbrace{\left(\frac{-2}{54.4^n} + \frac{1}{27.4^n}\right)}_{=0}\pi^3 + \left(\frac{2}{5!\,3^4.4^{2n}} + \frac{2}{15.3^4.4^{2n}}\right)\pi^5\right] + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

entraine $u_n - \pi = \frac{\pi^5}{5.3^4.4^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

d'où $\boxed{u_n - \pi \sim \frac{\pi^5}{5.3^4.4^{2n+1}}}$

* On calcule :

$$v_n = \frac{1}{3}(4p_{n+1} - p_n) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[4\left(\pi - \frac{\pi^3}{54.4^{n+1}} + \frac{\pi^5}{5!3^4.4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+2}}\right)\right) - \pi + \frac{\pi^3}{54.4^n} - \frac{\pi^5}{5!3^4 4^{2n}} + \frac{\pi^7}{7!3^6.4^{3n}} + o\left(\frac{1}{4^{3n}}\right)\right]$$

$$= \pi + \frac{1}{3}\left[-\frac{4\pi^3}{54.4^{n+1}} + \frac{\pi^3}{54.4^n} + \frac{4\pi^5}{5!3^4 4^{2n+2}} - \frac{\pi^5}{5!3^4 4^{2n}}\right] + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right)$$

d'où $v_n - \pi = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\frac{\pi^5}{5!3^4 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right)$

$$v_n - \pi = \frac{-\pi^5}{5!\,3^4.4^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right)$$

qui signifie que $\boxed{v_n - \pi \sim \frac{-\pi^5}{5!3^4.4^{2n+1}}}$

II.B.4 Tableau :

$n=1$	$u_1 \simeq 3,1547$	$v_1 \simeq 3,1411$
$n=2$	$u_2 \simeq 3,1423$	$v_2 \simeq 3,1415$
$n=3$	$u_3 \simeq 3,1416$	$v_3 \simeq 3,1417$
$n=4$	$u_4 \simeq 3,1416$	$v_4 \simeq 3,1415$

Les valeurs de $u_n = \frac{1}{3}(2p_n + P_n)$ sont à 10^{-4} près alors que celles de $v_n = \frac{1}{3}(4p_{n+1} - p_n)$ sont données à $\frac{5}{3}.10^{-4}$ près (soit à 2.10^{-4} près)

II B 5

On a
$$\begin{cases} v_n - \pi = \dfrac{-\pi^5}{5!\,3^4.\,4^{2n+1}} + o\left(\dfrac{1}{4^{2n+1}}\right) \\ v_{n+1} - \pi = \dfrac{-\pi^5}{5!\,3^4\,4^{2n+3}} + o\left(\dfrac{1}{4^{2n+3}}\right) \end{cases}$$

d'où, en posant $\alpha + \beta = 1$:

$$w_n = \alpha v_n + \beta v_{n+1} = \pi + \alpha \frac{-\pi^5}{5!\,3^4.\,4^{2n+1}} + \beta \frac{-\pi^5}{5!\,3^4 4^{2n+3}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right)$$
$$= \pi - \frac{\pi^5}{5!\,3^4 4^{2n+1}} \underbrace{\left(\alpha + \frac{\beta}{4^2}\right)}_{\text{on annule}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right)$$

On choisit $\begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{4^2} = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{15} \\ \beta = \dfrac{16}{15} \end{cases}$

La suite $w_n = \dfrac{1}{15}\left(16 v_{n+1} - v_n\right)$ convergera plus vite car sera un $o\left(\dfrac{1}{4^{2n+1}}\right)$.

III

* Si $z \notin \mathbb{R}$, posons :

$$\xi = \frac{z + |z|}{\sqrt{z + \bar{z} + 2|z|}}$$

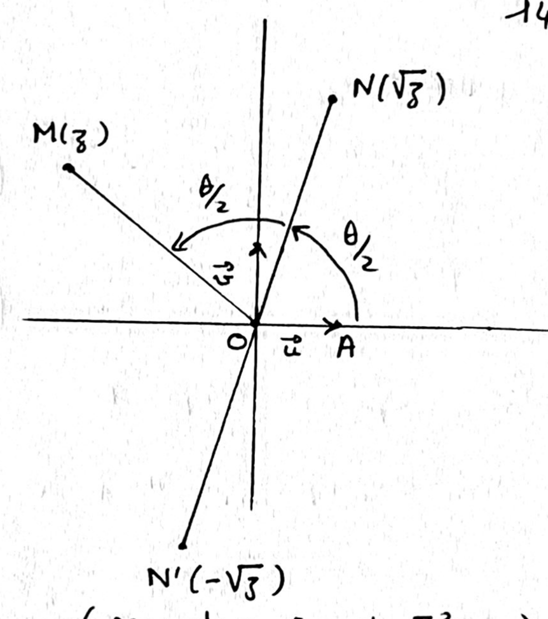
Il s'agit de prouver que $\xi = \sqrt{z}$, ie que :

$$\begin{cases} \xi^2 = z \\ \mathrm{Re}\,\xi > 0 \end{cases}$$

On calcule : $\xi^2 = \dfrac{(z+|z|)^2}{z + \bar{z} + 2|z|} = \dfrac{z^2 + |z|^2 + 2z|z|}{z + \bar{z} + 2|z|} = z$

et on constate que $\sqrt{z + \bar{z} + 2|z|} = \sqrt{2\,\mathrm{Re}\,z + 2|z|} \in \mathbb{R}_+^*$ et que $\mathrm{Re}\,(z + |z|) = \mathrm{Re}(z) + |z| > 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

<u>Ccl</u> : $\xi = \sqrt{z}$.

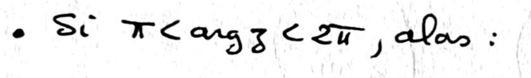


* $z = |z| e^{i\theta}$ dans la figure :

• Si $0 < \arg z < \pi$, alors :

$$\begin{cases} \arg \sqrt{z} = \dfrac{\arg z}{2} + k\pi \quad k = 0 \text{ ou } 1 \\ \mathrm{Re}\sqrt{z} > 0 \end{cases}$$

donc $0 < \arg \sqrt{z} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow N \in \widehat{AOM}$


• Si $\pi < \arg z < 2\pi$, alors :

$$\begin{cases} \arg \sqrt{z} = \dfrac{\arg z}{2} + k\pi \quad k = 0 \text{ ou } 1 \\ \mathrm{Re}\sqrt{z} > 0 \end{cases}$$

et l'on obtient cette fois-ci : $\frac{\pi}{2} + \pi < \arg \sqrt{z} < \pi + \pi \Leftrightarrow N \in \widehat{AOM}$.

III A 1

Récapitulons :

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_{n+1} \gamma_{n+1} \\ b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = \gamma_0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \qquad \gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\gamma_n}{2}} \quad \text{et } \gamma_0 \neq 1$$

* $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \Leftrightarrow b_{n+1}\gamma_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

$$\Leftrightarrow b_n \gamma_{n+1}^2 = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

$$\Leftrightarrow b_n \left(\frac{1+\gamma_n}{2}\right) = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

et la dernière égalité est triviale car $\gamma_n = \frac{a_n}{b_n}$.

* Si $b_n = 0$, l'égalité $b_{n+1}^2 = b_n a_{n+1}$ est triviale (car $b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1}$ sera aussi nul). Sinon :

$$b_{n+1}^2 = b_n a_{n+1} \Leftrightarrow (b_n \gamma_{n+1})^2 = b_n a_{n+1} \Leftrightarrow b_n \gamma_{n+1}^2 = a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow b_n \frac{1+\gamma_n}{2} = a_{n+1} \Leftrightarrow b_n \cdot \frac{1 + \frac{a_n}{b_n}}{2} = a_{n+1}$$

et cette dernière égalité est vraie d'après ~~(a) ci-dessus~~ ce qui précède.

III.A.2 On trouve :

$\gamma_0 = -1+4i$ $\quad b_0 = 1$ $\quad a_0 = -1+4i$

$\gamma_1 = 1+i$ $\quad b_1 = \gamma_1$ $\quad a_1 = b_1\gamma_1 = \gamma_1^2 = \frac{1+\gamma_0}{2} = 2i$

$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}}$ $\quad b_2 = \gamma_1\gamma_2$ $\quad a_2 = b_2\gamma_2 = \gamma_1\gamma_2^2 = \frac{\gamma_1+\gamma_1^2}{2} = \frac{1+3i}{2}$

$\simeq 1{,}029 + i\,0{,}243$ $\quad \simeq 0{,}786 + i.1{,}272$

A₀, 4i, A₁, A₂, B₂, i, B₁, -1, 1, x, y

III A 3a

* $\gamma = \operatorname{ch} z \iff \gamma = \frac{e^z+e^{-z}}{2} \iff e^{2z} - 2\gamma e^z + 1 = 0$

$\Delta' = \gamma^2 - 1$ donc $e^z = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2-1}$

e^z prend donc les 2 seules valeurs Z_1, Z_2 égales à $\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-1}$, et l'on a bien :

$$Z_1 Z_2 = \gamma^2 - (\gamma^2-1) = 1$$

* On vient de voir que $e^z = Z_1$ ou Z_2. Posons $Z_i = |Z_i| e^{i\varphi_i}$. On résout :

$$e^z = Z_i$$

$$e^x . e^{iy} = |Z_i| e^{i\varphi_i}$$

$$\begin{cases} x = \ln|Z_i| \\ y = \varphi_1 + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi :

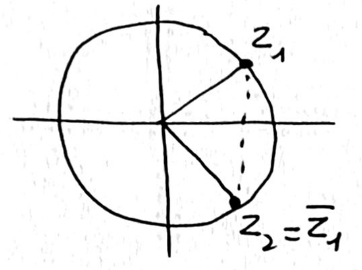
$$\gamma = \operatorname{ch} z \iff \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x = \ln|Z_1| \\ y = \varphi_1 + k2\pi \end{cases}, \ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x = \ln|Z_2| \\ y = \varphi_2 + k2\pi \end{cases}, \ k\in\mathbb{Z} \end{array} \right. \qquad (S)$$

1^er^ cas : Si $\ln|Z_1| > 0$, alors $\ln|Z_2| = -\ln|Z_1| < 0$ et (S) admet un seul couple solution $(x,y) = (\ln|Z_1|, \varphi_1 + k_0 2\pi)$, avec k_0 convenable.

2^e^ cas : Si $\ln|Z_2| < 0$, alors $\ln|Z_1| = -\ln|Z_2| > 0$ et on prend $x = \ln|Z_2|$.

3^e^ cas : Si $\ln|Z_1| = 0 \iff |Z_1| = 1$, alors $|Z_2| = 1$. On est dans la

situation de la figure :



Alors $x = 0$ et y est égal soit à $\varphi_1 + k2\pi$, soit à $-\varphi_1 + k2\pi$. Un seul de ces arguments appartient à $[0, \pi]$. D'où le résultat.

* Cas où $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch} z = \gamma \iff \begin{cases} \operatorname{ch} x \cos y = \gamma & (1) \\ \operatorname{sh} x \sin y = 0 & (2) \end{cases}$$

1^er^ cas : $\sin y = 0 \iff y = k\pi$ alors $(1) \iff \operatorname{ch} x \,.\, (-1)^k = \gamma$,

donc :

- pas de solution si $|\gamma| < 1$
- Si $\gamma \geq 1$, on trouve $(x, y) = (\operatorname{arg ch} \gamma, 0)$
- Si $\gamma \leq -1$, " $(x, y) = (\operatorname{arg ch}(-\gamma), \pi)$

2^e^ cas : $\operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0$. Alors $(1) \iff \cos y = \gamma$ et :

- pas de solution si $|\gamma| > 1$
- $y = \arccos \gamma$ si $|\gamma| \leq 1$. On conserve la solution :

$$(x, y) = (0, \arccos \gamma)$$

III A 3 b

* Mq $\gamma_n = \operatorname{ch}\frac{z_0}{2^n}$ et $b_n = \dfrac{\operatorname{sh} z_0}{2^n \operatorname{sh}\frac{z_0}{2^n}}$ par récurrence sur n.

C'est trivial si $n=0$. Au rang $n+1$:

$$\gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\gamma_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\frac{z_0}{2^n}}{2}} \Rightarrow 2\gamma_{n+1}^2 = 1 + \operatorname{ch}\frac{z_0}{2^n}$$

Soit $z = \operatorname{Arg}\operatorname{ch}\gamma_{n+1}$. On a $\operatorname{ch} z = \gamma_{n+1}$ et l'égalité préc. devient :

$$2\operatorname{ch}^2 z = 1 + \operatorname{ch}\frac{z_0}{2^n}$$

$$\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}\frac{z_0}{2^n}$$

Comme $2z$ et $\frac{z_0}{2^n}$ sont tous deux dans $(\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi]) \cup (\{0\} \times [0,\pi])$, on a, vu l'unicité du III.A.3.a :

$$2z = \frac{z_0}{2^n}$$

d'où $$\boxed{\gamma_{n+1} = \operatorname{ch} z = \operatorname{ch}\frac{z_0}{2^{n+1}}}$$

Alors $b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1} = \dfrac{\operatorname{sh} z_0}{2^n \operatorname{sh}\frac{z_0}{2^n}} \cdot \operatorname{ch}\dfrac{z_0}{2^{n+1}} = \dfrac{\operatorname{sh} z_0}{2^{n+1}\operatorname{sh}\frac{z_0}{2^{n+1}}}$ comme prévu.

$$\operatorname{ch}\frac{z_0}{2^{n+1}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{z_0}{2^n}}{2\operatorname{sh}\frac{z_0}{2^{n+1}}}$$

La récurrence aboutit.

* Clairement $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{ch}\frac{z_0}{2^n} = 1$ car $\lim_{z\to 0} \operatorname{ch} z = \lim_{z\to 0} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1$.

Et $\lim_{n\to+\infty}\left(2^n \operatorname{sh}\frac{z_0}{2^n}\right) = z_0$ ~~est~~ provient de $\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh} z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - e^{-z}}{2z} = 1$

lui même assuré par $e^z = 1 + z + o(z)$, d'où l'on tire :

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2z} = z + o(1).$$

<u>2e solution</u> : On peut montrer que $\lim_{z \to 0} \operatorname{ch} z = 1$ en utilisant :

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y \qquad (\text{où } z = x + iy)$$

De même, $\lim_{n \to +\infty} 2^n \operatorname{sh} \frac{z_0}{2^n} = z_0$ peut provenir de :

$$2^n \operatorname{sh} \frac{z_0}{2^n} = \left(2^n \operatorname{sh} \frac{x_0}{2^n}\right) \cos \frac{y_0}{2^n} + i \operatorname{ch} \frac{x_0}{2^n} \cdot \left(2^n \sin \frac{y_0}{2^n}\right)$$

<u>Ccl</u> : $\begin{cases} \lim b_n = \dfrac{\operatorname{sh} z_0}{z_0} \\ \lim a_n = \lim (b_n \gamma_n) = \dfrac{\operatorname{sh} z_0}{z_0} \end{cases}$

- Si $\gamma_0 > 1$, on retrouve les résultats de I.4.b
- Si $0 < \gamma_0 < 1$, alors $z_0 = \operatorname{Arg\,ch} \gamma_0 = i \arccos \gamma_0$ d'après III.A.3 a

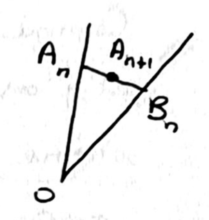
Posons $z_0 = i y_0$ avec $y_0 = \arccos \gamma_0$, ie $\cos y_0 = \gamma_0$.
Avec les notations de I.4.a : $y_0 = \alpha$, et :

$$\frac{\operatorname{sh} z_0}{z_0} = \frac{\operatorname{sh} i y_0}{i y_0} = \frac{i \sin y_0}{i y_0} = \frac{\sin y_0}{y_0}$$

comme obtenu au I.4.a.

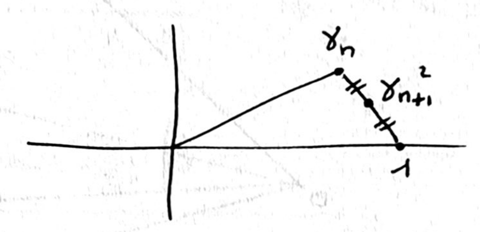
III.B.1

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ montre que A_{n+1} est le milieu de $[A_n B_n]$.



III.B.2

Observation : $\gamma_{n+1}^2 = \frac{1+\gamma_n}{2}$ montre que γ_{n+1}^2 est milieu de $[1, \gamma_n]$, soit :



* Si $\arg \gamma_0 \geq 0$, montrons que $0 \leq \arg \gamma_n \leq \frac{\pi}{2^n}$ par récurrence sur n :

C'est vrai si $n=0$ car $0 \leq \arg \gamma_0 \leq \pi$. Au rang $n+1$, γ_{n+1}^2 étant milieu de $[1, \gamma_n]$ on aura $0 \leq 2 \arg \gamma_{n+1} \leq \arg \gamma_n$.
Par hypothèse récurrente $\arg \gamma_n \leq \frac{\pi}{2^n}$, donc $0 \leq \arg \gamma_{n+1} \leq \frac{\pi}{2^{n+1}}$

* On recommence de la même manière pour montrer que si $\arg \gamma_0 \leq 0$, alors $-\frac{\pi}{2^n} \leq \arg \gamma_n \leq 0 \quad \forall n$.

* Il reste à vérifier que $\arg \gamma_0$ et v sont de même signe :

On a posé : $\quad z_0 = \arg\operatorname{ch} \gamma_0 = u + iv$

donc $v \in]-\pi, \pi]$ d'après les conditions du III A 3 a

et $\gamma_0 = \frac{e^{z_0} - e^{-z_0}}{2}$

Calculons $\operatorname{Im} \gamma_0 = \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_0}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{z_0} - e^{-z_0}}{2} - \frac{e^u . e^{-iv} - e^{-u} e^{iv}}{2} \right)$

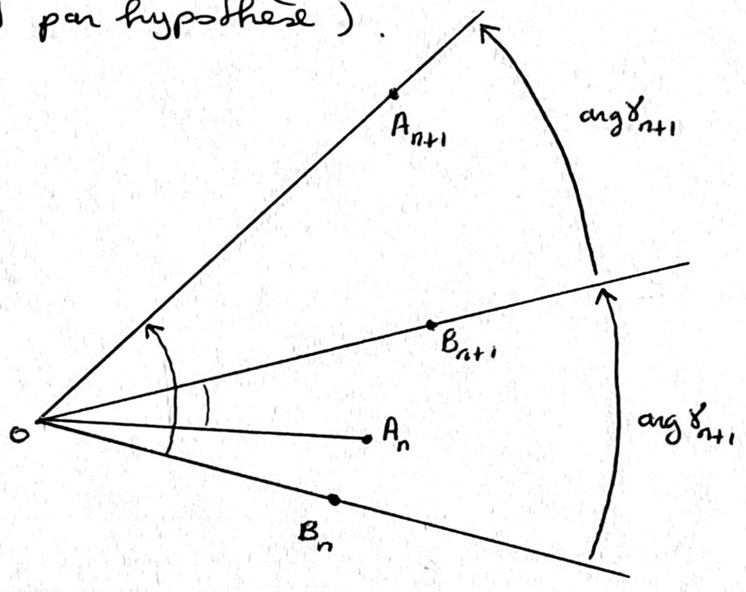
$$= \frac{1}{4i}\left(e^u (e^{iv} - e^{-iv}) - e^{-u}(e^{-iv} - e^{iv}) \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^u \sin v + e^{-u} \sin v \right) = (e^u + e^{-u}) \frac{\sin v}{2}$$

Comme $v \in]-\pi, \pi]$, on constate que v et $\operatorname{Im} \gamma_0$ sont de même signe, et l'on peut conclure puisque $\operatorname{Im} \gamma_0$ et $\arg \gamma_0$ sont aussi de même signe (car $\arg \gamma_0 \in]-\pi, \pi]$ par hypothèse).

CQFD

III.B.3



$\begin{cases} b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1} \\ a_{n+1} = b_{n+1} \gamma_{n+1} \end{cases}$ donc la similitude s de centre O ~~et~~ définie par

$s(z) = \gamma_{n+1} z$ transforme B_n en B_{n+1}, et B_{n+1} en A_{n+1}.

Si $v \geq 0$, $\arg \gamma_{n+1}$ est toujours positif et $|\arg \gamma_{n+1}| \leq \frac{\pi}{2^{n+1}}$ (II B2), et la fig. ci-dessus est valable. Les mesures étant prises dans $]-\pi, \pi]$, il s'agit de vérifier :

$$0 \underset{(1)}{\leq} \widehat{\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+1}}} \underset{(2)}{\leq} \widehat{\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}} \underset{(3)}{\leq} \frac{\pi}{2}$$

On a :

$\widehat{\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+1}}} = \arg \gamma_{n+1} > 0$ d'où (1)

$\widehat{\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+1}}} + \underbrace{\widehat{\overrightarrow{OB_{n+1}}, \overrightarrow{OA_{n+1}}}}_{= \arg \gamma_{n+1} \geq 0} = \widehat{\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}}$ d'où (2)

$\widehat{\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}} = \underbrace{\widehat{\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+1}}}}_{= \arg \gamma_{n+1}} + \underbrace{\widehat{\overrightarrow{OB_{n+1}}, \overrightarrow{OA_{n+1}}}}_{= \arg \gamma_{n+1}} \leq 2 . \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$ dès que $n \geq 1$

D'où le résultat. Si $v < 0$, on recommence avec $\arg \gamma_{n+1} < 0$.

(NB : Les 3 égalité ci-dessus ont vraiment lieu, et ne sont pas seulement vraies mod. 2π, car $|\arg \gamma_n| \leq \frac{\pi}{2}$

III B 4

* Supposons $v \geq 0$

On a $\lim a_n = \lim b_n = L$ où $L = \frac{sh z_0}{z_0}$, et L sera dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ car :

$$z = u + iv \quad \text{et } v \geq 0$$

$$L = \frac{sh u \cos v + i\, ch u \sin v}{z_0} \Rightarrow \mathrm{Re}\, L = \frac{u\, sh u \cos v + v\, ch u \sin v}{|z_0|^2} \geq 0$$

de sorte que l'on puisse affirmer :

$$\boxed{\lim \arg a_n = \lim \arg b_n = \arg L}$$

(arguments dans $]-\pi, \pi]$)

NB :

$$\begin{cases} b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1} \\ a_{n+1} = b_{n+1} \gamma_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \arg b_{n+1} \equiv \arg b_n + \arg \gamma_{n+1} & [2\pi] \\ \arg a_{n+1} \equiv \arg b_{n+1} + \arg \gamma_{n+1} & [2\pi] \end{cases}$$

Si $n \geq n_0$, a_n et b_n seront dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ donc $\arg a_n$ et $\arg b_n$ seront dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Comme $0 \leq \arg \gamma_{n+1} \leq \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$ (III.B.2) on aura $\arg b_n + \arg \gamma_{n+1} \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ et les congruences ci-dessus entraineront :

$$\begin{cases} \arg b_{n+1} = \arg b_n + \arg \gamma_{n+1} & (1) \\ \arg a_{n+1} = \arg b_{n+1} + \arg \gamma_{n+1} & (2) \end{cases}$$

Rappelons d'autre part que :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad (3)$$

Alors :

(1) $\Rightarrow \arg b_{n+1} \geq \arg b_n$, ie $(\arg b_n)_n$ croît.

(3) $\Rightarrow \begin{cases} \arg a_n \leq \arg a_{n+1} \leq \arg b_n \text{ (à rejeter d'après (2) et (1) qui entrainent } \arg a_{n+1} \geq \arg b_{n+1} \geq \arg b_n \text{ en désaccord !)} \\ \text{ou} \\ \arg b_n \leq \arg a_{n+1} \leq \arg a_n \end{cases}$

$\Rightarrow$ $(\arg a_n)$ décroît

Ccl : $(\arg a_n)_n$ et $(\arg b_n)_n$ sont des suites adjacentes

* Si $v<0$, on se ramène au cas précédent en remplaçant γ_0 par $\overline{\gamma_0}$ ce qui revient à remplacer tous les γ_n en les $\overline{\gamma_n}$ (car $\sqrt{\overline{z}} = \overline{\sqrt{z}}$) et les pts A_n, B_n par leurs sym. /à Ox.

III.B.5

* On a $b_{n+1}^2 = b_n a_{n+1}$. Montrer que $b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$ revient à prouver que $\operatorname{Re} b_{n+1} \geqslant 0$

* Notons $H = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ et montrons la propriété :

$H(n)$: " a_n et b_n appartiennent à H "

par récurrence sur n.

- Si $n=0$, $b_0 = 1 \in H$ et $a_0 = \gamma_0 \in H$ (car $|\arg \gamma_0| \leqslant \frac{\pi}{2}$)
- Supposons que $a_n, b_n \in H$. Alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ est le milieu de $[a_n, b_n]$ donc sera dans H. On a :

$$|\arg \gamma_0| \leqslant \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{Re} \gamma_0 \geqslant 0 \iff \boxed{v \geqslant 0}$$

(Vérifions la 2-équivalence : $z_0 = \arg \operatorname{ch} \gamma_0 = u + v \iff \begin{cases} \operatorname{ch} z_0 = \gamma_0 \\ (u,v) \in (\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi]) \times (\{0\} \times [0,\pi]) \end{cases}$
Il suffit de calculer $\operatorname{Re} \gamma_0 = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \cos v = \operatorname{sh} u \cos v$ et de se rappeler que $v \in]-\pi, \pi]$ pour obtenir l'équivalence)

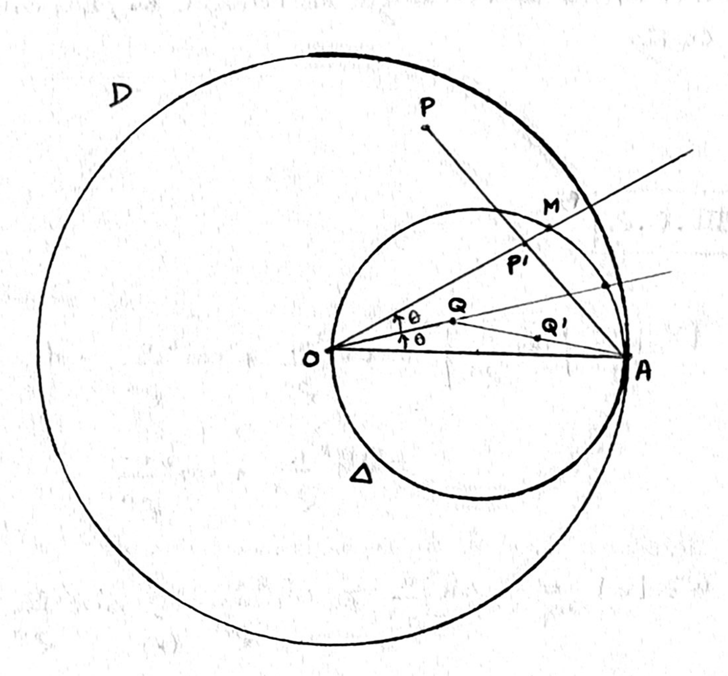
Comme $v \geq 0$, on aura $\arg \gamma_n \geq 0$ pour tout n (III.B.2) et on pourra employer les égalités du III.B.4 :

$$\begin{cases} \arg b_{n+1} = \underbrace{\arg b_n}_{\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} + \underbrace{\arg \gamma_{n+1}}_{\geq 0} \geq -\frac{\pi}{2} \\ \arg b_{n+1} = \underbrace{\arg a_{n+1}}_{\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} - \underbrace{\arg \gamma_{n+1}}_{\geq 0} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On obtient bien : $\arg b_{n+1} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

CQFD

III C 1



* L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme le cercle ∂D en $\partial\Delta$, donc P' sera intérieur à Δ.

* Supposons que l'ordonnée de P soit positive (sinon on utilise la réflexion d'axe (OA)). Alors :

$$\begin{cases} \widehat{\vec{OA}, \vec{OQ}} = \theta \\ \widehat{\vec{OA}, \vec{OP'}} = 2\theta \quad \text{avec } 2\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

La dte (OP') recoupe le cercle $\partial\Delta$ en M tel que $OM = \cos 2\theta$, donc $OP' < \cos 2\theta$

La dte (OQ) " " N " $ON = \cos\theta$.

De $OP' < \cos 2\theta \leq \cos^2\theta$ on déduit $OQ < \cos\theta$, ie $OQ < ON$ et donc Q sera intérieur à Δ.

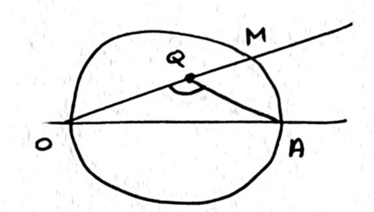
* Q intérieur à Δ et [OA] diamètre de $\partial\Delta$ entraînent $\widehat{OQA}$ obtus (lemme 1)
* $\widehat{OQA}$ obtus $\Rightarrow$ $OQ < OQ' < OA$ (lemme 2)
* P d'affixe γ_{n-1} $\Rightarrow$ P' d'affixe $\frac{1+\gamma_{n-1}}{2}$ $\Rightarrow$ Q' d'affixe $\gamma_n = \sqrt{\frac{1+\gamma_{n-1}}{2}}$.

NB : Hors concours, vérifions :

Lemme 1 : Si Q intérieur au disque Δ de diam. $[OA]$, alors $\widehat{OQA}$ obtus.

preuve : $Q \in [OM]$ par définition.

Donc $\vec{QO}.\vec{QA} = \overline{QO}.\overline{QM} < 0$ CQFD



Lemme 2 : Si $\widehat{OQA}$ est obtus, alors $OQ < OA$.

preuve : Par hyp. $\vec{QO}.\vec{QA} = \overline{QO}.\overline{QH} < 0$

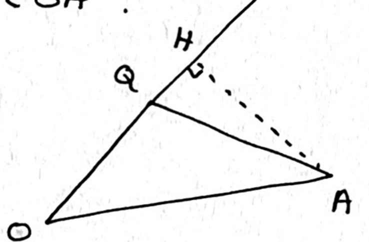
(où H est la proj. orth. de A sur (OQ))

donc $Q \in [OH]$.

Alors clairement $OQ < OH < OA$ car,

OHA étant un triangle rectangle, ses côtés de l'angle droit sont $\leq$ à l'hypoténuse.

CQFD



III.C.2

$$* \quad |\gamma_n|^2 = \left| ch \frac{z_0}{2^n} \right|^2 = ch^2 \frac{u}{2^n} + \cos^2 \frac{v}{2^n} - 1$$

$$= sh^2 \frac{u}{2^n} + \cos^2 \frac{v}{2^n}$$

$$u \geq |v| \Rightarrow sh^2 \frac{u}{2^n} \geq sh^2 \frac{v}{2^n} \underset{(*)}{\geq} \sin^2 \frac{v}{2^n} \qquad v \in]-\pi, \pi]$$

Ainsi $sh^2 \frac{u}{2^n} \geq \sin^2 \frac{v}{2^n}$ avec égalité ssi $v = 0 \Rightarrow u = v = 0 \Rightarrow z_0 = 0$ à rejeter (cf III.A.3.b)

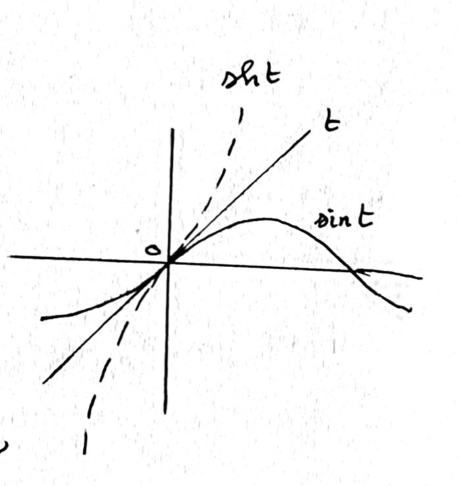
Ccl : $\boxed{\forall n \quad |\gamma_n|^2 > \sin^2 \frac{v}{2^n} + \cos^2 \frac{v}{2^n} = 1}$

(*) lemme : $\forall t \in \mathbb{R}$ $sh^2 t \geq \sin^2 t$ avec égalité ssi $t = 0$.

preuve : Vu l'imparité de ces fcts, il suffit de montrer que $sh\, t \geq \sin t$ pour tout $t \geq 0$. On vérifie que la tangente $y = t$ commune aux 2 courbes est bien entre les 2 courbes :

$$\forall t \geq 0 \quad \sin t \leq t \leq sh\, t \quad (*)$$

$\sin t \leq t$ est connu. Si $\Psi(t) \doteq sh\, t - t$, $\Psi'(t) = ch\, t - 1 > 0$ pour $t > 0$ donc Ψ est st. crois. sur $[0, +\infty[$ et $\Psi(t) \geq \Psi(0) = 0$ $\forall t \geq 0$, avec égalité $sh\, t = t$ ssi $\Psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. CQFD



* Les suites $(|a_n|)_n$ et $(|b_n|)_n$ convergent vers $|L|$ (III.A.3.b) et :

$b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1} \Rightarrow |b_{n+1}| > |b_n|$ donc $(|b_n|)_n$ croît.

$a_{n+1} = b_{n+1}\gamma_{n+1} \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |b_{n+1}| \quad \forall n$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \Rightarrow |a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|) \leq |a_n|$ donc $(|a_n|)_n$ décroît.

Les 2 suites de modules sont donc adjacentes.

III.C.3

* $\gamma_{n+1}^2 = \frac{1+\gamma_n}{2} \Rightarrow |\gamma_{n+1}|^2 \leq \frac{1+|\gamma_n|}{2} < 1$ par récurrence.

* $b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1}$ montre alors que $(|b_n|)$ décroît.

* $a_{n+1} = b_{n+1}\gamma_{n+1} = b_n \gamma_{n+1}^2 = a_n \dfrac{\gamma_{n+1}^2}{\gamma_n}$ (*)

D'après III.C.1, si l'affixe de Q est γ_n, celui de Q' est γ_{n+1}^2, donc :

$$OQ < OQ' < OA \Rightarrow |\gamma_n| < |\gamma_{n+1}|^2 < 1$$

(au passage, on redémontre que $|\gamma_n| < 1$, ce raisonnement étant valable dès $n = 0$ puisque $|\gamma_0| < 1$ assure que P soit intérieur à D et permet d'utiliser III.C.1)

Finalement (*) entraîne :

$$|a_{n+1}| > |a_n|$$

et la décroissance de $(|a_n|)_n$.

III C 4

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = x + o(x^2)$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

Donc $\Psi(t) = \operatorname{sh}^2 tu - \sin^2 tv = (tu + o(t^2))^2 - (tv + o(t^2))^2$

$$= \underbrace{(u^2 - v^2)}_{<0} t^2 + o(t^2)$$

Pour t proche de 0 et distinct de 0, on aura donc $\Psi(t) < 0$.

Comme $|\gamma_n|^2 = \left| \operatorname{ch} \frac{z_0}{2^n} \right|^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{u}{2^n} + \cos^2 \frac{v}{2^n} - 1$

$$= \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2^n} - \sin^2 \frac{v}{2^n} + 1$$

On aura $|\gamma_n|^2 < 1$ pour tout n suffisamment grand et on pourra appliquer (III.C.3) à partir d'un certain rang.

Énoncé de la seconde composition du CAPES interne 1991

Dans un « essai sur les coniques » Blaise Pascal (1623-1662) énonce à l'âge de 17 ans le théorème de « l'hexagramme mystique » : si A, B, C, D, E, F sont six points d'une conique, les intersections des droites (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (AF) sont trois points alignés.
La deuxième partie du problème propose une démonstration de ce résultat dans le cas où la conique est une ellipse, résultat qu'on utilise afin de munir cette courbe d'une structure de groupe.
Dans la première partie, c'est sur une hyperbole qu'est définie une structure de groupe, exploitée pour la résolution en nombres entiers de l'équation de Pell-Fermat :

$$x^2 - 3\,y^2 = 1.$$

Ces deux parties sont indépendantes.
Une troisième partie suggère une méthode permettant de munir une hyperbole d'une structure de groupe, à partir de la structure associée à un cercle introduite dans la deuxième partie.

Ce problème de géométrie plane réclame la mise en œuvre de différents outils : structures algébriques, nombres complexes, méthodes analytiques, éléments métriques, transformations...
Il est demandé de réaliser pour chaque séquence les figures appropriées.
La droite contenant deux points distincts M et N est notée (MN).

I. PREMIÈRE PARTIE

Résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 - 3y^2 = 1$

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère l'hyperbole H d'équation $x^2 - 3y^2 = 1$.
S désignant l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées sont des éléments de $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs, on se propose d'étudier l'ensemble $H \cap S$ des points communs à H et S.

Tracé de H

Déterminer les asymptotes de H puis représenter H dans le plan $\mathcal{P}$.

I.A. Étude d'une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$

À tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on associe son affixe qui est le nombre complexe $z = x + iy$.
On définit une application f de $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \; f(z) = (2 - i)\, z + 2i\overline{z}$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z),
À f on associe l'application F de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = f(z)$.

I.A.1. Calculer les coordonnées x' et y' de $M' = F(M)$ en fonction des coordonnées x et y de M. En déduire que l'application F est affine et bijective. Est-ce une isométrie ?

I.A.2. Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$, A' et B' leurs images respectives par F. Montrer que les triangles OAB et $OA'B'$ ont même aire.
Plus généralement, montrer que F conserve l'aire de tout triangle, c'est-à-dire que si C est un point du plan et C' son image par F, les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.

I.A.3.

a. Montrer que le point M appartient à S si et seulement si le point $M' = F(M)$ appartient à S.

b. Montrer que le point M appartient à H si et seulement si le point $M' = F(M)$ appartient à H.

I.A.4. On construit par récurrence une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout entier n, $A_{n+1} = F(A_n)$, A_0 étant le point de coordonnées $(1, 0)$.

a. Calculer les coordonnées de A_1 et A_2 et faire figurer ces points sur H.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, A_n appartient à $H \cap S$.

c. Quels sont les points de S situés sur l'arc $[A_0, A_1]$ de H ?

I.B. Structure de groupe sur H

On définit dans H une opération $*$ ainsi :
M et N étant deux points de H, on leur associe la droite, notée $\Delta_{M,N}$, issue de A_0 et parallèle la droite (MN) (ou à la tangente en M à H si $M = N$).
Dans le cas où $\Delta_{M,N}$ est tangente à H en A_0, $M * N = A_0$.
Sinon $M * N$ est le second point de rencontre avec H de $\Delta_{M,N}$.

I.B.1. On note $\mathcal{R}$ le repère affine dont les axes sont portés par les asymptotes de H, dans lequel les coordonnées de A_0 sont $(1, 1)$ et tel que l'abscisse de A_1 soit un nombre strictement inférieur à 1.
Montrer que, dans ce repère, H a pour équation $XY = 1$.

I.B.2. Pour deux point M et N de H, calculer, dans le repère $\mathcal{R}$, l'abscisse de $M * N$ en fonction des abscisses de M et N. En déduire que $(H, *)$ est un groupe isomorphe au groupe multiplicatif des réels non nuls.

En s'appuyant sur ce qui précède, montrer que toute hyperbole peut être munie d'une structure de groupe isomorphe au groupe multiplicatif des réels non nuls.

I.C. Application à la résolution de l'équation de Pell-Fermat

I.C.1. Prouver que $\forall M \in H, F(M) = A_1 * M$.

I.C.2. Pour tout entier naturel n, on désigne par X_n et Y_n les coordonnées de A_n dans le repère $\mathcal{R}$. Calculer X_n en fonction de X_1.

I.C.3. Soit n un entier strictement positif.

- **a.** Montrer que la tangente en A_n à H est parallèle à la droite $(A_{n-1}\, A_{n+1})$.
- **b.** Calculer l'aire du triangle $A_{n-1}\, A_n\, A_{n+1}$.

I.C.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que M est un point de l'arc $[A_n, A_{n+1}]$ de H si et seulement si le point $M' = A_1 * M$ appartient à l'arc $[A_{n+1}, A_{n+2}]$ de H.

I.C.5. À partir de la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décrire l'ensemble $H \cap S$.

I.C.6. Prouver que $(H \cap S, *)$ est un sous-groupe de $(H, *)$.

I.C.7.

- **a.** Calculer X_1.
- **b.** Pour tout entier naturel n, calculer X_n et Y_n en fonction de n.

I.C.8. Donner tous les couples (x, y) de nombres entiers naturels solutions de l'équation de Pell-Fermat :

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

II. DEUXIÈME PARTIE

Cette séquence met en place des résultats qui peuvent être utilisés pour établir le théorème de Pascal dans le cas où la conique est un cercle.
Les données sont :
– deux droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en α ;
– un point I sur Δ_1, un point J sur Δ_2, ces deux points étant disctincts de α.

II.A.1. *Points alignés*

Soit K un point n'appartenant à aucune des trois droites Δ_1, Δ_2, (IJ).

On introduit un triangle variable LMN dont les sommets L et M appartiennent respectivement aux droites Δ_1 et Δ_2, les droites (LM), (MN), (NL) étant respectivement parallèles aux droites (IJ), (JK), (KI).

Montrer que le point N se déplace sur la droite (αK).

II.A.2. *Droites parallèles*

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle αIJ.

Un cercle variable Γ, distinct de $\mathcal{C}$, passe par les points I et J et recoupe les droites Δ_1 et Δ_2, respectivement en I' et J'. Les points I, J, I', J' sont supposés distincts.

Démontrer que la droite $(I'J')$ est parallèle à la tangente en α au cercle $\mathcal{C}$.

II.B. Le théorème de Pascal dans le cas du cercle

On donne un quadrilatère $ADPQ$ (trois quelconques de ces quatre points ne sont pas alignés) et on suppose que les droites (AQ) et (DP) se coupent en ω, les droites (AP) et (DQ) en ω'.
Un cercle variable Γ passe par les points A et D et recoupe les droites (AP), (AQ), (DP), (DQ) respectivement en B, F, E, C. Les points A, B, C, D, E, F sont supposés distincts.

II.B.1. Démontrer que chacune des droites (BC), (EF), (BE), (CF) garde une direction fixe.

II.B.2. Démontrer que, si le quadrilatère $ADPQ$ est inscriptible, les droites (PQ), (BC) et (EF) sont parallèles.

II.B.3. On suppose que $ADPQ$ n'est pas inscriptible. Montrer que les droites (BC) et (EF) sont concourantes en un point R appartenant à la droite (PQ). (On pourra montrer que, lorsque Γ varie, R se déplace sur une droite passant par P et sur une droite passant par Q).

II.B.4. *Application* : établir le théorème de Pascal (cf. introduction) dans le cas où l'hexagone $ABCDEF$ est inscrit dans un cercle. On supposera que la configuration ne contient pas deux droites parallèles afin que toutes les intersections nécessaires existent.

II.B.5. Dans cette question, on suppose le quadrilatère $AD\omega\omega'$ inscriptible et on désigne par Γ_1 son cercle circonscrit. On suppose que les tangentes à Γ_1 en ω et ω' se coupent en R_1. Montrer que les points P, Q, R_1 sont alignés.

II.C. L'ellipse

II.C.1. *Le théorème de Pascal*

Montrer qu'un élève de terminale C peut déduire du résultat obtenu à la question B.4., dans le cas où la conique est un cercle, le théorème de Pascal dans le cas où la conique est une ellipse (en supposant toujours que toutes les intersections nécessaires existent).

II.C.2. *Structure de groupe*

Les données sont :
- une ellipse $\mathcal{E}$;
- E un de ses points ;
- Δ une droite qui n'est pas parallèle à la tangente en E à l'ellipse $\mathcal{E}$ et qui ne rencontre pas $\mathcal{E}$.

On définit dans $\mathcal{E}$ une opération $*$ de la manière suivante :

M et N étant deux points de $\mathcal{E}$, la droite (MN) (ou la tangente en M à $\mathcal{E}$ lorsque $M = N$) coupe Δ en L ou lui est parallèle.

Dans ce dernier cas, $M * N$ est le point où la parallèle à Δ passant par E recoupe $\mathcal{E}$.

Sinon $M * N$ est le second point d'intersection de la droite (LE) avec $\mathcal{E}$ ou le point E si (LE) est tangente en E à $\mathcal{E}$.

a. Montrer que $\mathcal{E}$ muni de l'opération $*$ est un groupe commutatif.
On se contentera de faire les vérifications utiles dans le cas où la configuration qui entre en jeu est la plus générale.

b. Résoudre dans le groupe $(\mathcal{E}, *)$ l'équation $M * M = E$ où le point M est l'inconnue.

Remarque : *une étude analogue peut être faite lorsque Δ est strictement parallèle à la tangente en E à $\mathcal{E}$ ou lorsque Δ coupe $\mathcal{E}$ en deux points U et V distincts de E. Dans ce dernier cas, c'est sur $\mathcal{E}\backslash\{U, V\}$ qu'est définie une structure de groupe. Cette étude n'est pas demandée dans le problème mais on pourra en admettre le résultat.*

III. TROISIÈME PARTIE

III.A. Étude d'une configuration

Les données sont :
- deux points distincts A et D ;
- le cercle Γ de diamètre $[AD]$;
- deux points m et m' de Γ, distincts de A et D, symétriques par rapport à la droite (AD) et non situés sur la médiatrice du segment $[AD]$.

Les droites (Dm) et (Am') se coupent en M, les droites (DM') et (Am) en M', les tangentes à Γ en m et m' se coupent au point T.
Démontrer que :

1. Les points T, M, M' sont alignés ;

2. $TM = Tm$;

3. $TM^2 = \overline{TA} \cdot \overline{TD}$.

III.B. Hyperbole associée à (Γ)

On suppose dans la suite que $AD = 2$.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, O étant le milieu du segment $[AD]$ et $\overrightarrow{i}$ le vecteur $\overrightarrow{OA}$.
Γ coupe l'axe $(O, \overrightarrow{j})$ aux points $U\ (0,1)$ et $V(0,-1)$.
On note $\overline{\Gamma} = \Gamma \backslash \{U, V\}$.
À tout point m de $\overline{\Gamma}$, on associe le point M du plan $\mathcal{P}$ ainsi défini :
– si m est en A ou D, $M = m$;
– sinon M est le point d'intersection des droites (Dm) et (Am'), m' étant le symétrique de m par rapport à la droite (AD).
On désigne par h l'application de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathcal{P}$ ainsi définie.
Démontrer que le point M appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

III.C.

Soient m et n deux points distincts de $\overline{\Gamma}$, $M = h(m)$, $N = h(n)$. On suppose que la droite (mn) coupe la droite (UV) en l et on désigne par l' le symétrique de l par rapport à la droite (AD).

III.C.1. Calculer, en fonction des coordonnées (x, y) de m, les coordonnées (X, Y) de M.

III.C.2. Montrer que les droites (Al') et (MN) sont parallèles.

III.C.3. Indiquer brièvement comment on peut munir $\overline{\Gamma}$ et $\mathcal{H}$ de structures de groupes (opérations respectivement notées $*$ et $\circledast$) telles que pour tous points m et n de $\overline{\Gamma}$, $M \circledast N = h(m*n)$, M et N étant les images respectives de m et n par h. (On pourra se reporter aux paragraphes **C.2.** de la deuxième partie et **B** de la première partie).

CAPES INTERNE - 1991

Extrait du rapport du jury

ÉCRIT DEUXIÈME ÉPREUVE

PARTIE I

L'ensemble des asymptotes a pour équation $x^2 - 3y^2 = 0$ c'est donc l'ensemble des droites symétriques par rapport aux deux axes et dont l'angle polaire vaut $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$. L'hyperbole H a pour sommets les points $A(1,0)$ et $A'(-1,0)$.

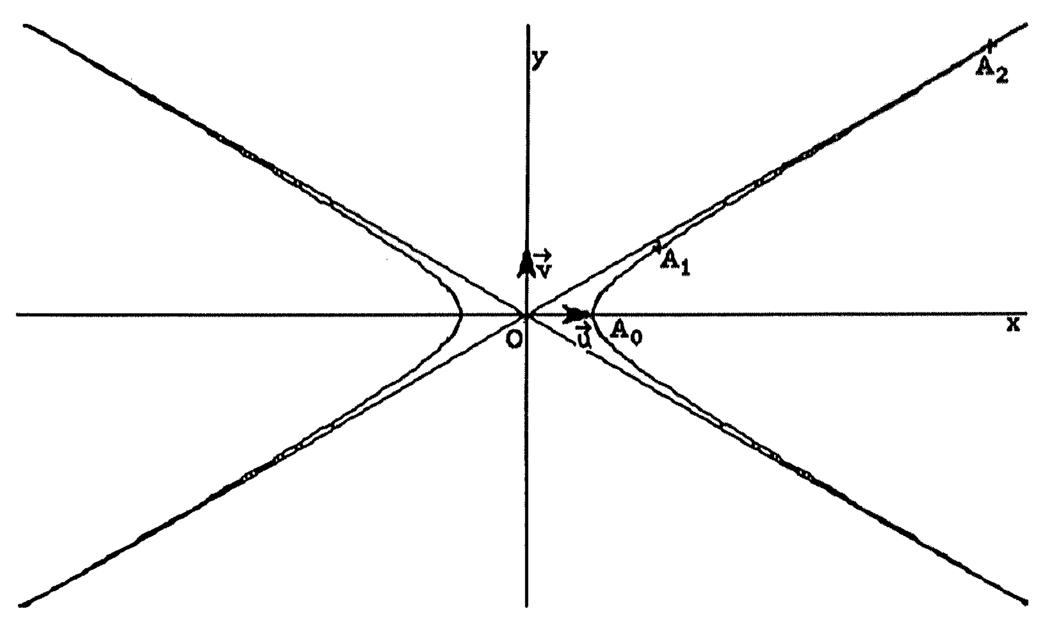


Figure 1. *L'hyperbole H et les points A_0, A_1 et A_2*

PARTIE I.A

QUESTION I.A.1. L'expression analytique de F est

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

Comme les formes coordonnées sont linéaires, c'est une application affine.

La matrice des coefficients $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a un déterminant non nul (de valeur 1) donc F est bijective.

Soit B le point de coordonnées $(0,1)$ $B' = F(B)$ a pour coordonnées $(3,2)$ et $F(O) = O$. $OB \neq OB'$ donc F n'est pas une isométrie.

QUESTION I.A.2. Considérons les points A de coordonnées (a_1, a_2), $B(b_1, b_2)$, $A'(a'_1, a'_2)$, $B'(b'_1, b'_2)$. Supposons que $A' = F(A)$ et $B' = F(B)$. On a donc

$$\begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ et } aire(OA'B') = aire(OAB).$$

Soit le point C de coordonnées (c_1, c_2) et $C'(c'_1, c'_2)$ avec $C' = F(C)$. Un calcul analogue au précédent appliqué aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ (à la place de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$) permet de conclure

$$aire(ABC) = aire(A'B'C')$$

QUESTION I.A.3.*a*. Les coefficients de x et y dans les expressions de x' et y' (cf.1°/) sont des entiers. On en déduit que l'image de tout point M de S est un point de S.

Réciproquement, puisque $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, les expressions de x et y en fonction de x' et y' sont à coefficients entiers. On en déduit que si $F(M) \in S$, $M \in S$.

QUESTION I.A.3.*b*. Soit $M(m,n)$ un point du plan et $M'(m',n')$ son image par F. Alors

$$m'^2 - 3\,n'^2 = (2\,m + 3\,n)^2 - 3\,(m + 2\,n)^2 = m^2 - 3\,n^2$$

On en déduit que M appartient à H si et seulement si $M' = F(M)$ appartient à H.

QUESTION I.A.4.*a*. Les coordonnées de A_1 sont $(2,1)$ et celles de $A_2(7,4)$.

QUESTION I.A.4.*b*. D'après **I.A.3** puisque A_0 est un point de $H \cap S$ une simple récurrence montre que tous les points A_n appartiennent à cet ensemble.

QUESTION I.A.4.*c*. Un point de S situé sur $[A_0, A_1]$ devant avoir des coordonnées entières aura pour abscisse 1 ou 2; comme les points A_0 et A_1 sont les seuls points de cet arc à avoir une abscisse entière, ces deux points sont les seuls point de l'arc appartenant à S.

PARTIE I.B

QUESTION I.B.1. Soit Δ_1 l'asymptote de H d'équation $x + \sqrt{3}\,y = 0$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le choix de $\mathcal{R}$ montre que l'équation de Δ_1 dans $\mathcal{R}$ est $Y = 0$. On a donc $Y = k(x + \sqrt{3}\,y)$ pour un choix convenable de k. L'utilisation des coordonnées de A_0 dans les deux repères montre que $k = 1$. On a de même $X = x - \sqrt{3}\,y$ (avec $Y = x + \sqrt{3}\,y$).

QUESTION I.B.2. La parallèle à (MN) (ou la tangente en M à H si $M = N$) passant par A_0 a pour équations paramétriques dans le repère $\mathcal{R}$

$$\begin{cases} X = 1 + \lambda\, mn \\ Y = 1 - \lambda \end{cases}$$

les nombres m et n étant respectivement les abscisses des points M et N dans $\mathcal{R}$.

On montre en conséquence que le point $M * N$ a pour paramètre $\frac{mn-1}{mn}$ et pour abscisse mn.

L'application $\varphi : \mathbf{R}^* \mapsto H$ définie par $\varphi(\alpha) = M$ où les coordonnées de M sont $(\alpha, \frac{1}{\alpha})$ est une bijection, et de plus $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha) * \varphi(\beta)$. Cela prouve que $(H, *)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbf{R}^*, \times)$.

PARTIE I.C

QUESTION I.C.1. Dans le repère $\mathcal{R}$, l'expression analytique de F est du type

$$\begin{cases} X' = aX + bY \\ Y' = cX + dY \end{cases}$$

Pour calculer a, b, c, d, cherchons les images par F de points situés sur les axes de $\mathcal{R}$. Soit N le point défini par $\overrightarrow{ON} = \sqrt{3}\,\vec{u} - \vec{v}$, $N' = F(N)$. On a

$$\overrightarrow{ON'} = (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3}\,\vec{u} - \vec{v}) \text{ (cf. I A 1°/)donc} \overrightarrow{ON'} = (2 - \sqrt{3})\overrightarrow{ON}$$

On en déduit $a = 2 - \sqrt{3}$, $c = 0$.

Un calcul analogue fait en utilisant un point de la deuxième asymptote de H conduit à $b = 0$, $d = 2 + \sqrt{3}$. On a donc

$$X' = (2 - \sqrt{3})\,X, \quad Y' = (2 + \sqrt{3})\,Y$$

Comme $A_1 = F(A_0)$, dans $\mathcal{R}$ les coordonnées de A_1 sont $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.

Pour tout point M de H, $F(M)$ et $A * M$ appartiennent à H et ont même abscisse dans $\mathcal{R}$ donc sont égaux[1].

---

[1] Remarque : on vient de montrer que chaque asymptote de H est transformée en elle-même par F. On pouvait remarquer avant tout calcul que l'application F étant affine transforme toute droite en une droite, qu'elle laisse H globalement invariante et donc qu'elle laisse globalement invariant l'ensemble des asymptotes de H.

QUESTION I.C.2. De la définition de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et du résultat précédent, on déduit par récurrence la relation $X_n = X_1^n$.

QUESTION I.C.3.*a*. $A_n * A_n$ et $A_{n-1} * A_{n+1}$ appartiennent à H et ont même abscisse dans $\mathcal{R}$. On a donc $A_n * A_n = A_{n-1} * A_{n+1}$. La construction de $M * N$ prouve alors le résultat.

QUESTION I.C.3.*b*. C'est une conséquence du **I.A.2**; le triangle $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ a même aire que $A_0A_1A_2$ et celle-ci vaut 1 (calcul effectué dans $(O,\vec{u},\vec{v})$).

QUESTION I.C.4. Soit M un point de H d'abscisse X dans $\mathcal{R}$. M appartient à l'arc $[A_n, A_{n+1}]$ si et seulement si

$$X_{n+1} \leq X \leq Xn$$

Alors, $M' = A_1 * M$ est le point de H d'abscisse XX_1. Il appartient à l'arc $[A_{n+1}, A_{n+2}]$ si et seulement si

$$X_{n+2} \leq XX_1 \leq X_{n+1} \quad \text{ou encore} \quad X_{n+1} \leq X \leq X_n \quad (\text{cf } X_1 > 0)$$

QUESTION I.C.5. On sait que les points de $H \cap S$ situés sur l'arc $[A_0, A_1]$ sont A_0 et A_1. En utilisant la question précédente et en faisant une récurrence, on montre que les points de $H \cap S$ situés sur l'arc $[A_n, A_{n+1}]$ sont A_n et A_{n+1}. Donc les points de $H \cap S$ situés dans le quart de plan défini dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ par $x \geq 0$ et $y \geq 0$ sont les points de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comme S et H sont invariants par symétrie par rapport à $(O,\vec{u})$ et $(O,\vec{v})$ on obtient $H \cap S$ en adjoignant aux points de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ceux qu'on obtient par symétrie par rapport à $(O,\vec{u})$, $(O,\vec{v})$ et O.

QUESTION I.C.6. $(H \cap S, *)$ est le sous-groupe de $(H, *)$ engendré par $\{A_1, A_1'\}$ où A_1' est le symétrique de A_1 par rapport à O

QUESTION I.C.7.*a*. On a vu précédemment que $X_1 = 2 - \sqrt{3}$

QUESTION I.C.7.*b*. On en déduit $X_n = (2-\sqrt{3})^n$ et $Y_n = (2+\sqrt{3})^n$

QUESTION I.C.8. Les solutions de l'équation de Pell-Fermat sont les coordonnées des points de $H \cap S$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. Nous connaissons ces coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ or on a déterminé au **I.B.1** les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes. On en déduit : $x = \frac{1}{2}(X+Y)$, $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-X+Y)$. Ce qui donne pour solutions de l'équation

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\Big((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\Big) \\ y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\Big((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\Big) \end{cases} \qquad n \in \mathbf{N}$$

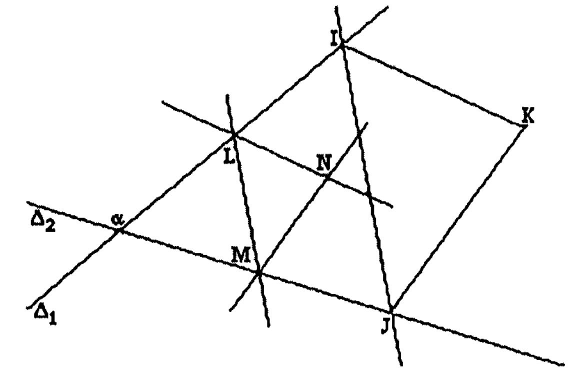


Figure 2. *Les points K, N et α sont alignés*

PARTIE II.A

QUESTION II.A.1. L'homothétie $\mathfrak{h}$ de centre α et de rapport $\frac{\overline{\alpha L}}{\overline{\alpha I}}$ transforme la droite (IK) (resp. (JK)) en sa parallèle passant par L (resp. M) et elle transforme donc K en N. Les points α, K, N sont donc alignés. On peut également faire cette démonstration en utilisant le théorème de Thalès.

QUESTION II.A.2. Calculant une mesure de l'angle des droites $\mathcal{T}$ et $(I'J')$ par application de la formule de Chasles on obtient

$$\Big(\mathcal{T}, (I'J')\Big) \equiv \Big(\mathcal{T}, \Delta_1\Big) + \Big(\Delta_1, (I'J')\Big) \quad [\pi]$$

D'après les relations angulaires de cocyclicité, on a

$$\begin{cases} \Big(\mathcal{T}, \Delta_1\Big) \equiv \Big(\Delta_2, (IJ)\Big) \quad [\pi] \\ \Big(\Delta_1, (I'J')\Big) \equiv \Big((IJ), \Delta_2\Big) \quad [\pi] \end{cases}$$

et par conséquent, $\Big(\mathcal{T}, (I'J')\Big) \equiv 0 \ [\pi]$.

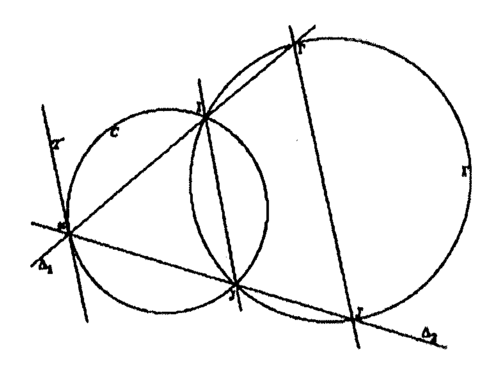


Figure 3. *Les droite $\mathcal{T}$ et (I'J') sont parallèles*

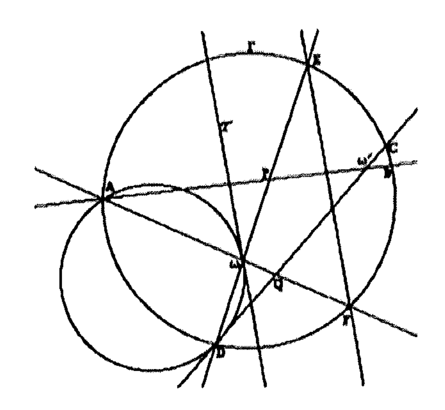


Figure 4. *La droite (EF) est parallèle à la tangente $\mathcal{T}$ en ω au cercle $(AD\omega)$*

Partie II.B

Question II.B.1. Droite (BC) : on applique le résultat du **II A 2°/** en utilisant les points A et D, les droites $(\omega' A)$ et $(\omega' D)$. La droite (BC) est parallèle à la tangente en ω' au cercle $(\omega' AD)$.

- Droite (EF) : points A et D, droites $(\omega A), (\omega D)$.
- Droite (BE) : points A et D, droites $(PA), (PD)$.
- Droite (CF) : points A et D, droites $(QA), (QD)$.

Question II.B.2. Le cercle $(ADPQ)$ est un cercle Γ particulier. En utilisant les droites $(\omega A, \omega D)$: (PQ) est parallèle à (EF) (car elle est parallèle à la tangente en ω au cercle (ωAD)).

En utilisant les droites $(\omega' A, \omega' D)$: (PQ) est parallèle à (BC).

Question II.B.3. Montrons que, si les droites (BC) et (EF) sont parallèles, le quadrilatère $ADPQ$ est inscriptible. Supposons donc $(BC) \| (EF)$ La tangente Θ en ω au cercle $AD\omega$ est donc parallèle à la tangente Θ' en ω' au cercle $AD\omega'$. Le cercle $\gamma = (ADQ)$ recoupe (AP) en P' et (DP) en P''; or les deux droites (QP') et (QP'') sont respectivement parallèles à Θ et Θ'; donc les droites QP' et QP'' sont confondues et comme le cercle γ coupe cette droite en Q les points P' et P'' sont confondus et confondus avec le point P ce qui prouve que le quadrilatère $ADQP$ est inscriptible.

On conclut en utilisant le **A 1°/** en l'appliquant : aux droites fixes (PA) et (PD) et au triangle variable RBE (dont les côtés ont des directions fixes) puis aux droites fixes (QA) et (QB) et au triangle variable RCF.

Figure 5. *Cas ADQP inscriptible*

Question II.B.4. Les trois points P, Q, R sont les points de concours respectifs des trois paires de côtés $\{(AB), (DE)\}$, $\{(DC), (AF)\}$ et $\{(BC), (EF)\}$.

Question II.B.5. Soit Γ un cercle distinct de Γ_1 passant par A et D. Les quatre points B, C, E et F existent et sont deux à deux distincts puisque $\Gamma \neq \Gamma_1$, Γ ne passe ni par ω ni par ω'. Les droites (BC) et (EF) sont respectivement parallèles aux droites $(\omega' R_1)$ et (ωR_1). Le point R intersection des droites BC et EF existe et appartient à la droite (PQ). De plus, la droite $(\omega\omega')$ est parallèle à la tangente en Q au cercle ADQ (**II.A.2**). Les droites $(\omega\omega')$ et (FC) sont parallèles; le point R_1 appartient donc à la droite (QR) (**II.A.1**).

Partie II.C

Question II.C.1. Une ellipse se déduit de son cercle principal par l'affinité orthogonale d'axe l'axe focal et de rapport $\frac{b}{a}$. De plus, l'affinité conserve l'alignement. Cette argumentation est donc à la porté d'un élève de terminale scientifique.

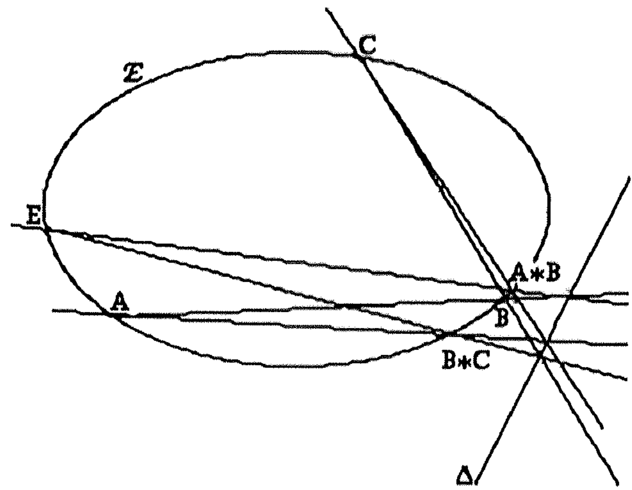


Figure 6. *Associativité de la loi* $*$

Question II.C.2.*a*. La loi $*$ est évidemment commutative.

Posons $D = A * B$ et $F = B * C$; et appliquons le théorème de Pascal à l'hexagone $ABCDEF$; les paires de droites $\{(AB),(DE)\}$, $\{(BC),(EF)\}$ et $\{(CD),(AF)\}$ se coupent en des points alignés or les deux premières droites se coupent sur la droite Δ (ou lui sont parallèles mais on omet ce cas) et si l'on suppose de plus que les points A, B, C sont distincts de E, les deux points d'intersection sont distincts. Donc la troisième paire de droite se coupe en $M \in \Delta$ (ou lui est parallèle). Les points $A*(B*C)$ et $(A*B)*C$ sont le second point d'intersection avec l'ellipse de la droite (EM) (ou de la parallèle à Δ passant par E). On a donc $A*(B*C) = (A*B)*C$ sauf peut-être si l'un des points est E. Il est clair que $\forall A\ E*A = A$. La loi est donc associative et admet E pour élément neutre.

Enfin tout élément est inversible, l'inverse de A étant le second point d'intersection de la droite (AE') où E' est le point d'intersection de la tangente en E à l'ellipse avec la droite Δ.

Question II.C.2.*b*. Pour que A soit solution de l'équation $M*M = E$, il faut et il suffit que la tangente en A à l'ellipse passe par le point E' défini précédemment. Par un point extérieur à une conique il passe deux tangente à celle-ci, et l'équation a donc deux solutions, le point E et le point de contact de la seconde tangente issue de E' à l'ellipse.

Partie III.A

Question III.A.1. On applique le **II.B.5**.

Question III.A.2. Comme les points M et M' sont symétriques par rapport à (AD), le point T est le milieu de l'hypoténuse du triangle MmM'.

Question III.A.3. A est l'orthocentre du triangle DMM' :

$$(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TA})\cdot(\overrightarrow{DT}+\overrightarrow{TM'}) = 0$$

on développe cette égalité.

$$TM^2 = Tm^2 = \overline{TA}\cdot\overline{TD}$$

Partie III.B

$$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TD} = (\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{TO}-\overrightarrow{OA}) = TO^2 - OA^2.$$

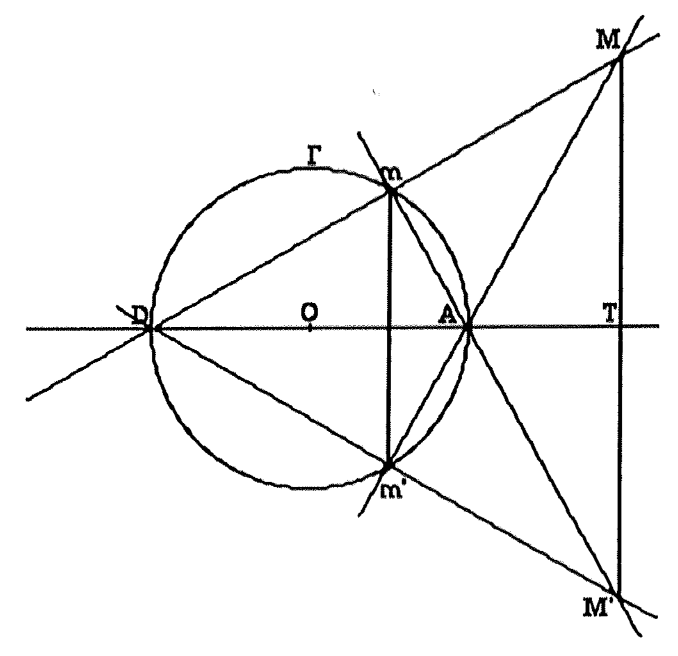


Figure 7. *Construction géométrique de l'application h*

De $TM^2 = TO^2 - OA^2$, on déduit $y^2 = x^2 - 1$.

PARTIE III.C

QUESTION III.C.1. On trouve par le calcul (par exemple en traduisant les alignements MmD et $Mm'A$)

$$\boxed{\begin{cases} X = \dfrac{1}{x} \\ Y = \dfrac{y}{x} \end{cases}}$$

QUESTION III.C.2. Définissons les points m et n par leurs coordonnées :

$$m(\cos\theta, \sin\theta), \qquad n(\cos\theta', \sin\theta')$$

En écrivant que ℓ (de coordonnées $(0, y)$) est aligné avec m et n, on obtient

$$y = \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\cos\theta - \cos\theta'}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{D\ell}$ (ou $\overrightarrow{A\ell'}$) sont colinéaires (calcul des composantes).

QUESTION III.C.3. Définissons la loi $*$ comme au **II.C.2.*a*** en prenant pour droite Δ la droite (UV) et pour point E le point A. C'est une loi de groupe abélien sur $\overline{\Gamma}$ d'après la remarque suivant **II.C.2.*b***.

Définissons $\circledast$ comme au **I.B** en prenant A pour le point A_0. C'est également une loi de groupe abélien sur $\mathcal{H}$.

Soient alors deux points m et n de $\overline{\Gamma}$. Le point $h(m * n)$ est le point d'intersection des droites $(Dm * n)$ et $(A\ell')$. Comme cette dernière droite est parallèle à la droite $\big(h(m)h(n)\big)$, on en déduit l'égalité

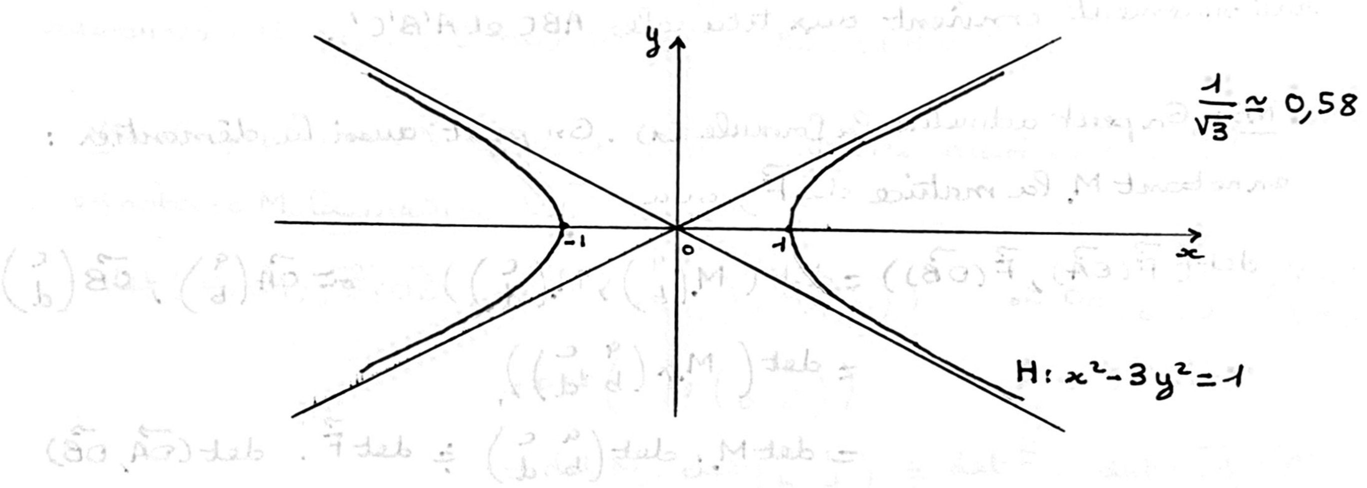
$$\boxed{h(m * n) = h(m) \circledast h(n)}$$

Ce qui prouve que h est un homomorphisme entre les groupes $(\overline{\Gamma}, *)$ et $(\mathcal{H}, \circledast)$.

CAPES Int. 91, 2^e comp.

Théorème de Pascal. Structure de groupe sur les coniques

* Tracé de H : Les asymptotes de l'hyperbole $H : x^2 - 3y^2 = 1$ sont les dtes d'équation $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x$. Elle font un angle $\frac{\pi}{6}$ avec Ox. Ox est l'axe transverse de H.



I.A.1 On trouve $f(z) = 2x + 3y + i(x + 2y)$, d'où l'expression analytique de F :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

F sera bien une application affine. La matrice de l'application linéaire $\vec{F}$ associée est :

$$\text{Mat}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\det \text{Mat}(\vec{F}) = 1 \neq 0$, F sera bijective. Comme $\sqrt{2^2 + 1^2} \neq 1$, F n'est pas une isométrie.

I.A.2

L'aire de OAB est $\frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})|$.

On a $F(O)=O$, donc $\vec{F}(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA'}$ et $\vec{F}(\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OB'}$, puis :

$$\det(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}) = \det(\vec{F}(\overrightarrow{OA}),\vec{F}(\overrightarrow{OB})) = (\det \vec{F}).\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \quad (*)$$

$$= \det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \quad \text{puisque } \det\vec{F}=1.$$

Les aires de OAB et OA'B' seront effectivement égales. Le même raisonnement convient aux triangles ABC et A'B'C'.

NB : On peut admettre la formule $(*)$. On peut aussi la démontrer : en notant M la matrice de $\vec{F}$, on a

$$\det(\vec{F}(\overrightarrow{OA}),\vec{F}(\overrightarrow{OB})) = \det\left(M.\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, M.\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right) \quad \text{où } \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

$$= \det\left(M\times\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\right)$$

$$= \det M.\det\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \det\vec{F}.\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$$

I.A.3.a Comme $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, clairement :

$$M\in S \Rightarrow M'\in S$$

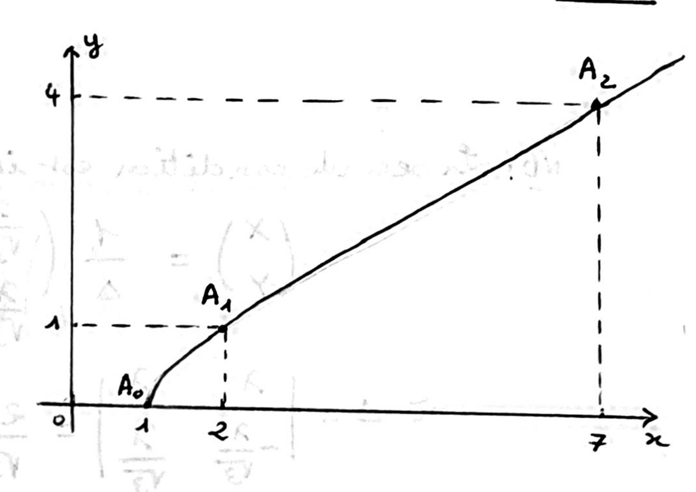
Réciproquement, $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$ montre que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$,

et donc : $M'\in S \Rightarrow M\in S$

I.A.3.b

$$M'\in H \Leftrightarrow x'^2-3y'^2=1 \Leftrightarrow (2x+3y)^2-3(x+2y)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x^2-3y^2=1 \Leftrightarrow M\in H$$



I.A.4.a

A_1 : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

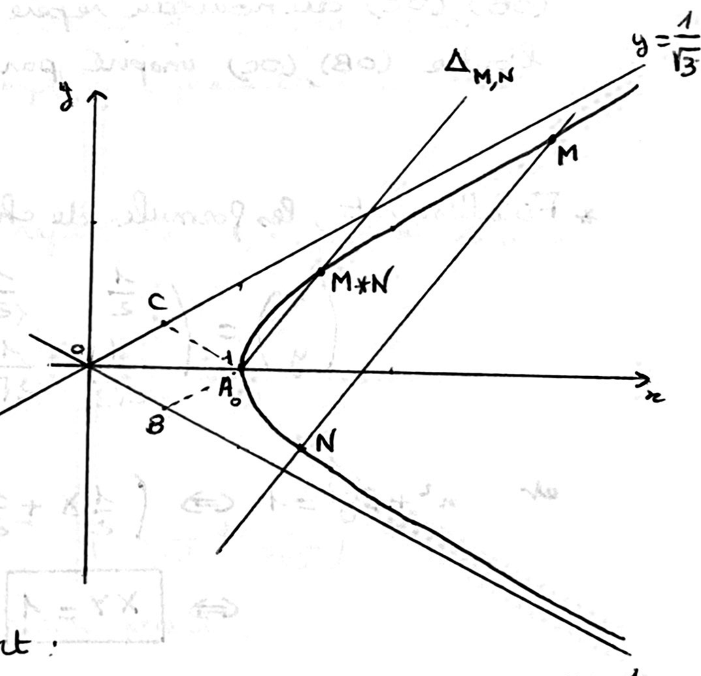
A_2 : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

I.A.4.b Récurrence sur n :

$A_0 \in H \cap S$. Si $A_n \in H\cap S$, alors $A_{n+1} = F(A_n) \in H \cap S$ d'après I.A.3

I.A.4.c Un point de coordonnées entières de l'arc $[A_0, A_1]$ de H sera d'abscisse 1 ou 2. Réc., les seuls pts de coord. entières d'abscisse 1 et 2 de $[A_0 A_1]$ sont A_0 et A_1. Ces 2 points sont donc <u>les 2 seuls points de l'arc appartenant à S</u>.

I.B.1



Notons $\mathcal{R} = (O, B, C)$ le nouveau repère, et :

$$\begin{cases} \vec{OB} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ \vec{OC} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Les formules de changement de repère sont :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{anciennes coordonnées}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ -\frac{\lambda}{\sqrt{3}} & \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}_{P_{(\vec{i},\vec{j})}^{(\vec{OB},\vec{OC})}} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{\text{n}^{\text{elles}}\text{ coordonnées}}$$

La condition sur A_0 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ -\frac{\lambda}{\sqrt{3}} & \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \lambda = \frac{1}{2}.$$

NB : La seconde condition est inutile car mène à calculer

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\sqrt{3}} & -\lambda \\ \frac{\lambda}{\sqrt{3}} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ -\frac{\lambda}{\sqrt{3}} & \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2\lambda^2}{\sqrt{3}}$

et s'écrit : $\frac{1}{\Delta}\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{3}} - \lambda\right) < 1$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < \lambda$$

qui est toujours vrai avec $A = \frac{1}{2}$.

Cette seconde condition était nécessaire pour choisir "l'ordre" des axes (OB), (OC) du nouveau repère. Nous avons, dès le départ, choisi l'ordre (OB), (OC) inspiré par le graphique précédent ...

* Finalement, les formules de chgt de repère de $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vers $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

et $x^2 - 3y^2 = 1 \iff \left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^2 - 3\left(-\frac{X}{2\sqrt{3}} + \frac{Y}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1$

$$\iff \boxed{XY = 1} \quad \text{comme prévu.}$$

2e solution : Soient Δ_1 (resp. Δ_2) l'asymptote d'équation $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ (resp. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$) dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

L'équation de Δ_1 dans $\mathcal{R}$ sera : $Y = 0$

Donc $Y = k(x + y\sqrt{3})$

De même, l'équation de Δ_2 dans $\mathcal{R}$ sera : $X = 0$

Donc $X = k'(x - y\sqrt{3})$

Les constantes k et k' sont alors fixées par la condition sur A_0.

On trouve $k = k' = 1$ (...)

I.B.2 Dans le repère $\mathcal{R}$, notons $M\begin{pmatrix} m \\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{n}\end{pmatrix}$

• <u>Si $M \neq N$</u>, alors $m \neq n$ et en notant $\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x}\end{pmatrix}$ les coordonnées de $M*N$ dans $\mathcal{R}$, on a $\det(\overrightarrow{A_0 M*N}, \overrightarrow{MN}) = 0$ soit

$$\begin{vmatrix} x-1 & n-m \\ \frac{1}{x}-1 & \frac{1}{n}-\frac{1}{m} \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\frac{m-n}{mn} - \left(\frac{1}{x}-1\right)(n-m) = 0$$

$$(x-1)\left(\frac{1}{mn} - \frac{1}{x}\right) = 0 \qquad \text{puisque } m \neq n$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = mn$$

On choisit toujours le point d'intersection de $\mathcal{D}_{MN}$ et H autre que A_0, donc $x = mn$

• <u>Si $M = N$</u>, la tangente à H en $M\begin{pmatrix} m \\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{m^2}\end{pmatrix}$ et en notant toujours $M*N\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x}\end{pmatrix}$, on a $\det(\overrightarrow{A_0 M*N}, \vec{u}) = 0$ ie

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ \frac{1}{x}-1 & -\frac{1}{m^2} \end{vmatrix} = 0$$

soit $$(x-1)\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Encore une fois, on choisira $x = m^2$. On peut conclure :

<u>Conclusion</u> : Dans tous les cas, si $M\begin{pmatrix} m \\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{n}\end{pmatrix}$ sont donnés dans le repère $\mathcal{R}$, les coordonnées de $M*N$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont :

$$M*N \begin{pmatrix} mn \\ \frac{1}{mn}\end{pmatrix}$$

* L'application

$$\varphi : (\mathbb{R}^*, .) \longrightarrow H$$

$$m \longmapsto M \text{ de coordonnées } \begin{pmatrix} m \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{R}$$

est bijective, et permet de transporter la structure de groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^*$ sur H. La loi $\perp$ sur H, définie par

$$M \perp N = \varphi\left(\varphi^{-1}(M) . \varphi^{-1}(N)\right)$$

structure H en groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^*, .)$.

On constate que

$$\varphi(m) * \varphi(n) = \varphi(mn)$$

d'où $M \perp N = \varphi(\varphi^{-1}(M) . \varphi^{-1}(N))$

$= \varphi(m . n)$ (où l'on pose $\varphi(m) = M$ et $\varphi(n) = N$)

$= \varphi(m) * \varphi(n)$

$= M * N$

ie $\perp = *$.

Ccl : $(H, *)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}^*, .)$

* Les résultats précédant sont valables pour toute hyperbole du plan, puisqu'on peut toujours utiliser le repère constitué par les asymptotes de ces hyperboles et obtenir l'équation réduite $XY = 1$.

I.C.1 On sait que $A_1 * M$ est le second point d'intersection de la parallèle Δ_{A_1M} à (A_1M) passant par A_0 et H, sauf si Δ_{A_1M} est verticale.
On sait aussi que $F(M) \in H$ puisque $M \in H$.
Il s'agit donc de montrer que $(F(M)A_0)$ est parallèle à (A_1M), et que $F(M) \neq A_0$ (sauf si Δ_{A_1M} verticale) pour conclure à $F(M) = A_1 * M$.

• <u>$(F(M)A_0)$ est parallèle à (A_1M)</u> :

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

$$\overrightarrow{A_1M}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{A_0F(M)}\begin{pmatrix} x'-1 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y-1 \\ x+2y \end{pmatrix}$$

donc
$$\begin{vmatrix} x-2 & 2x+3y-1 \\ y-1 & x+2y \end{vmatrix} = (x-2)(x+2y)-(y-1)(2x+3y-1)$$
$$= x^2 - 3y^2 - 1$$
$$= 0 \quad \text{puisque } M \in H.$$

• <u>$F(M) \neq A_0$ (sauf si Δ_{A_1M} verticale)</u> :

$$F(M) = A_0 \iff \begin{cases} 2x+3y = 1 \\ x+2y = 0 \end{cases} \iff M\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff (MA_1) \text{ verticale}.$$

et si (MA_1) est verticale, $F(M) = A_0$ est exact. □

I.C.2

$A_n = F(A_{n-1}) = A_1 * A_{n-1}$

Dans le repère $\mathcal{R}$, $A_1 \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $A_n \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$.

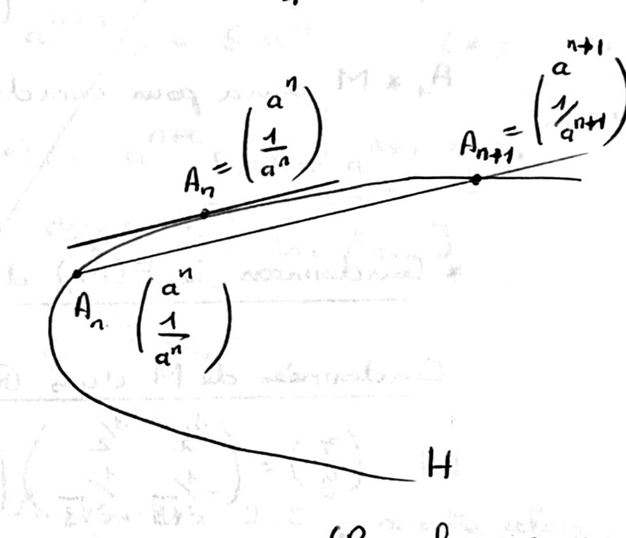
$A_n \in H$ donc $Y_n = \frac{1}{X_n}$.

Le calcul des coordonnées de $M*N$ dans $\mathcal{R}$ du I.B.2 donne :

$$X_n = a\, X_{n-1} = a^2 X_{n-2} = \cdots = a^{n-1} X_1 = a^n = X_1^n$$

$$\boxed{X_n = X_1^n}$$

I.C.3.a



(Rappel : $0<a<1$)

La tangente à H en A_n est de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{(a^n)^2} \end{pmatrix}$,

et $\overrightarrow{A_{n-1}A_{n+1}} = \begin{pmatrix} a^{n+1} - a^{n-1} \\ \frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \end{pmatrix}$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & a^{n+1} - a^{n-1} \\ -\frac{1}{a^{2n}} & \frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \end{vmatrix} = 0$, on constate que la tgte à H en A_n est parallèle à $(A_{n-1}A_{n+1})$

2^e solution : $A_n * A_n$ et $A_{n-1} * A_{n+1}$ ont même abscisse a^{2n} dans $\mathcal{R}$ et appartiennent à H, donc sont confondus. Notons :

$$B \doteq A_n * A_n = A_{n-1} * A_{n+1}$$

Par définition de $*$: $\begin{cases} (A_0B) \,//\, (A_{n-1}A_{n+1}) \\ (A_0B) \,//\, \text{tgte à H en } A_n \end{cases} \Rightarrow (A_n\ A_{n+1}) \,//\, \text{tgte à H en } A_n.$

CQFD

I.C.3.b

D'après I.A.2, l'aire de $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ est égale à l'aire de $A_0A_1A_2$, ie a :

$$\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right| = 1$$

I.C.4

$$M \in [A_nA_{n+1}] \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^{n+1} \leq t \leq a^n \qquad (*)$$

$$M' = A_1 * M = \begin{pmatrix} at \\ \frac{1}{at} \end{pmatrix} \text{ de sorte que } (*) \Leftrightarrow a^{n+2} \leq at \leq a^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow M' \in [A_{n+1}A_{n+2}].$$

I.C.5

Clairement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H\cap S$.

On a vu que $[A_0A_1] \cap S = \{A_0, A_1\}$. La question I.C.4 montre alors par récurrence que $[A_nA_{n+1}] \cap S = \{A_n, A_{n+1}\}$, F induisant une bijection de $[A_{n-1}A_n]$ sur $[A_nA_{n+1}]$ et laissant S globalement invariant.

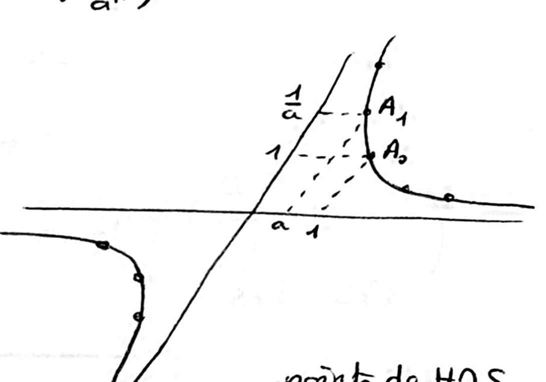
Ainsi les points de $H\cap S$ situés dans le quart de plan $x\geq 0, y\geq 0$ sont les A_n, $n\in\mathbb{N}$.

Par symétries, $H\cap S$ est constitué des points A_n, $n\in\mathbb{N}$, et de leurs symétriques / aux droites Ox et Oy

I.C.6

Les points A_n, $n \in \mathbb{N}$, sont de coordonnées $\begin{pmatrix} a^n \\ \frac{1}{a^n} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$, où $0<a<1$.

$H \cap S$ sera formé des points de coordonnée $\begin{pmatrix} a^n \\ \frac{1}{a^n} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -a^n \\ -\frac{1}{a^n} \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, et il est alors aisé de voir que $(H \cap S, *)$ est un groupe pour la loi



points de $H \cap S$

$$\begin{pmatrix} m \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mn \\ \frac{1}{mn} \end{pmatrix}$$

(C'est le sous-groupe de $(H, *)$ engendré par A_1 et par le symétrique A'_1 de A_1 /$_a$ O)

I.C.7.a $A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}_0$, donc A_1 aura les coordonnées suivantes dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} X_1 = 2 - \sqrt{3} \doteq a \\ Y_1 = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$ (cf I.B.1)

I.C.7.b

$$\begin{cases} X_n = a^n = (2-\sqrt{3})^n \\ Y_n = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{(2-\sqrt{3})^n} = (2+\sqrt{3})^n \end{cases}$$

I.C.8

Les solutions (x,y) entières de l'équation $x^2-3y^2=1$ sont les coordonnées des points de $H \cap S$ dans $\mathcal{R}_0$, à savoir les points de coordonnées

$$\pm\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathcal{R}, \quad \text{où } n \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions cherchées seront donc les :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm P \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \qquad \text{où } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left((2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n\right) \end{pmatrix}$$

NB : Ce sont bien des entiers. Ainsi

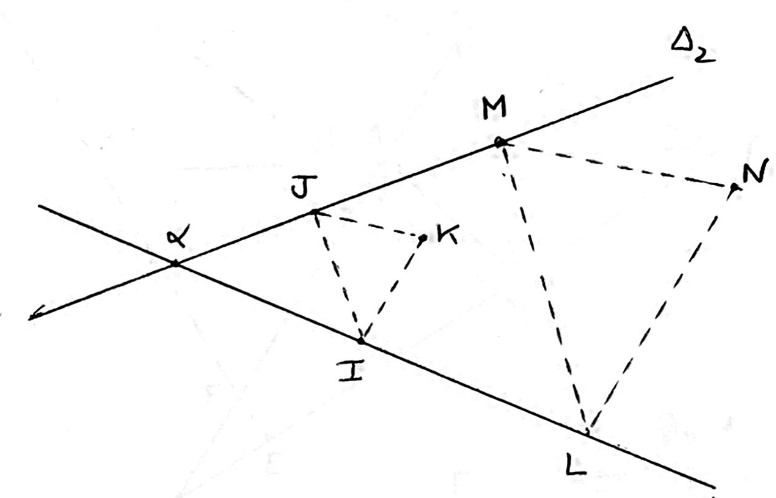
$$(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}(-\sqrt{3})^k + C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{3})^k$$

$$= \sum_{t=0}^{E(n/2)} C_n^{2t}\, 2^{n-2t+1} \cdot 3^t \in \mathbb{Z} \qquad (\ldots)$$

II.A.1

C'est la configuration du Th. de Desargues.

L'homothétie h de centre α transformant J en M, transformera I en L car (IJ) // (ML)



L'image de (JK) par h sera la dte // à (JK) passant par $h(J)=M$, soit (MN)

" (IK) " (IK) $h(I)=L$, soit (LN)

donc $h(K)=N$, et α, K, N sont alignés.

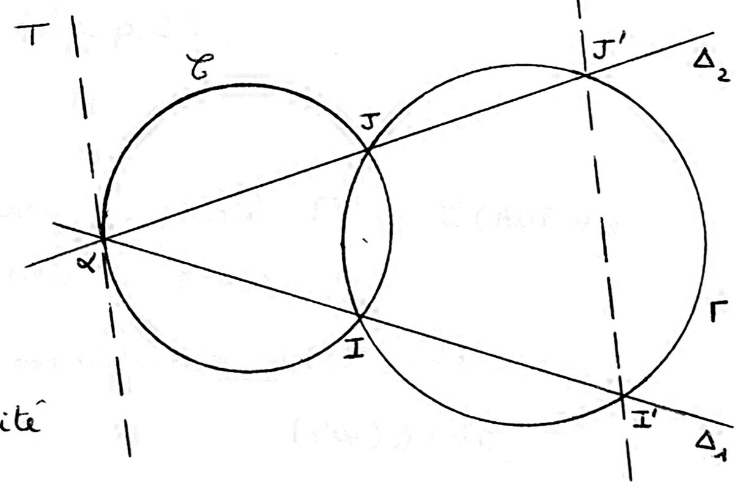
II.A.2 En angles de droites :

$\widehat{T, \Delta_1} = \widehat{J\alpha, JI} \quad [\pi]$

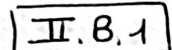
$= \widehat{JJ', JI}$

$= \widehat{I'J', I'I}$ par cocyclicité

$= \widehat{I'J', \Delta_1}$



montre bien que $T \,//\, (I'J')$



Soit $\mathcal{C}(AD\omega')$ le cercle circonscrit au triangle $AD\omega'$. D'après II.A.2, (BC) sera toujours parallèle à la tgte à $\mathcal{C}(AD\omega')$ en ω'.

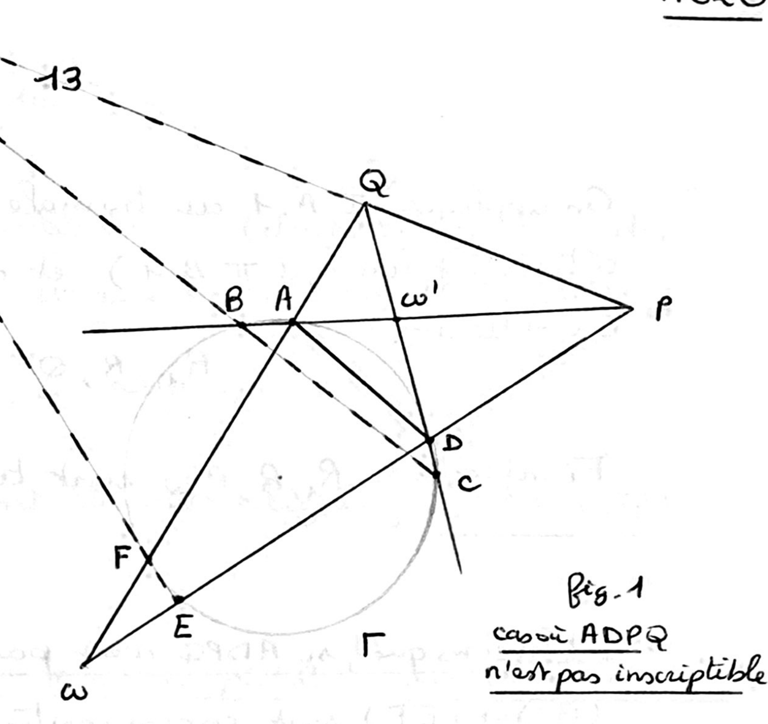


fig. 1
cas où ADPQ n'est pas inscriptible

De même, (EF) sera toujours // à la tangente à $\mathcal{C}(AD\omega)$ en ω

" (BE) " " $\mathcal{C}(ADP)$ en P

" (CF) " " $\mathcal{C}(ADQ)$ en Q

<u>NB</u> : Une seconde solution est proposée à la p. 24.

II.B.2

On applique encore II.A.2 avec les 2 cercles Γ et $\mathcal{C}(ADPQ)$ (qui sont des cercle Γ "particuliers" du II.A.2).

Avec les droites (ωA), (ωD) ; on obtient (PQ)//(EF)

" $(\omega' A)$, $(\omega' D)$; " (PQ)//(BC)

II.B.3

* <u>Supposons que (BC) et (FE) se coupent en R</u> (fig. ci-dessus)

On applique II.A.1 avec le triangle RBE et les droites fixes (PB), (PE). Les côtés de RBE ayant des directions fixes (II.B.1), si R_1 est un autre point obtenu par la même construction donnant R, on a :

R_1, R, P alignés

On applique II.A.1 au triangle RCF (dont les directions des côtés sont fixes, cf II.B.1) et aux droites fixes (QF), (QC).
On obtient :

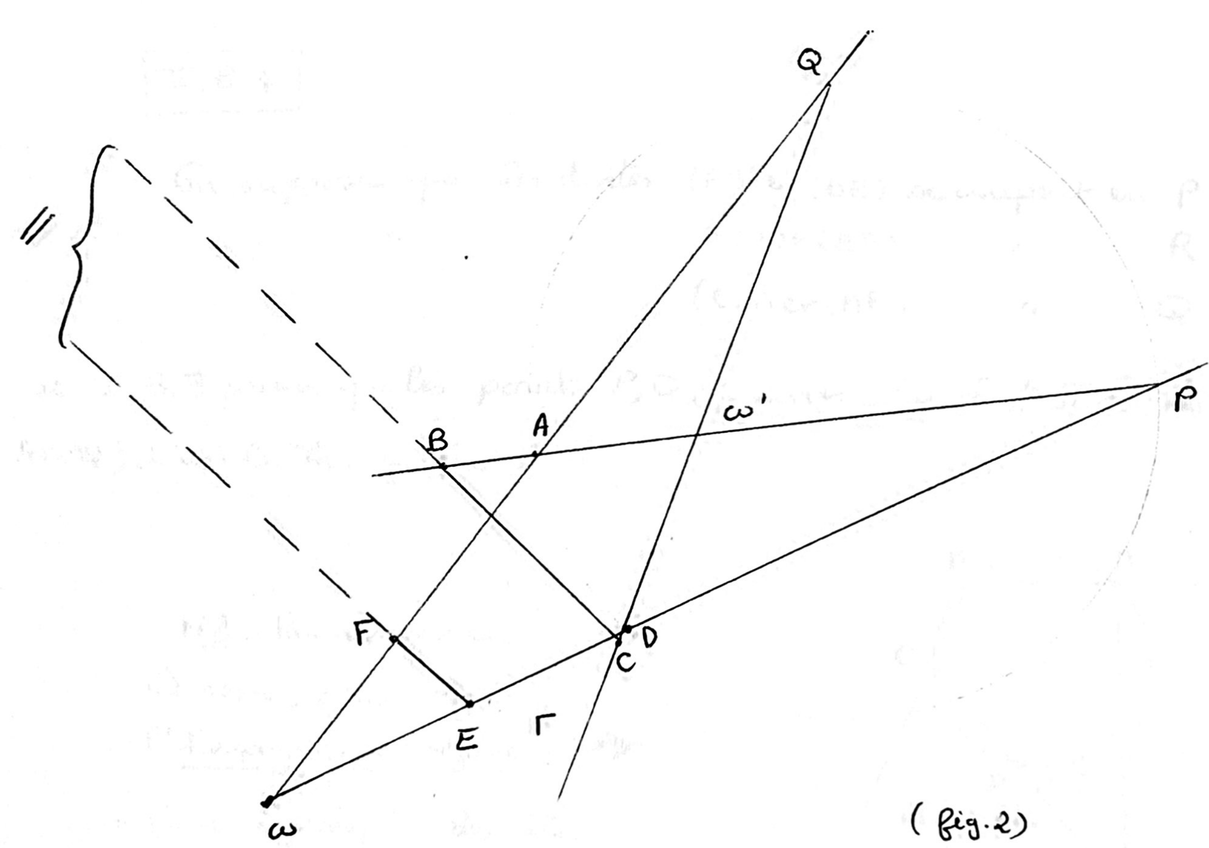
$$R_1, R, Q \text{ alignés}$$

Finalement R_1, R, P, Q sont toujours alignés, <u>ie $R \in (PQ)$</u>

* <u>Montrons que, si ADPQ n'est pas inscriptible, alors les droites (BC) et (EF) sont concourantes.</u>

En fait, on prouvera la contraposée :

$$(BC) \,//\, (EF) \quad \Rightarrow \quad ADPQ \text{ inscriptible}$$



(fig.2)
<u>cas où ADPQ est inscriptible</u>
(ou, ce qui revient au même, vu II.B.2 et II.B.3, où (BC)//(EF))

La tangente (T) à $\mathcal{C}(AD\omega)$ en ω sera // à (EF) } d'après II.A.2
La tangente (T') à $\mathcal{C}(AD\omega')$ en ω' sera // à (BC)

On suppose (EF)//(BC), donc (T)//(T') (1)

Notons P' le second point d'intersection de $\mathcal{C}(ADQ)$ et de (AP)
" P'' " " $\mathcal{C}(ADQ)$ et de (DP)

On a (QP')//(T) et (QP'')//(T') d'après II.A.2.
(1) entraine alors (QP')//(QP''), d'où (QP')=(QP''),
et donc P'=P''.

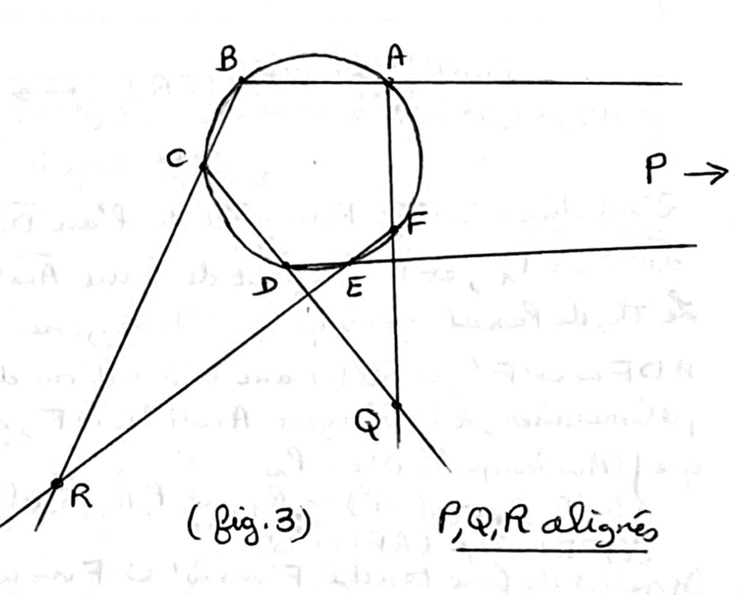
Comme P'∈(AP) et P''(DP), P'=P'' entraine P'=P''=P
et le cercle $\mathcal{C}(ADQ)$ passera par P. CQFD

II.B.4

On suppose que les droites (AB) et (DE) se coupent en P
" (BC) et (EF) " R
(CD) et (AF) " Q

et II.B.3 prouve que les points P, Q, R sont alignés (utiliser le quadrilatère ADPQ). C'est le Th. de Pascal.

NB : Pour retenir ce théorème, penser à l'hexagramme mystique →
Faire intercepter les côtés opposés de l'hexagone ABCDEF inscrit dans un cercle (ou une conique)



(fig. 3)

II.B.5 <u>1solution</u> :

<u>On se réfère à la fig. 1 p 13</u>.

Notons : $\Gamma_1 = \mathcal{C}(AD\omega\omega')$

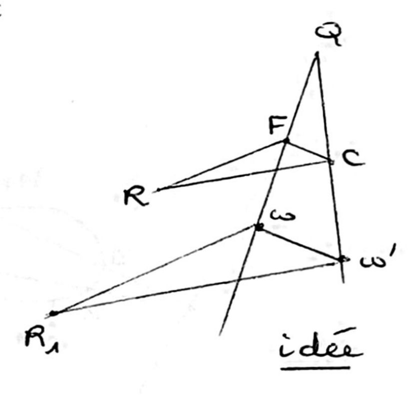
(T) la tangente à $\mathcal{C}(AD\omega) = \Gamma_1$ en ω

(T') " à $\mathcal{C}(AD\omega') = \Gamma_1$ en ω'

On applique II.A.1 à la configuration :

- <u>droites fixes</u> : (QA), (QC)
- <u>triangles</u> : $\omega\omega'R_1$ et FCR

pour conclure à l'alignement des points Q, R, R_1. Comme P, Q, R sont alignés (II.B.3), on aura : <u>P, Q, R_1 alignés</u>.



(fig. 4)

Vérifions donc que :

$(\omega\omega') // (FC)$

> On utilise II.A.2 : $(\omega\omega')$ sera // à la tangente à $\mathcal{C}(QAD)$ en Q. De même pour (FC)

$(\omega R_1) = (T) // (FR)$ ⟶

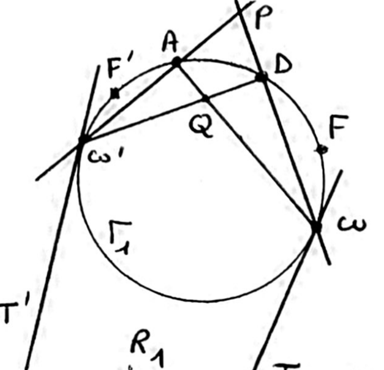
> $(\omega R_1) = (T)$ sera // à (FE) = (FR) d'après II.A.2

$(\omega' R_1) = (T') // (CR)$ ⟶

> $(\omega' R_1) = (T')$ sera // à (BC) = (CR) d'après II.A.2

<u>2solution</u> : Soient F un point de l'arc $\widehat{D\omega}$ du cercle Γ_1, et F' un point de l'arc $\widehat{A\omega'}$. Le Th. de Pascal appliqué à l'hexagone $ADF\omega\omega'F'$, ou plutôt avec les notations des préliminaires, à l'hexagone $A\omega'F'D\omega F$, montre que

$$\begin{cases} (A\omega') \text{ coupe } (\omega D) \text{ en } P \\ (\omega'F') \text{ coupe } (\omega F) \text{ en } \tilde{R}_1 \\ (F'D) \text{ coupe } (AF) \text{ en } \tilde{Q} \end{cases} \quad \text{et } P, \tilde{R}_1, \tilde{Q} \text{ alignés.}$$

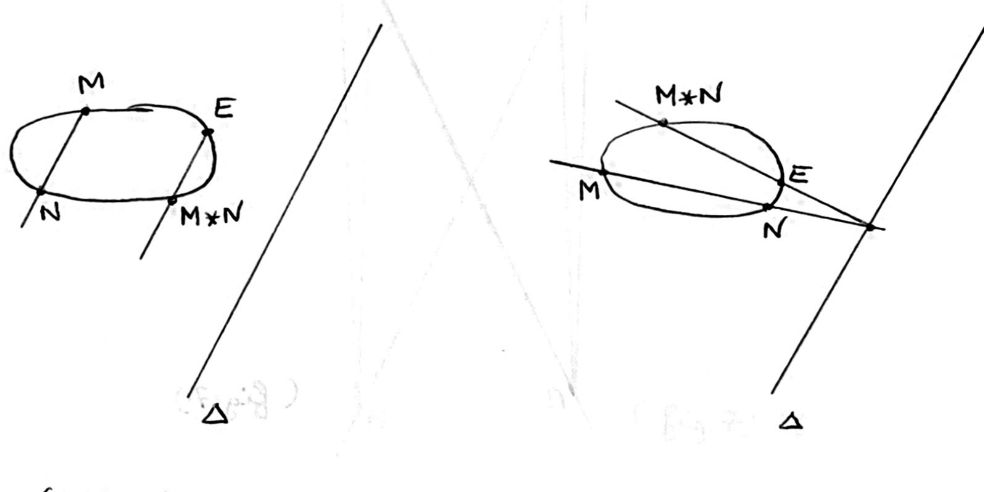


Il suffit de faire tendre F' vers ω' et F vers ω pour

II.C.1 L'ellipse se déduit de son cercle principal par l'affinité orthogonale d'axe l'axe focal et de rapport $\frac{b}{a}$. Cette affinité est une bijection et conserve l'alignement. Cela suffit pour conclure.

II.C.2.a

NB : 2 cas de figure



$(MN) \parallel (\Delta)$ (fig. 5)

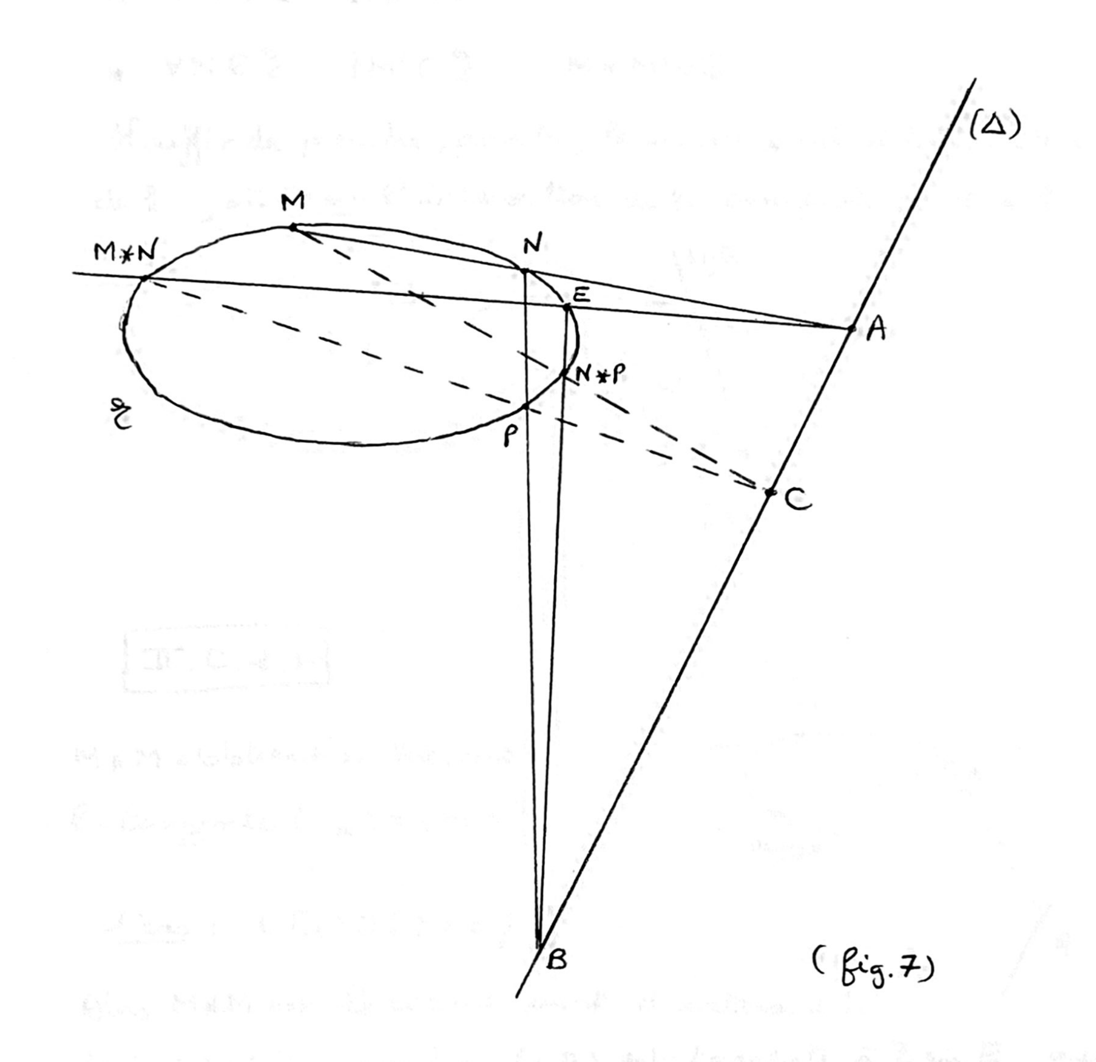
$(MN) \not\parallel (\Delta)$ (fig. 6)

∗ La loi ∗ est interne et commutative.

∗ Associativité : on supposera que l'on obtient le cas de figure le plus général, ie celui où $(MN) \not\parallel (\Delta)$.

Il s'agit de montrer :

$$(M * N) * P = M * (N * P)$$



(fig. 7)

Les droites M, N et M*N, E se coupent en A

" N, P et E, N*P se coupent en B

" P, M*N et N*P, M se couperont en un point C ∈ (AB) d'après le Th. de Pascal.

Donc C ∈ (Δ) = (AB).

La droite P, M*N coupe Δ en C, donc (M*N)*P sera la seconde intersection de (CE) et de ℰ.

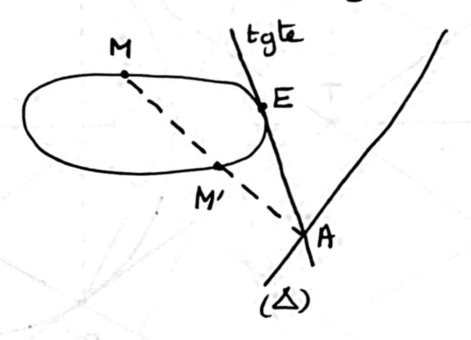
La droite N*P, M coupe aussi Δ en C, donc M*(N*P) sera la seconde intersection de (CE) et de ℰ.

Finalement : (M*N)*P = M*(N*P)

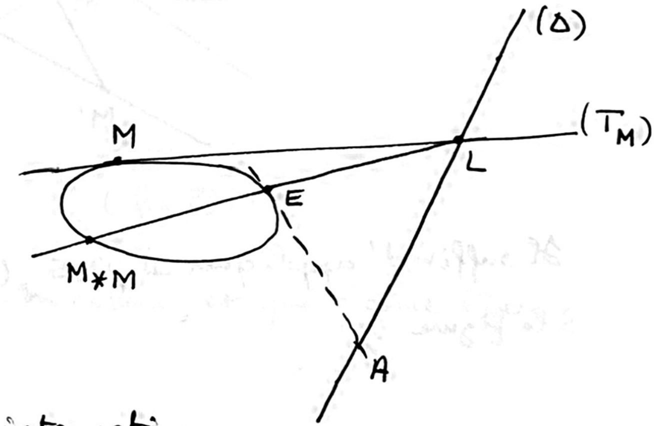
* $\forall M \in \mathcal{E} \quad E * M = M$ donc E est l'élément neutre.

* $\forall M \in \mathcal{E} \quad \exists M' \in \mathcal{E} \quad M * M' = E$

Il suffit de prendre, pour M', le second point d'intersection de (MA) et de $\mathcal{E}$, où A est l'intersection de la tangente en E à $\mathcal{E}$ et de (Δ) :



II.C.2.b



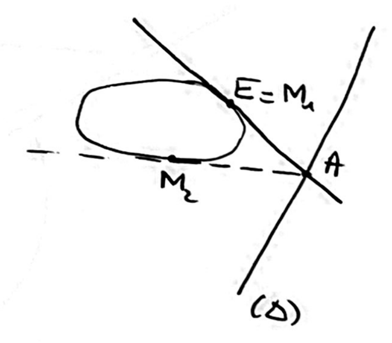
$M * M$ s'obtient en traçant la tangente (T_M) en M à $\mathcal{E}$.

1^er cas : $(T_M) \cap (\Delta) = \{L\}$

Alors $M * M$ est le second point d'intersection de (LE) et $\mathcal{E}$, sauf si (LE) est tangente à $\mathcal{E}$ en E, auquel cas c'est E.

On désire $M * M = E$, il est donc nécessaire que (LE) soit tangente à $\mathcal{E}$ en E.

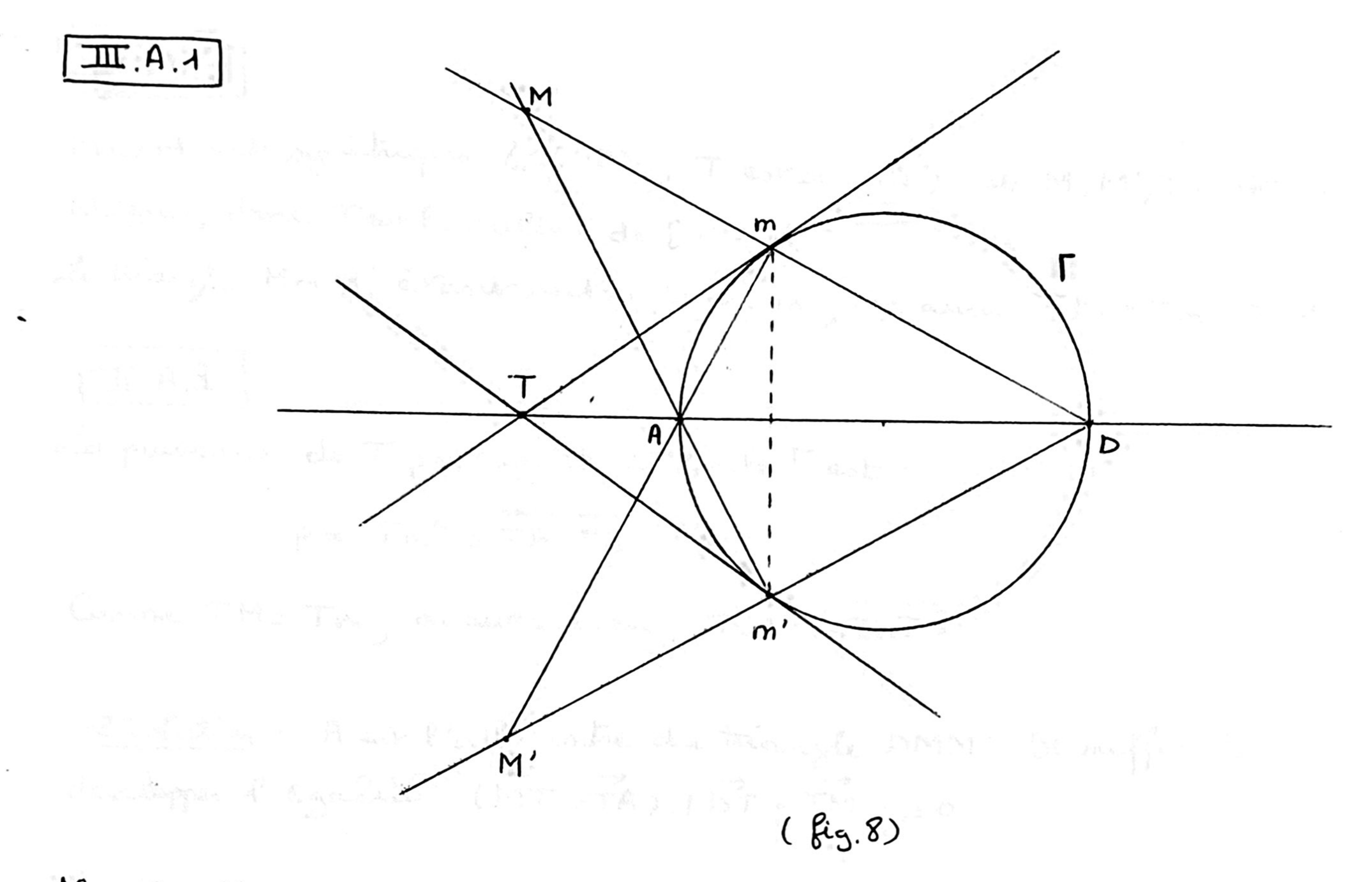
Il y aura donc 2 points $M_1 = E$ et M_2 vérifiant $M * M = E$, à savoir les points de contact des 2 tangentes à $\mathcal{E}$ issues de A. (fig. ci-contre)



2^e cas : $(T_M) // (\Delta)$.

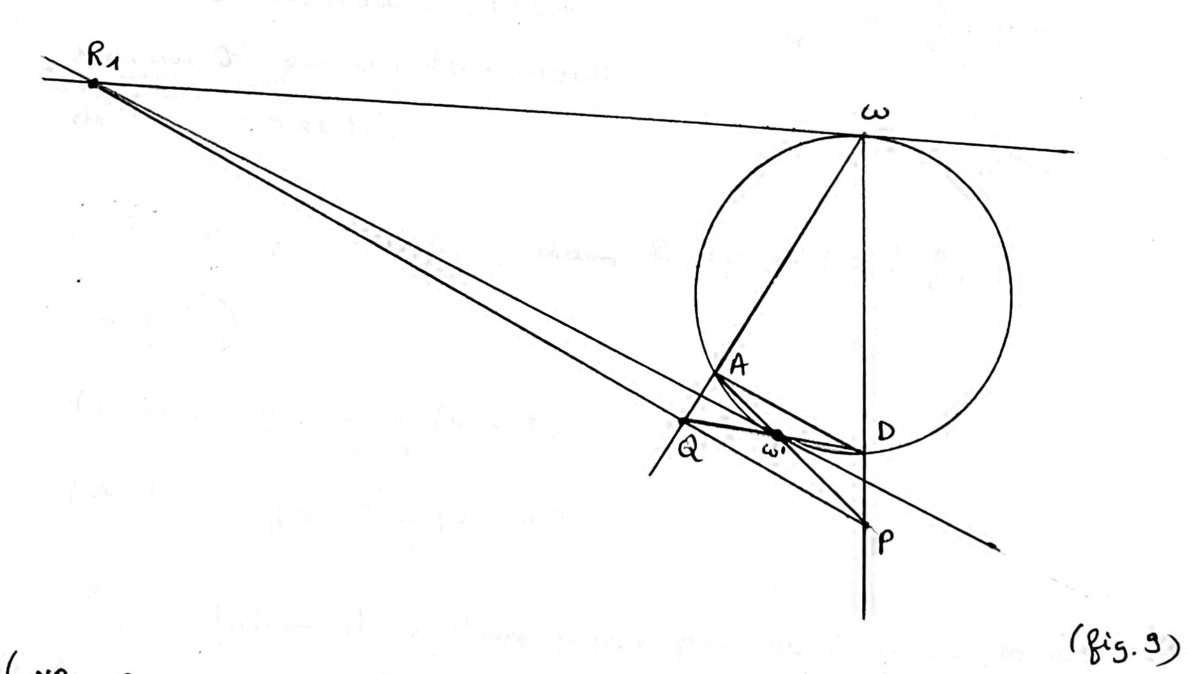
Alors $M * M$ est le second point d'intersection de la parallèle à (T_M) passant par E. Clairement, dans ce cas : $M * M \neq E$

III.A.1



(fig. 8)

Il suffit d'appliquer II.B.5, que l'on relira, et qui donne lieu à la figure :



(fig. 9)

(NB : Question, y-a-t'il une preuve plus directe ?)

III.A.2

M et M' sont symétriques /à (AD), T est sur (AD) et M, M', T sont alignés, donc T est le milieu de [MM'].
Le triangle MmM' étant rectangle en m, on aura TM = Tm = TM'.

III.A.3

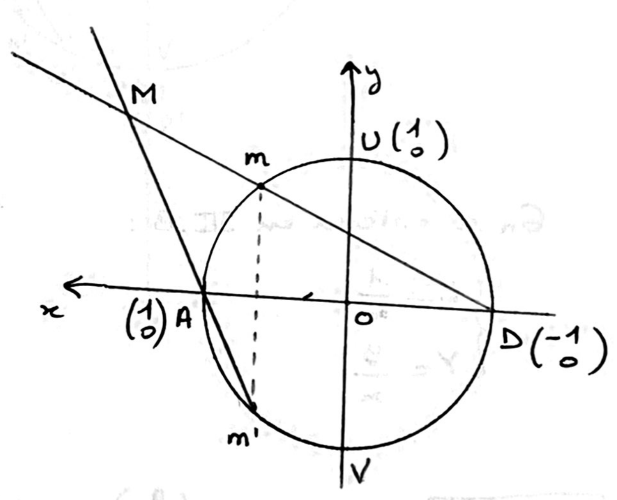
La puissance de T par rapport au cercle Γ est :

$$p \doteq Tm^2 = \overline{TA}.\overline{TD}$$

Comme TM = Tm, on aura bien $TM^2 = \overline{TA}.\overline{TD}$

2e solution : A est l'orthocentre du triangle DMM'. Il suffit de développer l'égalité $(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TA}).(\overrightarrow{DT}+\overrightarrow{TM'}) = 0$

III.B



$$h : \Gamma \longrightarrow P$$
$$m \longmapsto M$$

- Si m est en A ou D, M = m sera sur H puisque les sommets de H sont A et D.

- Sinon, posons $m\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$m'\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$

(Dm) : $y = \dfrac{b}{a+1}(x+1)$

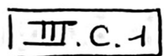
(Am') : $y = \dfrac{-b}{a-1}(x-1)$

La solution du système formé par ces 2 dernières équations donne les coordonnées de M : $M\begin{pmatrix}1/a\\b/a\end{pmatrix}$

qui vérifient bien

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = 1$$

car $a^2 + b^2 = 1$.



(fig. 10)

On a obtenu en III.B :

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{x} \\ Y = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

III.C.2 Posons $m\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $n\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \\ \frac{d}{c} - \frac{b}{a} \end{pmatrix}$ et $(nm) : \quad y - b = \dfrac{d-b}{c-a}(x-a)$

(nm) coupe (UV) en $\ell\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $y - b = \dfrac{d-b}{c-a}(-a)$

d'où $\ell\begin{pmatrix} 0 \\ b + \frac{(d-b)a}{a-c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ad-bc}{a-c} \end{pmatrix}$ et $\ell'\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{bc-ad}{a-c} \end{pmatrix}$

On calcule $\vec{A\ell'} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{bc-ad}{a-c} \end{pmatrix}$ et l'on a :

$$\det(\vec{MN}, \vec{A\ell'}) = \begin{vmatrix} \frac{a-c}{ac} & -1 \\ \frac{ad-bc}{ac} & \frac{bc-ad}{a-c} \end{vmatrix} = 0$$

Donc $(MN) \,//\, (A\ell')$

III.C.3 (Voir fig. 10)

* Loi $*$ sur $\overline{\Gamma}$: Comme dans la remarque du II.C.2.b, avec la droite $(\Delta) = (UV)$ et le point $E \doteq A$

* Loi $\circledast$ sur $\mathcal{H}$: Comme en I.B, le point A_0 étant ici le point A. Ainsi $M \circledast N$ est le second point d'intersection de $\mathcal{H}$ et de la parallèle à (MN) passant par A.

* $h(m*n)$ sera l'intersection des droites $(D\, m*n)$ et $(A\,(m*n)')$. Comme $m*n \in (A\ell)$, on aura par symétrie $(m*n)' \in (A\ell')$ de sorte que la droite $(A\,(m*n)')$ soit égale à la droite $(A\ell')$.

Ainsi : $$h(m*n) \in (A\ell') \cap \mathcal{H} \qquad (1)$$

* $(A\ell')$ est parallèle à (MN), donc

$$M \circledast N \in (A\ell') \cap \mathcal{H} \qquad (2)$$

(1) et (2) entraînent

$$h(m*n) = M \circledast N$$

de sorte que h soit un homomorphisme de groupe de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathcal{H}$.

FIN

Compléments et Remarques

- **Autre solution de II.B.1**

On se réfère à la fig. 1.

Γ coupe (AP) et (DQ) resp. en B et C. Un autre cercle Γ' passant par A et D recoupe ces mêmes droites en B' et C'. La puissance de ω' par rapport à Γ permet d'écrire :

$$\overline{\omega' B} . \overline{\omega' A} = \overline{\omega' D} . \overline{\omega' C} .$$

La puissance de ω' par rapport à Γ' donne aussi :

$$\overline{\omega' B'} . \overline{\omega' A} = \overline{\omega' D} . \overline{\omega' C'} ,$$

et ces 2 égalités entraînent :

$$\frac{\overline{\omega' B}}{\overline{\omega' B'}} = \frac{\overline{\omega' C}}{\overline{\omega' C'}} ,$$

La réciproque du Théorème de Thalès permet alors d'affirmer que (BC) est parallèle à (B'C'). La droite (BC) conserve donc bien une direction fixe quand Γ varie.

Enoncé de la Première Composition du Capes Interne 1992

Dans tout le problème, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, f désigne une fonction numérique définie sur I.

S'il existe deux réels k et α positifs ou nuls tels que, pour tous x et y éléments de I, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|^\alpha$, on dit que f possède sur I la propriété $\mathscr{P}(k, \alpha)$.

Le problème étudie certaines propriétés de fonctions possédant sur I la propriété $\mathscr{P}(k, \alpha)$ selon les valeurs de k et α (parties I, III, IV).

La partie II, indépendante de la partie I, propose l'étude d'une famille de fonctions, étude reprise à la fin des parties III et IV.

Il est conseillé d'utiliser les représentations graphiques, notamment comme outils de recherche.

I. Différentes valeurs de α

A. *Cas où* $\alpha > 1$.

1. On suppose que f possède sur I la propriété $\mathscr{P}(k, 3)$ avec $k > 0$. C'est donc que, pour tous réels x et y de I, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|^3$.

   a. Soit x_0 un point de I. Déterminer la limite de $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|$ quand x, élément de I, tend vers x_0, avec $x \neq x_0$.

   b. Montrer que f est dérivable en tout point de I et déterminer sa fonction dérivée f'.

2. Déterminer toutes les fonctions définies sur I et vérifiant sur I la propriété $\mathscr{P}(k, 3)$ avec $k > 0$.

3. Étendre l'étude faite dans A.1. et A.2. au cas où f possède sur I la propriété $\mathscr{P}(k, \alpha)$ avec $k > 0$ et $\alpha > 1$.

B. *Cas où* $\alpha = 0$.

1. On suppose que f possède sur I la propriété $\mathscr{P}(k, 0)$. C'est donc que, pour tous réels x et y de I, $|f(x) - f(y)| \leqslant k$.

   a. Soit x_0 un élément de I. Montrer que, pour tout réel x de I, $|f(x)| \leqslant k + |f(x_0)|$.

   b. En déduire que f est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que, pour tout réel x de I, $|f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

2. Énoncer et établir une réciproque de la propriété précédente.

C. *Cas où* $0 < \alpha \leqslant 1$.

1. Étude d'un exemple.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$.

   a. On suppose $0 \leqslant y \leqslant x$. Montrer que $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x - y}$.

   b. Montrer que f possède sur $\mathbb{R}$ la propriété $\mathscr{P}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire que, pour tous réels x $\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.

   On distinguera *a priori* les cas :
   - $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$;
   - $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$;
   - $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$;
   - $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$.

2. Montrer que, si la fonction f possède sur I la propriété $\mathscr{P}(k, \alpha)$ avec $0 < \alpha \leqslant 1$, f est continue s

3. Dans cette question, on prend pour I l'intervalle $[a, b]$, $a < b$. On suppose que f possède sur [a propriété $\mathscr{P}(k, 1)$ avec $k > 0$ et que, de plus, $|f(b) - f(a)| = k(b - a)$.

   a. Soit x_0 un nombre réel de l'intervalle $[a, b]$. Montrer que l'hypothèse $|f(x_0) - f(a)| < k(x$ conduit à une contradiction.

   Peut-on avoir $|f(b) - f(x_0)| < k(b - x_0)$?

   b. Montrer que f est une fonction affine.

II. Étude d'une famille de fonctions

A tout réel λ, on associe la fonction numérique f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{1 + e^x} + \lambda x + e^\lambda$.

On désigne par Γ_λ la courbe représentative de f_λ dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, lorsque x décrit $\mathbb{R}$, $f_\lambda(x) + f_\lambda(-x)$ reste constant. Quelle propriété géométrique de déduit-on ?

2. On se propose d'étudier la fonction f_λ. Il est nécessaire d'étudier le signe de f'_λ et, pour cela, les vari de f'_λ et donc aussi le signe de f''_λ. Tant pour les variations de f_λ que pour les comportements asymptot différents cas sont à envisager selon les valeurs de λ.

   Organiser et réaliser cette étude selon un plan précis dont les titres et sous-titres pourraient former la d'un énoncé susceptible d'être proposé à des élèves.

3. Construire, sur des graphiques différents, les courbes Γ_{-1}, Γ_0, $\Gamma_{1/8}$, Γ_1.

   On remarquera que, quel que soit λ, la courbe Γ_λ est incluse dans la bande du plan bordée par ses asymptotes.

4. Montrer que la fonction $|f'_\lambda|$ est bornée et donner, en fonction de λ, sa borne supérieure.

5. Montrer qu'il existe k, dépendant de λ, tel que la fonction f_λ possède sur $\mathbb{R}$ la propriété $\mathscr{P}(k, 1)$.

III. Étude d'un minimum pour k

Soit f une fonction possédant sur I la propriété $\mathscr{P}(k_0, \alpha)$.

1. Montrer que, si $k > k_0$, f possède également sur I la propriété $\mathscr{P}(k, \alpha)$.

2. Soit $\mathscr{K}$ l'ensemble des réels k tels que f possède sur I la propriété $\mathscr{P}(k, \alpha)$. Montrer que $\mathscr{K}$ admet une borne inférieure h.

3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, f possède sur I la propriété $\mathscr{P}\left(h + \dfrac{1}{n}, \alpha\right)$. En déduire que f possède sur I la propriété $\mathscr{P}(h, \alpha)$.

4. Montrer que $\mathscr{K}$ est l'intervalle $[h, +\infty[$.

5. A quelle condition, nécessaire et suffisante, portant sur h, f est-elle une fonction constante sur I ?

6. Pour chacune des fonctions f_λ étudiées dans la partie II, déterminer le plus petit réel positif h_λ, dépendant de λ, tel que f_λ vérifie sur $\mathbb{R}$ la propriété $\mathscr{P}(h_\lambda, 1)$.

IV. Les fonctions k-contractantes

Si f possède sur I la propriété $\mathscr{P}(k, 1)$ avec $k < 1$, on dit que f est une fonction k-contractante.

A. *Le théorème du point fixe.*

Dans ce paragraphe, I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et prenant ses valeurs dans I. De plus f est k-contractante.

On se propose de montrer que f possède un point fixe a et un seul, c'est-à-dire qu'il existe un élément et un seul de I tel que $f(a) = a$.

1. Montrer que f admet au plus un point fixe.

2. Soit un nombre réel u_0 appartenant à I. Montrer qu'on définit une suite (u_n) de réels appartenant à I par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n entier naturel.

3. Montrer que, si la suite (u_n) est convergente, sa limite a appartient à I et que $a = f(a)$.

4. Convergence de la suite (u_n).

   a. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul,

   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k\,|u_n - u_{n-1}|$$

   puis que, pour tout n entier naturel non nul,

   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n\,|u_1 - u_0|.$$

   b. A la suite (u_n), on associe la série de terme général v_n définie par $v_0 = u_0$ et, si $n \geqslant 1$, $v_n = u_n - u_{n-1}$.

   Montrer que la série de terme général v_n est convergente et en déduire que la suite (u_n) l'est également.

   Conclure.

B. *Point fixe éventuel de* f_λ.

1. Montrer que f_1 n'a pas de point fixe.

   Montrer que, pour tous réels x et y distincts,

$$|f_1(x) - f_1(y)| < |x - y|.$$

   Ces résultats vous suggèrent-ils une remarque en liaison avec IV.A. ?

2. *a.* En utilisant $f_{\lambda - 1}$, montrer que, pour tout λ différent de 1, f_λ admet un point fixe a_λ et un seul.

   b. Déterminer le signe de a_λ suivant la valeur de λ.

   c. Étudier les limites de a_λ quand λ tend vers 1, à droite et à gauche, quand λ tend vers $+\infty$, qu tend vers $-\infty$.

3. Recherche du point fixe de f_0.

   a. Montrer que pour λ tel que $-\dfrac{3}{4} < \lambda < 1$, f_λ est contractante.

   b. Montrer que $f_0([0, 2])$ est inclus dans $[0, 2]$.

   c. Montrer qu'on peut appliquer la méthode du IV. A. en partant de $u_0 = 1{,}2$. Donner une v approchée décimale de a_0 à 10^{-3} près en justifiant le nombre d'itérations faites.

Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

Cl. Piquet
22.02.97

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1992

I. Différentes valeurs de α

A. *Cas où $\alpha > 1$*

1.a. La majoration $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq k|x-x_0|^2$ montre que

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = 0\,.$$

1.b. Il en résulte, par définition de la dérivée, que f est dérivable en tout point de I et que $f'(x) = 0$ en tout point x de I.

2. I étant un intervalle et f' étant nulle sur I, f est constante sur I. Les fonctions constantes vérifient de manière évidente la propriété $\mathcal{P}(k,3)$.

3. Si $\alpha > 1$, la majoration $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq k|x-x|^{\alpha-1}$ donne, comme précédemment, $f'(x) = 0$ sur I ; f est donc constante sur I :

Les fonctions possédant sur un intervalle I la propriété $\mathcal{P}(k,\alpha)$ avec $k > 0$ et $\alpha > 1$, sont les fonctions constantes.

B. *Cas où $\alpha = 0$*

1.a. On a évidemment $|f(x)| \leq |f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)| \leq k + |f(x_0)|$.

1.b. Pour tout choix de x_0 dans I la constante $K = k + |f(x_0)|$ convient.

2. Inversement, si f est bornée, il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}k$, d'où la majoration $|f(x)-f(y)| \leq k$ pour tout couple (x,y) de $I\times I$; f possède donc la propriété $\mathcal{P}(k,0)$:

f est bornée sur I si et seulement s'il existe un réel $k > 0$ tel que f possède la propriété $\mathcal{P}(k,0)$.

C. *Cas où $0 < \alpha \leq 1$*

1.a. Si $0 \leq y \leq x$, alors $0 \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{x}$, donc $0 \leq y \leq \sqrt{xy}$, d'où $x + y - 2\sqrt{xy} \leq x - y$, soit $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \leq x - y$; comme $0 \leq \sqrt{x}-\sqrt{y}$, on a $0 \leq \sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.

1.b. En échangeant le rôle de x et y dans la question précédente on obtient $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, c'est-à-dire $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{1/2}$ pour tous x et $y \geq 0$. On a donc, pour tous x et y réels, $|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}| \leq \sqrt{\big||x|-|y|\big|}$. Mais on sait (inégalité triangulaire) que $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$; f étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a, pour tout couple (x,y) réel $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{1/2}$:

f a la propriété $\mathcal{P}(1,\frac{1}{2})$.

2. Soit x_0 un point de I ; on a $|f(x)-f(x_0)| \leq k|x-x_0|^\alpha$ et $\alpha > 0$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} |x-x_0|^\alpha = 0$, ce qui montre que f est continue en tout point x_0 de I.

3.a. Si $|f(x_0) - f(a)| < k(x_0 - a)$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(a)| < k(x_0 - a) + |f(b) - f(x_0)|$$

mais f possède la propriété $\mathcal{P}(k, 1)$, donc $|f(b) - f(x_0)| \leq k|b - x_0|$, d'où la majoration $|f(b) - f(a)| < k(x_0 - a) + k(b - x_0) = k(b - a)$ qui contredit l'hypothèse faite dans l'énoncé. L'hypothèse $|f(b) - f(x_0)| < k|b - x_0|$ conduit de manière similaire à la même majoration contradictoire.

On a donc, pour tout $x \in]a, b[$,

$$|f(x) - f(a)| \geq k(x - a) \qquad \text{et} \qquad |f(b) - f(x)| \geq k(b - x).$$

3.b. Comme f possède la propriété $\mathcal{P}(k, 1)$, on a, pour tout $x \in]a, b[$,

$$k(x - a) \leq |f(x) - f(a)| \leq k(x - a),$$

d'où $|f(x) - f(a)| = k(x - a)$. De même, $|f(b) - f(x)| = k(b - x)$. En ajoutant ces deux égalités on obtient :

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| = k(b - a) = |f(b) - f(a)|.$$

Ceci montre que les réels $f(x) - f(a)$, $f(b) - f(x)$ et $f(b) - f(a)$ ont même signe ; si ce signe est positif, on a $f(x) = f(a) + k(x - a)$, sinon $f(x) = f(a) - k(x - a)$: f est *affine*.

II. Etude d'une famille de fonctions

1. On vérifie immédiatement que $f_\lambda(x) + f_\lambda(-x) = 2e^\lambda + 1$. Il en résulte que le point $(0, e^\lambda + \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de la courbe représentative Γ_λ.

2. Il est commode d'introduire la fonction auxiliaire h_λ, définie sur $]0, +\infty[$ par $h_\lambda(u) = \lambda - \dfrac{u}{(1+u)^2}$, car $f'_\lambda(x) = h_\lambda(e^x)$. La fonction exponentielle étant une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, les variations et le signe de f'_λ seront déterminés par ceux de h_λ sur $\mathbb{R}$. La fonction h_λ est de dérivée indépendante de λ ; cette dérivée a le signe de $x - 1$ (calcul élémentaire), d'où, pour h_λ, le tableau de variations suivant

x	0	1	$+\infty$
h_λ	λ ↘	$\lambda - \frac{1}{4}$	↗ λ

Il apparait alors que, selon les valeurs de λ, h_λ est de signe constant ou bien change deux fois de signe. Ce dernier cas se produit si et seulement si $\lambda - \frac{1}{4} < 0 < \lambda$. Ceci conduit à distinguer les trois cas suivants

i) $\lambda \geq \frac{1}{4}$: alors h_λ est positive, donc f_λ est monotone croissante.
ii) $\lambda \leq 0$: h_λ est négative, donc f_λ est monotone décroissante.
iii) $0 < \lambda < \frac{1}{4}$: alors h_λ possède deux zéros ξ_1 et ξ_2 tels que $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$; si l'on pose $x_i = \ln(\xi_i)$ $(i = 1, 2)$, on obtient pour f_λ le tableau de variations

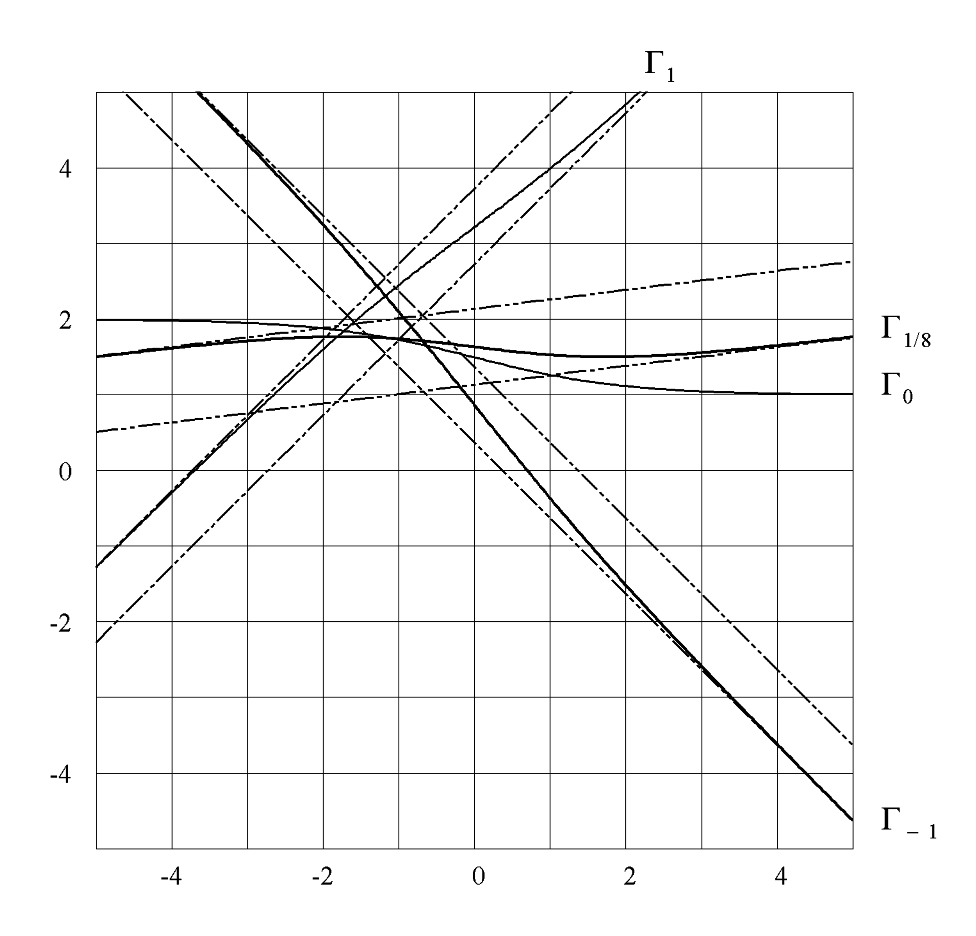
x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
f_λ	$-\infty$ ↗		↘ $e^\lambda + \frac{1}{2}$ ↘		↗ $+\infty$

La relation établie au 1) montre que $x_1 + x_2 = 0$. Le comportement des branches infinies est facile à déterminer car, pour toute valeur de λ,

$$\lim_{x\to+\infty}(f_\lambda(x) - \lambda x - e^\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f_\lambda(x) - \lambda x - e^\lambda - 1) = 0\,.$$

Il en résulte que chaque courbe Γ_λ admet en $+\infty$ l'asymptote $y = \lambda x + e^\lambda$ et en $-\infty$ l'asymptote $y = \lambda x + e^\lambda + 1$. Comme $\lambda x + e^\lambda < f_\lambda(x) < \lambda x + e^\lambda + 1$, on voit que la courbe Γ_λ est comprise dans la bande du plan déterminée par les deux asymptotes.

3.



4. L'étude des variations de h_λ montre que la borne supérieure de $|h_l|$ est $\max(|\lambda|, |\lambda - \frac{1}{4}|)$. Il en résulte que la borne supérieure de $|f'_\lambda|$ est

$$\lambda \quad \text{si} \quad \lambda > \frac{1}{8}, \qquad\qquad \frac{1}{4} - \lambda \quad \text{si} \quad \lambda \leq \frac{1}{8}\,.$$

5. On obtient, par l'inégalité des accroissements finis, pour tout couple (x, y) de réels, la majoration $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq k_\lambda |x - y|$ où $k_\lambda = \lambda$ si $\lambda > \frac{1}{8}$ et $k_\lambda = \frac{1}{4} - \lambda$ si $\lambda \leq \frac{1}{8}$. La fonction f_λ possède donc sur $\mathbb{R}$ la propriété $\mathcal{P}(\lambda, 1)$ si $\lambda > \frac{1}{8}$ et $\mathcal{P}(\frac{1}{4} - \lambda, 1)$ si $\lambda \leq \frac{1}{8}$.

III. Etude d'un minimum pour k

1. Cette question est absolument évidente.

2. $\mathcal{K}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car $k_0 \in \mathcal{K}$; de plus $\mathcal{K}$ est minorée par 0. Il en résulte que $h = \min \mathcal{K}$ existe.

3. Par définition de la borne inférieure, pour tout entier $n \in N^*$ il existe un réel $k_n \in \mathcal{K}$ tel que $h \leq k_n < h + \frac{1}{n}$. Ceci signifie que f possède la propriété $\mathcal{P}(k_n, \alpha)$, donc aussi $\mathcal{P}(h + \frac{1}{n}, \alpha)$ d'après le 1). Il vient, en explicitant,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \forall n \in N^*, \quad |f(x) - f(y)| \leq (h + \frac{1}{n})|x - y|^\alpha$$

On obtient le résultat demandé en faisant tendre n vers $+\infty$.

4. On a donc $h \in \mathcal{K}$; la question 1) donne $[h, +\infty[\subseteq \mathcal{K}$ et comme h est la borne inférieure de $\mathcal{K}$, on a évidemment $\mathcal{K} \subseteq [h, +\infty[$, d'où $\mathcal{K} = [h, +\infty[$.

5. Si f est constante, f vérifie $\mathcal{P}(0, 1)$, donc $0 \in \mathcal{K}$, d'où $h = 0$. Inversement, si $h = 0$, f vérifie $\mathcal{P}(0, 1)$, c'est-à-dire que, pour tout couple (x, y) de points de I, $f(x) - f(y) = 0$, donc f est constante :

$$f \text{ est constante si et seulement si } h = 0.$$

6. On a déterminé en II.5. le plus petit réel positif k_λ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}(k_\lambda, 1)$, car c'est la borne supérieure de f'_λ. On a donc

$$h_\lambda = \begin{cases} \lambda & \text{si} \quad \lambda > \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{4} - \lambda & \text{si} \quad \lambda \leq \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

IV. Les fonctions k–contractantes

A. *Le théorème du point fixe*

1. Si $a \neq b$ étaient deux points fixes distincts de f, on aurait la contradiction

$$|a - b| = |f(a) - f(b)| < |a - b| .$$

2. La condition $f(I) \subseteq I$ assure l'existence de la suite (u_n).

3. Comme f est continue (d'après I.2.), si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$, c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} u_n = f(a)$ donc $f(a) = a$.

4.a. La première majoration de l'énoncé résulte de la définition de la suite (u_n) et du fait que f vérifie $\mathcal{P}(k, 1)$. La seconde en résulte immédiatement.

4.b. On a $|v_n| < k^n |u_1 - u_0|$; le terme général v_n de la série $\sum v_n$ est majoré en valeur absolue par le terme général d'une série géométrique convergente car $k < 1$. Il en résulte que $\sum v_n$ converge absolument dans $\mathbb{R}$, donc converge car $\mathbb{R}$ est complet. Or $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$, donc u_n est la somme partielle d'ordre n d'une série convergente : la suite (u_n) est convergente, de limite le point fixe de f, car f est continue.

Une fonction contractante f d'un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ dans lui-même, possède un unique point fixe. Pour tout point de I la suite des itérés par f de ce point converge vers le point fixe de f.

B. *Point fixe éventuel de f_λ*

1. On a $f_1(x) = x + \left(e + \dfrac{1}{1+e^x}\right)$ donc $f_1(x) > x$ pour tout réel x, si bien que f_1 ne possède pas de point fixe.

Si $x > y$, on a $f_1(x) - f_1(y) = x - y + \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^y} < x - y$ car $t \mapsto \dfrac{1}{1+e^t}$ est strictement décroissante. On a donc, en permutant x et y, pour tous réels x et y distincts, $|f_1(x) - f_1(y)| < |x-y|$. On voit que cette condition n'est pas suffisante pour affirmer que f_1 est contractante, puisque f_1 n'a pas de point fixe. Au demeurant, $h_1 = 1$ montre que f_1 n'est pas contractante.

2.a. Le point x est point fixe de f_λ si et seulement si $\dfrac{1}{1+e^x} + \lambda x + e^\lambda = x$, c'est-à-dire si et seulement si $f_{\lambda-1}(x) = e^{\lambda-1} - e^\lambda < 0$. Or il résulte de l'étude des variations de $f_{\lambda-1}$ effectuée en II.2. que cette fonction continue varie de $-\infty$ à $+\infty$ si $\lambda > 1$, de $+\infty$ à $-\infty$ si $\lambda < 1$. Cette fonction possède donc, par le théorème de la valeur intermédiaire, au moins un zéro a_λ qui est donc point fixe de f_λ. De plus, si $1 < \lambda < \frac{5}{4}$, f_λ est strictement croissante sur $]-\infty, x_1]$ et strictement positive sur $[x_1, +\infty[$ car $f_{\lambda-1}(x_2) > 0$ puisque $x_2 > 0$; et si $\lambda \geq \frac{5}{4}$ ou $\lambda \leq 1$, $f_{\lambda-1}$ est strictement monotone. Dans tous les cas, $f_{\lambda-1}$ ne prend au plus qu'une fois une valeur négative donnée. Il en résulte l'unicité du point fixe de f_λ .

Si $\lambda \neq 1$, f_λ possède un unique point fixe a_λ.

2.b. L'égalité $f_\lambda(a_\lambda) = a_\lambda$ donne $(1-\lambda)a_\lambda = e^\lambda + \dfrac{1}{1+\exp(a_\lambda)} > 0$. a_l a donc le signe de $(1-\lambda)$:

a_λ est positif si $\lambda < 1$, négatif si $\lambda > 1$.

2.c. On tire de l'égalité précédente la minoration $e^\lambda < (1-\lambda)a_\lambda < e^\lambda + 1$.

- Si $\lambda \to 1^+$, $(\lambda - 1) > 0$ et $e^\lambda > 1$, donc $\lim\limits_{\lambda\to 1^+} -a_\lambda = +\infty$ d'où $\lim\limits_{\lambda\to 1^+} a_\lambda = -\infty$. De même, si $\lambda \to 1^-$, on obtient $\lim\limits_{\lambda \to 1^-} a_\lambda = +\infty$.
- Si $\lambda \to +\infty$, la minoration $\dfrac{e^\lambda}{\lambda - 1} < -a_\lambda$ donne $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} a_\lambda = -\infty$. Enfin, si $\lambda \to -\infty$, l'encadrement $0 < a_\lambda < \dfrac{e^\lambda + 1}{1-\lambda}$ donne $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} a_\lambda = 0$.

3.a. On a déterminé en III.6. le nombre $h_\lambda = \max(|\lambda|, |\lambda - \frac{1}{4}|)$. Si $-\frac{3}{4} < \lambda < 1$, on a aussi $-1 < \lambda - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$, donc $h_\lambda < 1$, ce qui prouve qu'alors f_λ est contractante.

3.b. La fonction f_0 est monotone décroissante ; $f_0(0) = \frac{3}{2} < 2$, et $f_0(2) = 1 + \dfrac{1}{1+e^2} > 1$. L'image de $[0,2]$ par f_0 est donc incluse dans $[0,2]$.

3.c. On peut donc appliquer la méthode du IV.a. à la restriction de f_0 à $[0,2]$. Comme $h_0 = \frac{1}{4}$, f_0 vérifie la propriété $\mathcal{P}(\frac{1}{4}, 1)$ et l'on a, d'après IV.A.4.a., $|u_{n+1} - u_n| \leq 4^{-n}|u_1 - u_0|$. On en tire, pour tout entier $p \in N^*$,

$$|u_{n+p} - u_n| \leq 4^{-n}|u_1 - u_0| \sum_{k=0}^{p-1} 4^{-k} \leq \frac{|u_1 - u_0|}{3 \times 4^{n-1}}\,.$$

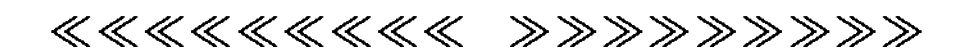
Si l'on fait tendre p vers l'infini, il vient $|a_\lambda - u_n| \leq \frac{1}{3}|u_1 - u_0|4^{-(n-1)}$, expression qui donne une majoration de l'erreur commise au rang n.

Un calcul numérique simple donne $\frac{1}{3}|u_1 - u_0| \simeq 1,05 \times 10^{-2}$. L'erreur commise au rang n sera majorée par 10^{-3} si $1,05 \times 10^{-2} \times 4^{-(n-1)} < 10^{-3}$, soit $4^{n-1} > 10,5$; le premier entier vérifiant cette inégalité est $n = 3$. Donc u_3 approche a_0 avec une précision d'au moins 10^{-3}. De plus, $(u_{2n})_n$ $\big($*resp.* $(u_{2n+1})_n\big)$ est croissante (*resp.* décroissante) car f_0 est décroissante. Ceci permet d'avoir pour a_0 l'encadrement : $u_{2n} < u_{2n+2} < a_0 < u_{2n+3} < u_{2n+1}$.

On obtient le tableau de valeurs suivant (les trois premières décimales sont stables à partir de $n = 3$) :

n	u_n	n	u_n	n	u_n
0	$1,200\,000\,000\,000$	3	$1,226\,895\,734\,234$	6	$1,226\,749\,862\,801$
1	$1,231\,475\,216\,500$	4	$1,226\,725\,206\,623$	7	$1,226\,750\,781\,952$
2	$1,225\,923\,332\,641$	5	$1,226\,755\,105\,068$	8	$1,226\,750\,620\,792$

L'encadrement $u_4 < a_0 < u_3$ donne $1,226\,7 < a_0 < 1,226\,9$. Quatre itérations permettent d'avoir les trois premières décimales de a_0 et la quatrième est comprise entre 7 et 9.



CAPES interne 92, 1ᵉ composition

I.A.1 a) $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq \frac{k|x-x_0|^3}{|x-x_0|} = k|x-x_0|^2$ montre que $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$

b) f sera dérivable, de dérivée nulle en tout point x_0 de I d'après a).

I.A.2 Si f vérifie $P(k,3)$, $f'\equiv 0$ donc f sera constante sur I. La réciproque est évidente.

I.A.3 Si $\alpha>1$, $\lim_{x\to x_0}\frac{k|x-x_0|^\alpha}{|x-x_0|}=0$ et l'on peut recommencer le raisonnement ci-dessus pour obtenir :

Les fonctions vérifiant $P(k,\alpha)$ avec $k>0$ et $\alpha>1$ sont les fonctions constantes.

I.B.1

a) $|f(x)|-|f(x_0)| \leq |f(x)-f(x_0)| \leq k$ entraine $|f(x)| \leq k+|f(x_0)|$

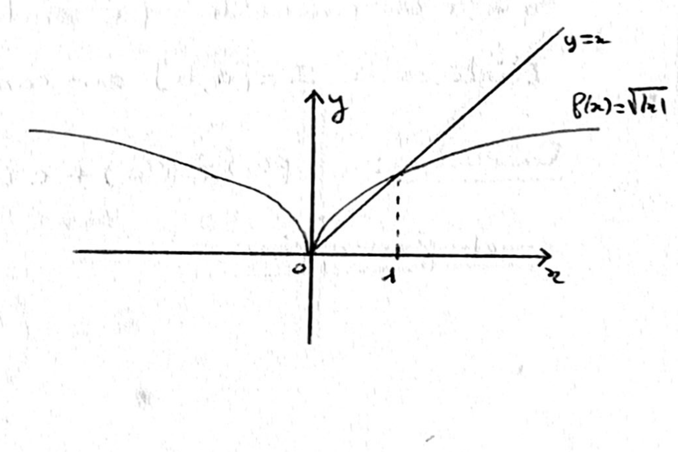
b) Il suffit de prendre $K = k+|f(x_0)|$

I.B.2 Si f est bornée, il existe $K\geq 0$ tel que $|f(x)|\leq K$ pour tout $x\in I$,

et : $\forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)| \leq 2K$.

f satisfera la propriété $P(2K,0)$.

I.C.1



a) Si $0\leq y\leq x$,

$\sqrt{x}-\sqrt{y}\leq\sqrt{x-y} \iff x+y-2\sqrt{xy}\leq x-y$

$\iff y\leq\sqrt{xy}$

$\iff y^2\leq xy$

$\iff y\leq x$ vrai

b)

* Si $|x| \geq |y|$, $|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| = \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \underset{a)}{\leq} \sqrt{|x|-|y|} \leq \sqrt{|x-y|}$

* Si $|y| \geq |x|$, $|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| = \sqrt{|y|} - \sqrt{|x|} \underset{a)}{\leq} \sqrt{|y|-|x|} \leq \sqrt{|x-y|}$

donc f possède la propriété $\mathcal{P}(1, \frac{1}{2})$.

I.C.2

$\forall x_0 \in I \quad |f(x) - f(x_0)| \leq k\, |x - x_0|^\alpha$ sera inférieur à ε dès que $|x - x_0| < \eta$ puisque $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$. Donc f sera continue sur I.

I.C.3

a) Si $|f(x_0) - f(a)| < k\,(x_0 - a)$, alors :

$|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(a)| < k\,(b - x_0) + k\,(x_0 - a) = k\,(b-a)$

est contraire à l'hypothèse.

Par conséquent : $\forall x \in I \quad |f(x) - f(a)| = k\,|x - a| \qquad (*)$

b) f est continue (I.C.2) donc $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ sera continue sur I.
Comme φ ne prend que 2 valeurs $\pm k$ distinctes d'après $(*)$, on en déduit que φ est constante (c'est d'ailleurs une caractérisation du fait que l'intervalle $I = [a, b]$ est connexe).

<u>Conclusion</u> : $f(x) = f(a) + c\,(x - a)$ (où $c = \pm k$ est fixé une fois pour toute)

et <u>f est affine</u>.

II.1 $f_\lambda(x) + f_\lambda(-x) = 1 + 2e^\lambda$ est constant pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Considérons les points $M\begin{pmatrix} x \\ f_\lambda(x)\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} -x \\ f_\lambda(-x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -f_\lambda(x)+c\end{pmatrix}$, où $c = 1+2e^\lambda$.

Le milieu I de [MN] est de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{2}\end{pmatrix}$ indépendantes de x. On en déduit que $I\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}+e^\lambda\end{pmatrix}$ est centre de symétrie de Γ_λ.

II.2 Il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$ puis de compléter par symétrie /à I.

$$f'_\lambda(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \lambda$$

$$f''_\lambda(x) = -\frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x.2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

Par suite :

		0	
f''_λ	$-$	0	$+$
f'_λ	↘	$\lambda - \frac{1}{4}$	↗

1) Si $\lambda \geq \frac{1}{4}$, $f'_\lambda(x) > 0$ pour $x > 0$ donc f sera strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

	0		
f'_λ	$\lambda - 1/4$	$+$	
f_λ	$e^\lambda + 1/2$	↗	$+\infty$

Pour $x \to +\infty$, Γ_λ admet $y = \lambda x + e^\lambda$ comme asymptote oblique.

2) Si $\lambda < \frac{1}{4}$, $f'_\lambda(0) = \lambda - \frac{1}{4} < 0$. Pour savoir si f'_λ, croissante sur $[0,+\infty[$, s'annule ou non en un point x_0 de $[0,+\infty[$, cherchons la limite :

$$\lim_{+\infty} f'_\lambda(x) = \lim_{+\infty}\left(\frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + \lambda\right) = \lambda$$

D'où la discussion :

a) Si $\frac{1}{4} > \lambda > 0$, il existe un unique $x_0 > 0$ tel que $f'_\lambda(x_0) = 0$, et :

	0		x_0		$+\infty$
f'_λ	$\lambda - \frac{1}{4}$	$-$	0	$+$	$+\infty$
f_λ	$e^\lambda + \frac{1}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

b) Si $\lambda = 0$, $\lim_{+\infty} f'_\lambda(x) = 0$ et $f'_\lambda(0) < 0$ donc :

	0		$+\infty$
f'_λ	$\lambda - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$	$-$	0
f_λ	$e^\lambda + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$\searrow$	$e^\lambda = 1$

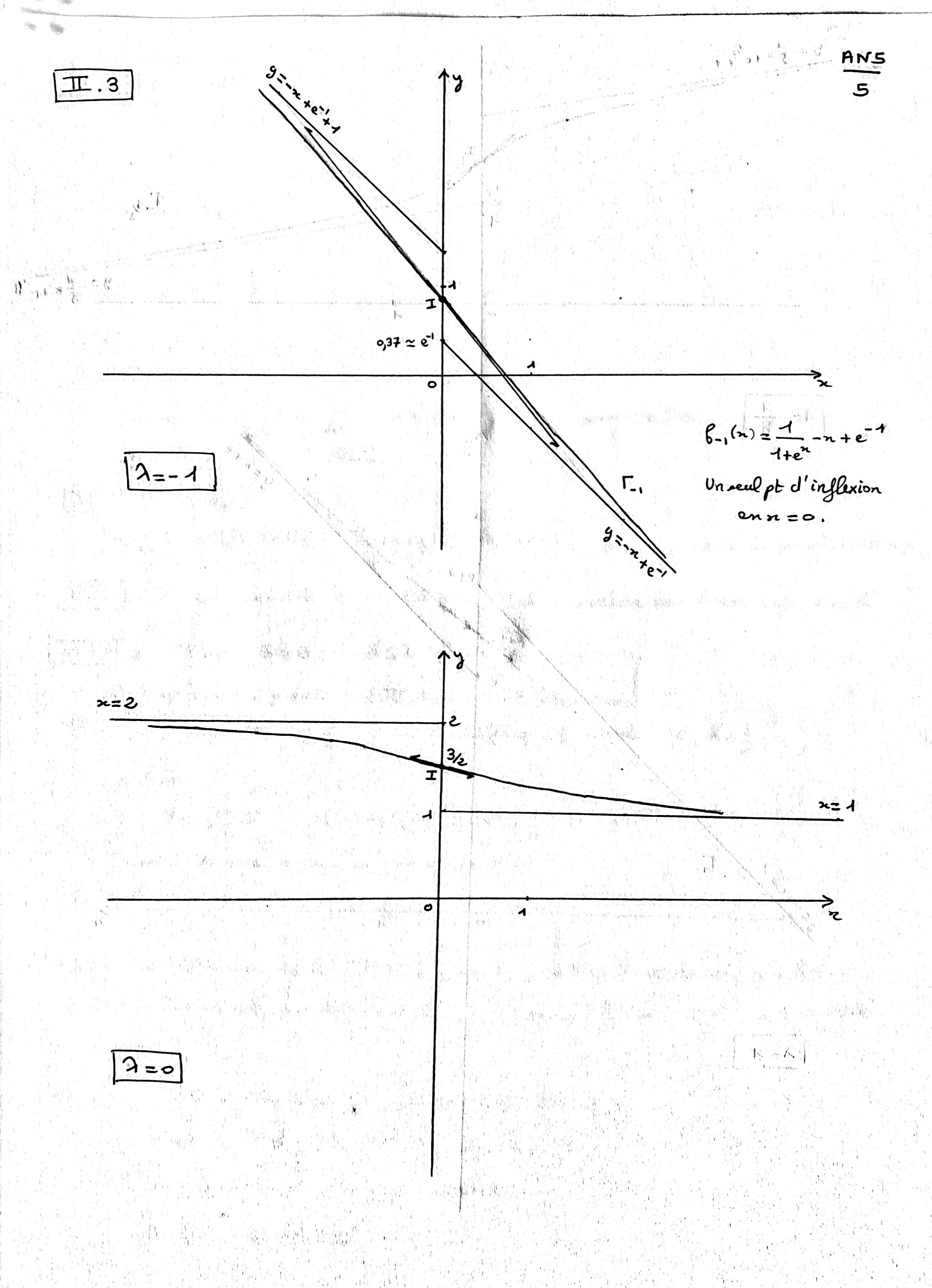
c) Si $\lambda < 0$, $\lim_{+\infty} f'_\lambda(x) = -\infty$ donc :

	0		$+\infty$
f'_λ	$\lambda - \frac{1}{4}$	$-$	$-\infty$
f_λ	$e^\lambda + \frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Notons que l'on a toujours : $\frac{f_\lambda(x)}{x} = \frac{1}{x(1+e^x)} + \lambda + \frac{e^\lambda}{x} \longrightarrow \lambda \quad (x \to +\infty)$

$$f_\lambda(x) - \lambda x = \frac{1}{1+e^x} + e^\lambda \longrightarrow e^\lambda \quad (x \to +\infty)$$

et l'on retrouve ce que l'on peut voir directement ! A savoir $y = \lambda x + e^\lambda$ est asymptote à la courbe pour $x \to +\infty$. Γ_λ sera toujours au dessus de l'asymptote car $f_\lambda(x) - (\lambda x + e^\lambda) = \frac{1}{1+e^x} > 0 \quad \forall x$.



II.3
ANS
5
y
y = -x + e⁻¹ + 1
1
I
0,37 ≃ e⁻¹
1
0
x
f₋₁(x) = 1/(1+eˣ) - x + e⁻¹
Un seul pt d'inflexion
en x = 0.
Γ₋₁
y = -x + e⁻¹
λ = -1
y
x = 2
2
3/2
I
1
x = 1
0
1
x
λ = 0

$\lambda = \frac{1}{8}$

$\lambda = 1$

II.4 Le tableau de variation de f'_λ vu au II.2 peut être complété par $\lim\limits_{\pm\infty} f'_\lambda = \lambda$:

			0		
f''_λ		$-$	0	$+$	
f'_λ	λ	$\searrow$	$\lambda - \frac{1}{4}$	$\nearrow$	λ

d'où l'on déduit : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'_\lambda(x)| \leq \text{Sup}(|\lambda|, |\lambda - \frac{1}{4}|)$

II.5 L'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(y)| \leq \sup_{\theta \in]x,y[} |f'(\theta)|\,|x-y| \leq \text{Sup}(|\lambda|, |\lambda - \tfrac{1}{4}|) \cdot |x-y|$$

donc f_λ possèdera la propriété $\mathcal{P}(k, 1)$ avec $k = \text{Sup}(|\lambda|, |\lambda - \frac{1}{4}|)$

III.1 Si $k \geq k_0$,

$\forall x, y \in E \quad |f(x) - f(y)| \leq k_0 |x-y|^\alpha \leq k\,|x-y|^\alpha$ donc f possède la propriété $\mathcal{P}(k, \alpha)$

III.2 $\mathcal{K}$ est non vide et minoré par 0, donc possède une borne inférieure h.

III.3 * $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathcal{K} \quad h \leq k < h + \varepsilon$

et d'après ce qui précède (III.1), $h + \varepsilon$ sera dans $\mathcal{K}$.

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour constater que f est dans $\mathcal{P}(h + \frac{1}{n}, \alpha)$.

* Ainsi :

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq (k + \tfrac{1}{n})\,|x-y|^\alpha$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|^\alpha$$

III.4 Par définition de h, $\mathcal{K} \subset [h, +\infty[$, et l'on vient de voir que $h \in \mathcal{K}$.
Le III.1 entraîne alors que $k \geq h \Rightarrow k \in \mathcal{K}$, donc $[h, +\infty[\subset \mathcal{K}$ et l'égalité annoncée.

III.5 Si f est constante sur I, $|f(x) - f(y)| = 0 \leq 0\,|x-y|^\alpha$ donc $h = 0$.

Réc., si $h = 0$: $\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq 0\,|x-y|^\alpha$

donc $f(x) = f(y)$, et f est constante.

<u>Ccl</u> : <u>f est constante ssi $h = 0$</u>

III.6 On aura $h_\lambda = \mathrm{Max}\left(|\lambda|, |\lambda - \frac{1}{4}|\right) = \sup_{\mathbb{R}} |f'_\lambda|$, car :

1) f vérifie $\mathcal{P}(h_\lambda, 1)$ (II.5)

2) Si f vérifie $\mathcal{P}(k, 1)$, on a $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq k\,|x-y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, d'où $\frac{|f_\lambda(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq k$ dès que $x \neq y$. En passant à la limite pour $y \to x$, $y \neq x$, on constate que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f'_\lambda(x)| \leq k$$

Donc $$h_\lambda = \sup_{\mathbb{R}} |f'_\lambda| \leq k$$

h_λ est bien la borne inférieure (en fait, le minimum) de K.

IV.A.1 Si a et b sont 2 points fixes de f, $|f(a) - f(b)| \leq k\,|a-b|$ entraine $1 \leq k$, ce qui est absurde.

IV.A.2 f prend ses valeurs dans I, donc $u_0 \in I \Rightarrow u_1 \in I$.
Si $u_0, \ldots, u_n$ sont dans I, $u_{n+1} = f(u_n)$ y sera aussi. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in I$$

IV.A.3 Si $\lim u_n = a$, a sera dans l'adhérence de I qui est égale à I car I est fermé. Donc $a \in I$.
f est continue d'après I.C.2, donc $\lim f(u_n) = f(a)$. Si l'on passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $a = f(a)$.

IV.A.4

a) $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k\,|u_n - u_{n-1}|$

d'où par récurrence :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|$$

b)

* $\sum v_n$ converge car elle est de Cauchy. En effet, si $m \geq p$:

$$\left| \sum_{n=p}^{m} v_n \right| \leq \sum_{n=p}^{m} |u_n - u_{n-1}| \leq \sum_{n=p}^{m} k^{n-1} |u_1 - u_0| \leq \frac{k^{p-1}}{1-k} |u_1 - u_0|$$

et cette dernière quantité sera inférieure à ε pour p suffisamment grand (puisque $\lim_{p \to +\infty} k^{p-1} = 0$)

* $u_n = \sum_{k=1}^{n} v_k + u_0$ donc la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de (u_n).

Ccl : Théorème du pt fixe

Toute application lipschitzienne contractante d'un intervalle fermé I dans lui-même possède un unique point fixe. Ce point fixe est la limite de la suite de I définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in I \quad \text{(quelconque)} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

IV.B.1

On a vu : $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq \text{Max}\left(|\lambda|, \left|\lambda - \frac{1}{4}\right|\right) \cdot |x-y|$

ici : $|f_1(x) - f_1(y)| \leq |x-y|$

Le graphe de f_1 n'interceptant pas la 1-bissectrice $\Delta : y = x$, f_1 ne possèdera pas de pt fixe.

NB : Vérifions le. $f_1(x) = x \iff \frac{1}{1+e^x} + x + e = x \iff e^x = -1 - \frac{1}{e} < 0$ n'a pas de solution.

Liaison avec IV.A : L'hypothèse $k<1$ est primordiale dans l'énoncé du Th. du pt fixe.

IV.B.2.a et b

* $\begin{cases} f_\lambda(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + \lambda x + e^\lambda \\ f_{\lambda-1}(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + (\lambda-1)x + e^{\lambda-1} \end{cases} \Rightarrow f_\lambda(x) - f_{\lambda-1}(x) = x + e^\lambda - e^{\lambda-1}$

Ainsi, x est un pt fixe de f_λ ssi $f_{\lambda-1}(x) = e^{\lambda-1} - e^\lambda$ (*)

* On envisage tous les cas de II.2 :

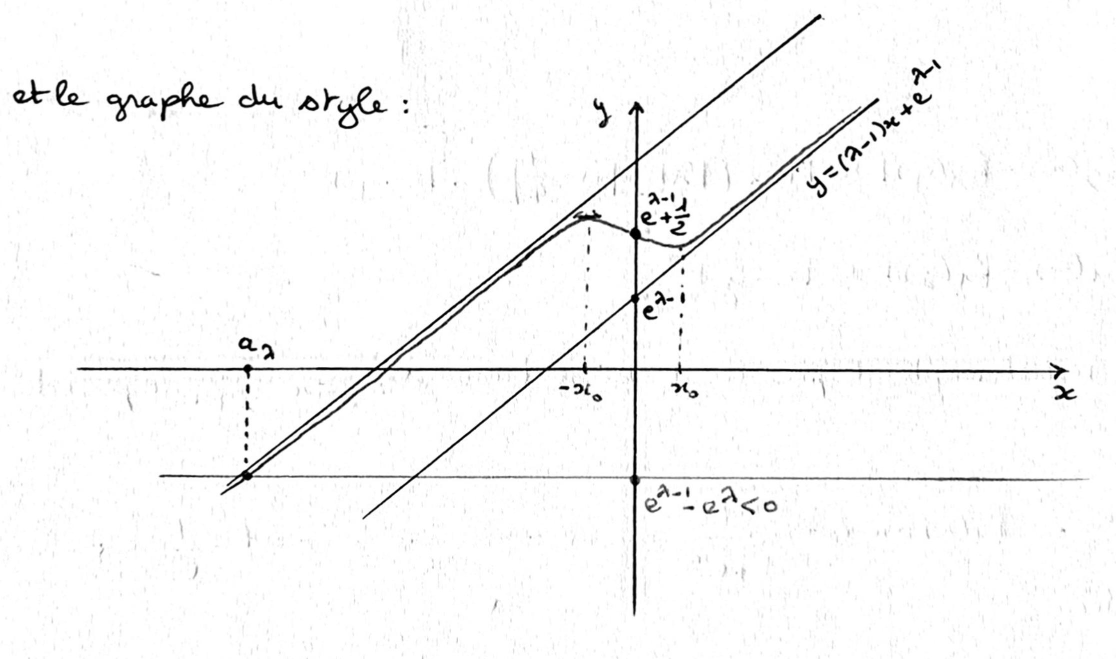
1) Si $\lambda - 1 \geq \frac{1}{4}$, ie $\lambda \geq \frac{5}{4}$, $f_{\lambda-1}$ est strict. croissante sur $\mathbb{R}$, continue et $\lim_{\pm\infty} f_{\lambda-1} = \pm\infty$, donc (*) possède une unique solution a_λ.
Comme $f_{\lambda-1}(0) = e^{\lambda-1} + \frac{1}{2} > e^{\lambda-1} - e^\lambda$, a_λ sera négatif.

2) Si $0 < \lambda - 1 < \frac{1}{4}$, ie $1 < \lambda < \frac{5}{4}$, le tableau de variations de $f_{\lambda-1}$ est :

x			$-x_0$		0		x_0		
$f'_{\lambda-1}$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\lambda - \frac{5}{4}$	$-$	0	$+$	$+\infty$
f_λ	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$e^{\lambda-1} + \frac{1}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

} $f'_{\lambda-1}$ est paire

et le graphe du style :



$e^{\lambda-1} - e^\lambda < 0$. Le graphe $\Gamma_{\lambda-1}$ étant toujours au dessus de l'asymptote $y = (\lambda-1)x + e^{\lambda-1}$, comme $e^{\lambda-1} > e^{\lambda-1} - e^\lambda$, la solution de (*) ne peut pas être positive.
Comme $f(-x_0) > e^{\lambda-1} + \frac{1}{2} > 0$, cette solution ne peut être que dans $]-\infty, -x_0]$.
Enfin, $f_{\lambda-1}$ étant strict. croissante et continue de $]-\infty, -x_0]$ sur $]-\infty, f(-x_0)]$, il y aura une seule racine a_λ de (*) et $a_\lambda < -x_0 < 0$.

3) Si $\lambda - 1 < 0$, ie $\lambda < 1$, $f_{\lambda-1}$ est continue strict. décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc (*) admet une unique solution a_λ.

Comme $f_{\lambda-1}(0) = e^{\lambda-1} + \frac{1}{2} > 0$, cette solution a_λ sera positive.

IV.B.2.c

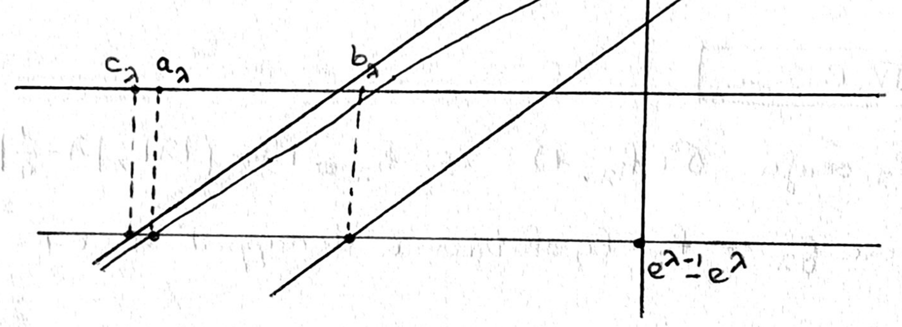
• Si $\lambda \to +\infty$, on est dans le cas 1) où $\lambda \geq \frac{5}{4}$.

Le graphe $\Gamma_{\lambda-1}$ de $f_{\lambda-1}$ est entre ses 2 asymptotes, ce que l'on utilisera sans vergogne !

Le dessin ci-contre donne :

$c_\lambda \leq a_\lambda \leq b_\lambda$

où $\begin{cases} b_\lambda = \dfrac{e^\lambda}{1-\lambda} \\ c_\lambda = \dfrac{1+e^\lambda}{1-\lambda} \end{cases}$



D'où $a_\lambda \leq \dfrac{e^\lambda}{1-\lambda} \to -\infty \Rightarrow$ $\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} a_\lambda = -\infty}$

• Si $\lambda \to -\infty$, on est dans le cas 3) où $\lambda < 1$, $f_{\lambda-1}$ est cette fois-ci str. décroissante et avec les mêmes notations b_λ et c_λ définies précédemment,

$$b_\lambda \leq a_\lambda \leq c_\lambda$$

$$\underbrace{\frac{e^\lambda}{1-\lambda}}_{\to 0} \leq a_\lambda \leq \underbrace{\frac{1+e^\lambda}{1+\lambda}}_{\to 0_+} \qquad (E)$$

donc $\boxed{\lim_{\lambda \to -\infty} a_\lambda = 0}$

• Si $\lambda \to 1_-$, on est dans le cas 3) où $\lambda < 1$, et l'encadrement (E) allié à $\lim_{\lambda \to 1_-} b_\lambda = \lim_{\lambda \to 1_-} \frac{e^\lambda}{1-\lambda} = +\infty$ entraîne $\boxed{\lim_{\lambda \to 1_-} a_\lambda = +\infty}$

• Si $\lambda \to 1_+$, on est dans le cas 2) où $1 < \lambda < \frac{5}{4}$ et le graphe de $\Gamma_{\lambda-1}$ dont l'allure est donné en II.3 (voir $\Gamma_{\frac{1}{8}}$) donne :

$$c_\lambda \leq a_\lambda \leq b_\lambda$$

$$\frac{1+e^\lambda}{1-\lambda} \leq a_\lambda \leq \underbrace{\frac{e^\lambda}{1-\lambda}}_{\to -\infty}$$

d'où $\boxed{\lim_{\lambda \to 1_+} a_\lambda = -\infty}$

IV.B.3.a

f_λ vérifie $P(h_\lambda, 1)$ où $h_\lambda = \text{Max}\left(|\lambda|, |\lambda - \frac{1}{4}|\right) < 1$ dès que $-\frac{3}{4} < \lambda < 1$.

Donc f_λ est h_λ-lipshitzienne de rapport $h_\lambda < 1$, ie contractante.

IV.B.3.b

f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (voir Γ_0 en II.3).

$f_0(0) = \frac{3}{2}$ et $f_0(2) = \frac{1}{1+e^2} + 1 \simeq 1,12$ entraînent alors $f_0([0,2]) \subset [0,2]$.

IV.B.3.c

f_0 est continue du compact $[0,2]$ dans lui-même. Etant contractante d'après IV.B.3.a, f_0 possèdera un unique pt fixe $a_0 \in [0,2]$ qui sera la limite de la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1,2 \\ u_n = f_0(u_{n-1}) = \frac{1}{1+e^{u_{n-1}}} + 1 = \frac{2+e^{u_{n-1}}}{1+e^{u_{n-1}}} \end{cases} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*$$

* On a vu (IV.A.4) que si $m \leq n$:

$$|u_n - u_m| \leqslant \sum_{p=m+1}^{n} |u_p - u_{p-1}| \leqslant \sum_{p=m+1}^{n} k^{p-1} |u_1 - u_0| \leqslant \frac{k^m}{1-k} |u_1 - u_0|$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient une majoration de l'erreur commise en approximant le point fixe a_0 par u_m :

$$|a_0 - u_m| \leqslant \frac{k^m}{1-k} |u_1 - u_0|$$

Ici $u_1 = f_0(1,2) = \dfrac{1}{1+e^{1,2}} + 1 \simeq 1,2314752$ et $k = h_0 = \mathrm{Max}\left(0, \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$,

donc :

$$|a_0 - u_m| \leqslant \frac{1}{3.4^{m-1}} \, 0,0314752$$

u_m sera une valeur approchée à 10^{-3} près de a_0 dès que :

$$\frac{1}{3.4^{m-1}} . 0,0314752 \leqslant 10^{-3}$$

$$\frac{31,4752}{3} \leqslant 4^{m-1}$$

$$1 + \frac{1}{\ln 4} \ln\left(\frac{31,4752}{3}\right) \leqslant m$$

$$2,69 \leqslant m$$

On pourra prendre $m = 3$. Soit : $u_3 \simeq 1,2268957$

Ccl : a_0 est égal à $1,226$ à 10^{-3} près.

ENONCÉ DE LA DEUXIÈME COMPOSITION

DU CAPES INTERNE 1992

Le problème est construit sur le thème : « Triangle équilatéral inscrit dans une figure donnée » (géométrie plane). Il comporte *trois parties indépendantes.* La première partie permet de mettre en place, de plusieurs manières, une propriété des points du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ; deux applications en sont proposées. La deuxième partie et la troisième partie étudient deux situations liées au thème.

PREMIÈRE PARTIE

A

Trois démonstrations d'une propriété des points du cercle circonscrit à un triangle équilatéral.

Soit un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle (Γ) de centre O. On désigne par (γ) l'arc $\overset{\frown}{BC}$ de (Γ) ne contenant pas A. On veut prouver de trois manières différentes la propriété $\mathcal{P}$ suivante : pour tout point M de (γ), $MA = MB + MC$.

1. *Première méthode. (Le candidat pourra, s'il le désire, rester dans le cadre des programmes du collège.)*
   M étant un point de (γ) distinct de B et de C, on mène par B la parallèle à la droite (MC) qui recoupe le cercle en D. Les droites (BD) et (MA) se coupent en E.
   Montrer que les triangles AED et BME sont équilatéraux. Quelle est la nature du quadrilatère MCDE ?
   En déduire la propriété $\mathcal{P}$.

2. *Deuxième méthode.*
   M étant un point de (γ) distinct de B et de C, on considère le point N défini sur la demi-droite d'origine M contenant A par l'égalité MN = MB. Prouver que N est un point du segment [MA].

   On oriente le plan de façon que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   Quelles sont les images respectives des points C et M par r?
   En déduire la propriété $\mathcal{P}$.

3. *Troisième méthode.*
   On oriente le plan de façon que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
   M étant un point de (γ), on pose $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta\ [2\pi]$.
   Montrer que :

$$MA^2 = 2\,\rho^2\,(1 - \cos\theta)\,,$$

$$MB^2 = 2\,\rho^2\left[1 - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

$$MC^2 = 2\rho^2\left[1 - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

où ρ désigne le rayon de (Γ).

En déduire la propriété $\mathscr{P}$ (on pourra faire appel aux angles moitiés).

4. *Comparaison de ces méthodes.*

Comparer ces méthodes :

- quant aux outils mathématiques nécessaires,
- quant à leur intérêt pour un travail en classe.

Quel commentaire pourrait être fait devant des élèves ?

B

Une caractérisation des points du cercle circonscrit à un triangle équilatéral.

Les notations sont celles du paragraphe A.

On propose une nouvelle démonstration de la propriété $\mathscr{P}$, amenant à une caractérisation des points de (γ) de laquelle on déduira une caractérisation des points de (Γ).

A tout point M du plan on associe ses projections orthogonales P, Q, R sur les droites (BC), (CA), (AB) respectivement.

1. Montrer que, si M est un point distinct de A, de B et de C, les points P, Q, R sont deux à deux distincts. Étudier le cas où M est en A, ou en B, ou en C.

2. *Calcul des longueurs* QR, RP, PQ.

On rappelle que dans un triangle UVW

$$\frac{VW}{\sin \widehat{U}} = \frac{WU}{\sin \widehat{V}} = \frac{UV}{\sin \widehat{W}} = 2\rho'$$

où ρ' désigne le rayon du cercle circonscrit.

Montrer que, pout tout point M du plan,

$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2}MA, \qquad RP = \frac{\sqrt{3}}{2}MB, \qquad PQ = \frac{\sqrt{3}}{2}MC.$$

3. *Alignement des points* P, Q, R.

a. Montrer que, pour tout point M du plan distinct de A, de B et de C,

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \qquad [\pi].$$

b. En déduire que les points P, Q, R sont alignés si et seulement si M est un point de (Γ).

4. *Comparaison de* MB + MC *et de* MA. *Caractérisation de* (γ) *puis de* (Γ).

a. En utilisant B. 2., montrer que, pour tout point M du plan, $MA \leqslant MB + MC$.

b. En faisant intervenir le régionnement du plan par la médiatrice d'un segment, montrer que M est un point de (γ) si et seulement si M est un point de (Γ) vérifiant les inégalités $MA \geqslant MB$ et $MA \geqslant MC$.

c. En déduire que :

i. M est un point de (γ) si et seulement si P est un point du segment [QR] ;

ii. M est un point de (γ) si et seulement si $MA = MB + MC$;

iii. M est un point de (Γ) si et seulement si

$$(MA - MB - MC) \cdot (MB - MC - MA) \cdot (MC - MA - MB) = 0 .$$

C

Deux applications.

1. Les notations sont toujours celles du paragraphe A. Peut-on choisir M sur (γ) de façon que la somme MB + MC soit maximum ?

2. Soit $(\mathscr{E})$ une ellipse de foyers F et F' ($FF' = 2c$) et de demi-grand axe a. Construire, à la règle et au compas, les points M de $(\mathscr{E})$ tels que $\widehat{FMF'} = \dfrac{2\pi}{3}$. Discuter, selon les valeurs de $\dfrac{c}{a}$, l'existence et le nombre des solutions.

DEUXIÈME PARTIE

Triangle équilatéral dont les sommets sont sur une hyperbole équilatère

A

Étude d'un exemple.

Dans le plan complexe on associe à tout point M son affixe z.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que $|z| = 2\sqrt{2}$?
Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{H}$ des points du plan tels que $z^2 - 2(1 + i)z$ soit un nombre réel ?
Représenter $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ sur une même figure.

2. On se propose de préciser la figure formée par les points communs à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{H}$.

a. Montrer que M est un point commun à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{H}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} z\bar{z} = 8 \\ z^2 - \bar{z}^2 - 2(z - \bar{z}) - 2i(z + \bar{z}) = 0 \end{cases}$$

b. En déduire que M est un point commun à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{H}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} z\bar{z} = 8 \\ [z - 2(1 + i)][z^3 + 16(1 - i)] = 0 \end{cases}$$

c. Montrer que les points communs à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{H}$ forment un triangle équilatéral.

B

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'hyperbole équilatère $\mathscr{H}'$ d'équation $xy = k$, où k est un réel non nul donné. A étant un point de $\mathscr{H}'$ d'abscisse a (a réel non nul donné), on désigne par A′ le symétrique de A par rapport à O. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A passant par A′.

1. Donner une équation de $\mathscr{C}'$.

2. Écrire une équation (E) dont les racines sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}'$ et de $\mathscr{H}'$.

3. $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{H}'$ ont en général quatre points communs : le point A′ et trois points M_1, M_2, M_3. En utilisant les relations entre les coefficients et les racines de (E), calculer l'abscisse puis l'ordonnée du centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.
En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

4. Énoncer clairement la propriété des hyperboles équilatères qui vient d'être dégagée et faire le lien avec la question A de cette deuxième partie.

TROISIÈME PARTIE

Triangle équilatéral inscrit dans un carré

Soit un carré ABCD de côté 1. Un triangle équilatéral est dit inscrit dans ce carré si et seulement si ses sommets appartiennent au pourtour du carré c'est-à-dire à la réunion des quatre segments [AB], [BC], [CD], [DA].

A

Étude d'un exemple.

Soit x un nombre réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$. On considère le point E du segment [AB] et le point F du segment [CB] tels que $AE = CF = x$.

Déterminer le réel x pour que le triangle DEF soit équilatéral. Construire ce triangle à la règle et au compas.

B

Recherche des triangles équilatéraux inscrits dans le carré ABCD.

1. *Remarques préliminaires.*

   a. Montrer qu'un triangle équilatéral inscrit dans le carré ABCD ne peut pas avoir deux sommets sur un même côté du carré.

   b. Montrer qu'il suffit de rechercher les triangles équilatéraux MNP tels que M appartienne au segment [AB], N au segment [BC] et P au segment [AD], triangles désormais notés (T).

2. *Recherche des triangles* (T).

   Dans cette question, on se limite à la recherche des triangles (T) c'est-à-dire des triangles équilatéraux MNP tels que M soit un point de [AB], N de [BC] et P de [AD].

   Le plan est rapporté au repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et orienté de façon que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   M étant un point quelconque de la droite (AB) d'abscisse α et P un point quelconque de la droite (AD) d'abscisse β, on considère le point N image du point M dans la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   a. Calculer l'affixe de N en fonction de α et de β.

   b. Montrer que N est un point du segment [BC] si et seulement si :

   $$\begin{cases} \alpha = 2 - \beta\sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 1 \leqslant \beta \leqslant \sqrt{3} \end{cases}$$

   c. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit un point de [AB], N de [BC] et P de [AD] est que :

   $$\begin{cases} \alpha = 2 - \beta\sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 1 \leqslant \beta \leqslant 1 \end{cases}$$

   Étudier, suivant les valeurs de β, l'existence et le nombre de triangles (T) admettant pour sommet un point donné P de [AD].

d. On considère un triangle (T). Calculer en fonction de β les affixes des points M, N, P. Montrer que l milieu K du segment [NP] est un point fixe, indépendant de β.

Que peut-on dire du triangle ABK ?

En déduire une construction à la règle et au compas d'un triangle (T).

e. Déterminer, quand β varie, les lieux géométriques respectifs des points M, N, P tels que le triangle MN soit un triangle (T). Représenter sur une même figure ces lieux géométriques et un triangle (T (On prendra pour la figure, AB = 10 cm).

f. Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles (T) ? Le représenter sur la figure précédente.

3. *Cas général.*

a. Étant donné un point S sur l'un des côtés du carré ABCD, quel est le nombre de triangles équilatérau inscrits dans le carré admettant pour sommet le point S ? Construire à la règle et au compas le ou le triangles trouvés (on prendra pour la figure, AB = 10 cm).

b. Déterminer et représenter l'ensemble des centres de gravité de tous les triangles équilatéraux inscrit dans le carré ABCD.

CAPES INTERNE 1992

Extrait du rapport du jury

ÉCRIT, SECONDE ÉPREUVE

PREMIÈRE PARTIE

A

Trois démonstrations d'une propriété des points du cercle circonscrit à un triangle équilatéral.

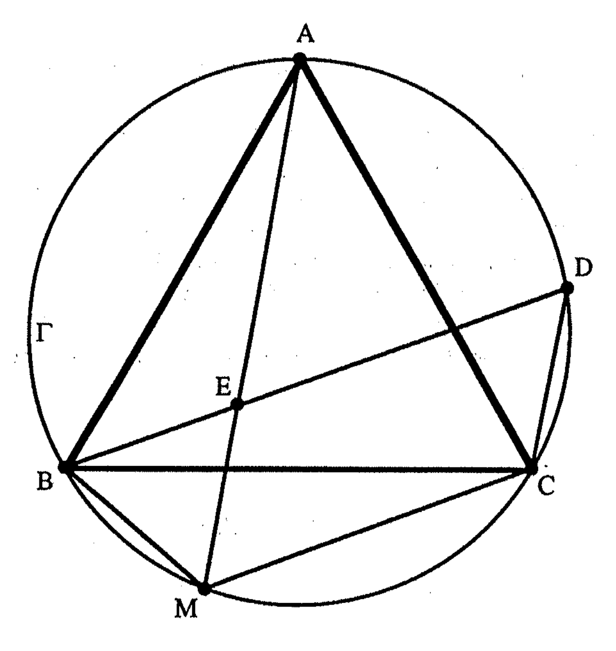


Figure 1. *Les triangles AED et BEM sont équilatéraux.*

1. Les cordes $[MC]$ et $[BD]$ étant parallèles, les arcs compris entre ces deux cordes sont symétriques par rapport à la médiatrice Δ commune aux deux cordes. Comme M est un point de (γ) distinct de B et C, D est un point de l'arc $\widehat{AC}$ qui ne contient pas le point B ; de plus, D est distinct de C et de A.

   La corde $[BD]$ joint deux points du cercle situés de part et d'autre de la corde $[AM]$. On en déduit que E est un point du segment $[AM]$.

   L'angle inscrit $\widehat{DAM}$ intercepte l'arc $\widehat{DM}$ qui contient le point C ; cet arc est le symétrique de l'arc $\widehat{BC}$ par rapport à Δ, donc $\widehat{DAM} = \frac{\pi}{3}$. L'angle inscrit $\widehat{ADE}$ est égal à l'angle $\widehat{ADB}$, donc $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{3}$. Le triangle ADE ayant deux angles de mesure $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral.

   On démontre de façon analogue que le triangle BME est équilatéral.

   Des égalités $\widehat{AED} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{EDC} = \frac{\pi}{3}$, on déduit le parallélisme des droites (EM) et (DC). Comme (ED) et (MC) sont parallèles, le quadrilatère $MCDE$ est un parallélogramme.

   Le point E appartenant au segment $[MA]$, il vérifie l'égalité $MA = ME + EA$. En utilisant les résultats précédents, on obtient facilement $MA = MB + MC$ ce qui démontre la propriété $\mathcal{P}$ (l'égalité est évidente dans les cas où M se confond soit avec B soit avec C).

2. Par hypothèse, le point M se trouve dans le demi-plan ouvert limité par la médiatrice de $[AB]$ caractérisé par la relation $MB < MA$. Donc le point N appartient au segment $[MA]$.

   On sait que $r(C) = A$. Déterminons $r(M)$. Etant donnée la position du point M, on a :

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

   De plus, $MB = MN$; on en déduit que le triangle MNB est équilatéral et convenablement orienté ; par conséquent, $r(M) = N$. D'où les égalités :

$$MA = MN + NA = MB + MC.$$

3. On déduit les trois égalités de la formule d'Al Kashi[3]. Le passage à l'angle moitié, donne :

$$(4) \qquad MA = 2\varrho\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|, \quad MB = 2\varrho\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right|, \quad MC = 2\varrho\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

comme $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, on en déduit

$$0 \leq \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3} \leq \pi$$

et les trois sinus de la formule (4) sont tous positifs. On conclut par application des formules de conversion de produit en somme :

$$MB + MC = 2\varrho\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\varrho\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\varrho\sin\frac{\theta}{2} = MA$$

ce qui prouve la propriété $\mathcal{P}$.

4. La première méthode est fondée sur l'étude des configurations ; elle est abordable à divers niveaux selon la puissance des concepts utilisés.
La seconde méthode est fondée sur les transformations et plus précisément, la rotation. Abordant des questions angulaires fines, elle s'adresse à des élèves de classe terminale.
La troisième méthode s'appuie sur les relations métriques et trigonométriques dans le triangle. Les calculs trigonométriques nécessaires à la conclusion restreignent sa portée à la classe terminale.
Les trois méthodes ne sont donc simultanément envisageables qu'en classe terminale.
   — La seconde méthode est induite par le problème lui-même de façon plus naturelle si l'on a à l'esprit la caractérisation métrique classique du segment $[MA]$.
   — La troisième méthode n'est ni longue ni difficile dans la mesure où les calculs sont adroitement conduits.

B

Une caractérisation des points du cercle circonscrit à un triangle équilatéral.

1. Si deux des points P, Q, R sont confondus, ils sont nécessairement confondus avec un des sommets du triangle et le point M coïncide avec ce sommet ; on conclut par contraposition. La réciproque est facile.
2. Si M n'appartient ni à la perpendiculaire en A à la droite (AB), ni à la perpendiculaire en A à (AC), les points A, Q, R sont deux à deux distincts. Le cercle circonscrit au triangle AQR a pour diamètre $[AM]$. L'angle $\widehat{QAR}$ a pour mesure soit $\frac{\pi}{3}$, soit $\frac{2\pi}{3}$. On obtient ainsi l'égalité $QR = \frac{\sqrt{3}}{2}AM$. On vérifie que cette égalité reste valable dans les cas particuliers évoqués.
3. *a*. Raisonnons d'abord dans le cas général. Appliquons la formule de Chasles aux mesure d'angles de vecteurs et utilisons les relations de cocyclicité. On obtient :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) &= (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PR}) \pmod{\pi}\\
&= (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}) + (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PR}) \pmod{\pi}\\
&= (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MR}) \pmod{\pi}\\
&= (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MR}) \pmod{\pi}\\
&= (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MR}) \pmod{\pi}\\
&= (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

(3) $MA^2 = OA^2 + OM^2 - 2OA \cdot OM \cdot \cos\theta$

ce qui donne la formule voulue

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod \pi$$

L'hypothèse M distinct de A, de B et de C assure que P, Q, R sont deux à deux distincts et donc que $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ est bien défini. Mais il se peut que certains angles introduits dans les égalités ci-dessus ne soient pas définis pour certaines positions de M dans le plan. Il faudrait, en toute rigueur, s'assurer dans ces cas-là de la validité de l'égalité finale.

b. Si M est distinct des sommets du triangle ABC, la caractérisation angulaire de la cocyclicité de quatre points distincts permet de conclure grâce à la question précédente. Dans le cas où M se confond avec A, par exemple, les points Q et R sont confondus et l'alignement est trivial. Par conséquent, si le point M appartient au cercle Γ, ses projections orthogonales sur les côtés du triangle ABC sont alignées. La réciproque est immédiate.

4. *a*. D'après l'inégalité triangulaire, $QR \leq QP + PR$, en utilisant I.B.2., on obtient : $MA \leq MB + MC$.

b. La médiatrice de $[AB]$ régionne le plan en deux demi-plans ouverts respectivement caractérisés par :

$$MA < MB \quad \text{pour celui qui contient } A \quad \text{et} \quad MB < MA \quad \text{pour l'autre.}$$

On en déduit facilement les résultats suivants :

- Le point M appartient à l'arc (γ) privé de ses extrémités si, et seulement si, c'est un point du cercle Γ vérifiant :

$$MA > MB \quad \text{et} \quad MA > MC$$

- Le point M appartient à l'arc (γ) si, et seulement si, c'est un point du cercle Γ vérifiant :

$$MA \geq MB \quad \text{et} \quad MA \geq MC$$

c. i. Le point P appartient au segment $[QR]$ si, et seulement si, les trois points sont alignés et la longueur QR est supérieure à QP et PR ; il suffit alors de traduire grâce au I.B.3.*b* et 4.*b*.

ii. Le point P appartient à $[QR]$ si et seulement si $QR = QP + PR$ ce qui équivaut à la relation de l'énoncé.

iii. Il suffit de généraliser ce qui précède puis de remarquer qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est.

C

Deux applications.

1. Sur l'arc γ, la somme $MB + MC = MA$ est majorée par la longueur AN où N est le point diamétralement opposé à A.

2. Remarque préliminaire : pour des raisons de symétrie, il suffit de construire les points situés dans l'un des deux demi-plans de frontière (FF'). On choisit donc pour la suite l'un de ces demi-plans et on le désigne par $\mathcal{H}$.

Analyse. Si un point M répond à la question, il vérifie :

- $\widehat{FMF'} = \dfrac{2\pi}{3}$ donc M appartient à l'arc de cercle défini par cet angle dans le demi-plan $\mathcal{H}$. Considérons le triangle équilatéral EFF' contenu dans le demi-plan complémentaire de $\mathcal{H}$; l'arc cherché correspond à l'arc (γ) (qui ne contient pas E) du cercle circonscrit au triangle.

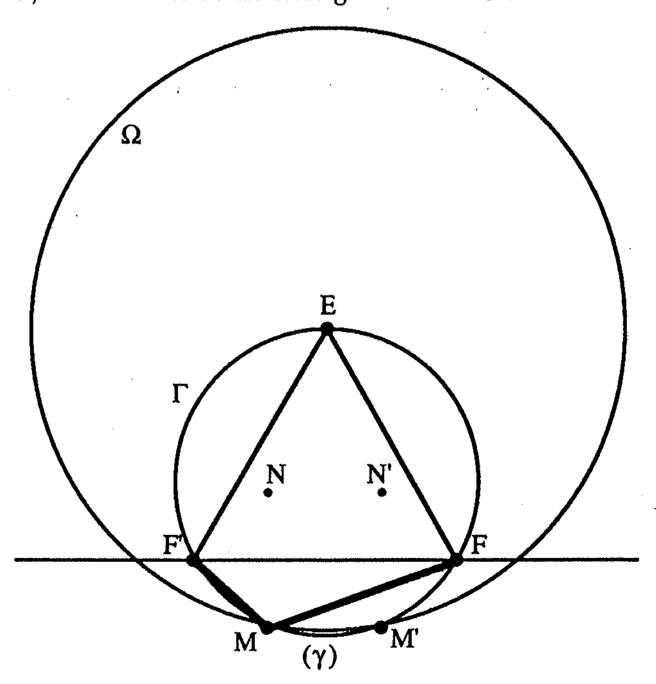


Figure 2. *Construction des points d'une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F' d'où l'on voit ces foyers sous un angle de $\frac{2\pi}{3}$.*

- Le point M appartient à l'ellipse $\mathcal{E}$, donc $MF + MF' = 2a$. Or sur (γ), $MF + MF' = ME$; donc $ME = 2a$ et le point M est situé sur le cercle Ω de centre E et de rayon $2a$.

En résumé. *Si un point M du demi-plan $\mathcal{H}$ répond à la question, il appartient simultanément à l'arc (γ) du cercle circonscrit au triangle FEF' et à l'arc intersection du cercle Ω avec ce même demi-plan.*

Synthèse. S'il existe un point M appartenant simultanément aux deux arcs considérés il est distinct des points F et F' car dans le cas d'une ellipse $FF' < 2a$, donc $EF < EM$. Ce point vérifie simultanément $\widehat{FMF'} = \frac{2\pi}{3}$ et $MF + MF' = 2a$; il appartient donc à l'ellipse $\mathcal{E}$. Par conséquent, le point M vérifie les conditions du problème.

Discussion. Elle porte sur les conditions d'intersection des arcs de cercles. Si l'on désigne par G le point du cercle Γ diamétralement opposé à E, les arcs se coupent si, et seulement si :

$$EF \leq 2a \leq EG.$$

On a les égalités :

$$EF = 2c \quad \text{et} \quad EG = \frac{4c\sqrt{3}}{3}$$

ce qui donne donc :

— Si $\frac{c}{a} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ le problème n'a pas de solution.

— Si $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ les deux solutions sont les sommets non principaux de l'ellipse $\mathcal{E}$.

— Si $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{c}{a} < 1$ il y a quatre solutions symétriques par rapport aux axes de l'ellipse $\mathcal{E}$.

DEUXIÈME PARTIE

Triangle équilatéral dont les sommets sont sur une hyperbole équilatère

A

Étude d'un exemple.

1. L'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$. Le point M d'affixe z appartient à $\mathcal{H}$ si, et seulement si :

$$(5) \qquad z^2 - 2(1+i)z = (\overline{z})^2 - 2(1-i)\overline{z}$$

en posant $z = x + iy$ (5) équivaut à :

$$xy - x - y = 0$$

ce qui est une équation cartésienne de l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ dont les asymptotes sont les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 1$ et qui passe par le point O.

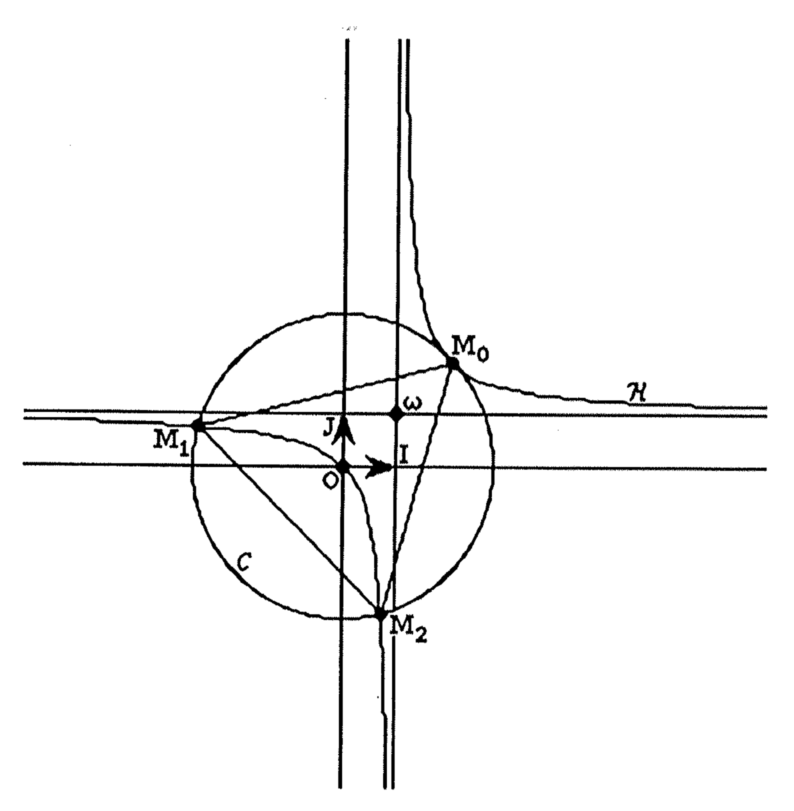


Figure 3. *Intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec l'hyperbole $\mathcal{H}$.*

2. *a.* La première relation caractérise l'affixe des points de $\mathcal{C}$, quant à la seconde c'est (5)

   b. On déduit ce système du précédent par substitution de $\frac{8}{z}$ à $\bar{z}$ dans la seconde équation puis en multipliant le premier membre par z^2. Il faut être soigneux vis à vis de l'équivalence des deux systèmes.

   c. Les solutions du système sont :

$$z_0 = 2(1+i), \quad z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} z_0, \quad z_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_0$$

   le triangle $M_0(z_0)M_1(z_1)M_2(z_2)$ est équilatéral de centre O.

B

1. Le point A ayant $\left(a, \frac{k}{a}\right)$ pour coordonnées cartésiennes, le cercle $\mathcal{C}'$ a pour équation cartésienne réduite :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2\frac{k}{a}y - 3\left(a^2 + \frac{k^2}{a^2}\right) = 0$$

2. Une équation aux abscisses des points d'intersection est :

$$(6) \qquad x^4 - 2ax^3 - 3\left(a^2 + \frac{k^2}{a^2}\right)x^2 - 2\frac{k^2}{a}x + k^2 = 0$$

3. Par construction le point A' est un point d'intersection des courbes $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{C}'$; son abscisse $-a$ vérifie donc nécessairement (6) qui s'écrit :

$$(x+a)\left(x^3 - 3ax^2 - 3\frac{k^2}{a^2}x + \frac{k^2}{a}\right) = 0.$$

Les abscisses des points M_i ($1 \leq i \leq 3$) sont les trois racines x_i ($1 \leq i \leq 3$) de l'équation :

$$x^3 - 3ax^2 - 3\frac{k^2}{a^2}x + \frac{k^2}{a} = 0$$

Les relations entre coefficients et racines d'une équation polynôme donnent

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3a$$

et on obtient

$$y_1 + y_2 + y_3 = k\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{3k}{a}.$$

Les coordonnées du centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$ sont celles de A. Le point A est donc simultanément centre de gravité et centre du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$ qui est, par conséquent, équilatéral.

4. On a démontré :

Proposition.

Soit A un point d'une hyperbole équilatère et A' son symétrique par rapport au centre de l'hyperbole. A est en général le centre d'un triangle équilatéral dont les sommets sont les trois points d'intersection de l'hyperbole avec le cercle de centre A et de rayon AA', distincts de A'.

Le cas étudié précédemment est celui où le point A est un des sommets de l'hyperbole. Le cercle de centre A et de rayon AA' et l'hyperbole sont tangents en A'. Il s'en suit que l'un des points M_i est confondu avec le point A', d'où l'existence de trois points communs seulement à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$.

TROISIÈME PARTIE

Triangle équilatéral inscrit dans un carré

A

Étude d'un exemple.

En écrivant que le triangle DEF est équilatéral, on obtient l'équation

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

dont l'unique solution appartenant à $[0, 1]$ est : $x = 2 - \sqrt{3}$. On peut construire le triangle DEF, par exemple, comme homothétique d'un triangle équilatéral de sommet D et de hauteur portée par (BD).

B

Recherche des triangles équilatéraux inscrits dans le carré $ABCD$.

1. *a.* Soit MNP un triangle équilatéral dont les sommets M et N sont situés sur le côté $[AB]$ d'un carré $ABCD$; on montre que le sommet P est nécessairement un point intérieur au carré.

   b. On ramène tous les autres cas à celui-ci par des isométries laissant le carré globalement invariant.

2. *a.* De $z_N - z_P = (z_M - z_P)e^{i\frac{\pi}{3}}$, on déduit :

$$z_N = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

b. Le point N est un point du segment $[BC]$ si, et seulement si, les relations

$$\Re(z) = 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \Im(z) \leq 1$$

sont vérifiées. Ceci équivaut à :

$$\alpha = 2 - \beta\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} - 1 \leq \beta \leq \sqrt{3}$$

c. Le point P de (AD) appartient à $[AD]$ si, et seulement si $0 \leq \beta \leq 1$. Par conséquent, le triangle équilatéral MNP appartient à (T) si, et seulement si :

$$\alpha = 2 - \beta\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} - 1 \leq \beta \leq 1$$

On démontre le résultat suivant :

Proposition. *Soit un point P du segment $[AD]$, il existe un triangle MNP élément de* (T) *si, et seulement si*

$$\sqrt{3} - 1 \leq \beta \leq 1.$$

Dans le cas contraire, il n'existe aucun triangle élément de (T) *de sommet P*

d. En posant γ l'affixe du point N, on trouve :

$$\alpha = 2 - \beta\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + i(\sqrt{3} - \beta).$$

L'affixe du point K est $\kappa = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$; le point K est indépendant du point P et c'est le troisième sommet du triangle équilatéral ABK situé dans le demi-plan limité par (AB) et contenant le carré $ABCD$. On en déduit la construction d'un triangle quelconque de (T).

e. Le lieu du point P est le segment $[P_0D]$ ensemble des points de (AD) d'abscisse $\beta \in [\sqrt{3} - 1, 1]$. Le lieu de N s'en déduit par symétrie de centre K : c'est le segment $[DN_0]$, N_0 désignant le point d'intersection de la droite (DK) avec la droite (BC). Le lieu de M se déduit de celui de P en étudiant l'application numérique affine définie par $\alpha = 2 - \beta\sqrt{3}$ avec $\beta \in [\sqrt{3} - 1, 1]$. C'est donc le segment limité par M_1 et M_2 d'abscisses respectives $2 - \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - 1$.

D C K N P P_0 N_0 G_1 G G_2 G_4 G_3 A M_1 M M_2 B

Figure 4. *Lieu du centre de gravité G du triangle MNP.*

f. Le centre de gravité G du triangle MNP est l'image du point M par l'homothétie $\mathfrak{h}$ de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$. Son lieu est donc le segment $[G_1G_2]$ où G_1 (resp. G_2) est le barycentre des points $(K, 2)$ et $(M_1, 1)$ (resp. $(M_2, 1)$).

Si l'on se réfère à la figure 4, le point G_1 est le centre de gravité du triangle DM_1N_0 qui admet la droite (BD) pour axe de symétrie ; le point G_1 est donc un point de la diagonale $[BD]$ du carré ; pour la même raison, le point G_2 est situé sur la diagonale $[AC]$ du carré.

3. *a.* il existe toujours un unique triangle équilatéral inscrit dans le carré admettant pour sommet un point S situé sur l'un des côtés. La construction fait intervenir le point K ou l'un des trois autres points analogues.

b. L'ensemble des centres de gravité est le carré qui se déduit de $ABCD$ par l'homothétie $\mathfrak{h}'$ de centre O et rapport :

$$\frac{2(2-\sqrt{3})}{3}.$$

Corrigé du CAPES interne 1992, 2ème composition

Remarques au sujet des triangles directs : Un triangle ABC est soit direct, soit indirect dans le plan euclidien orienté. On dit qu'il est direct si les trois bases $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ sont simultanément directes, et indirect si ces trois bases sont indirectes. Cela a un sens car ces trois bases ont toujours la même orientation. En effet, si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est directe,

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \end{cases} \Rightarrow \det_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \det_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}((\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Par suite dire que ABC est direct revient à dire que les déterminations principales des angles $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ normalement dans $]-\pi,\pi[$ seront en fait dans $]0,\pi[$. En effet, si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \theta\ (2\pi)$ avec $\theta \in]-\pi,\pi[$, dire que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est directe revient à dire que si $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}/||\overrightarrow{AB}||$ et si $\overrightarrow{j}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{i}$,

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}.$$

D'où

$$\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})) = \begin{vmatrix} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| & \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\theta \\ 0 & \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\sin\theta \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow \sin\theta > 0$$

et $\theta \in]0,\pi[$.

I.A.1. • AED est équilatéral : En angles de droites

$$(DA,DE) = (DA,DB) = (CA,CB) = \frac{\pi}{3}\ (\pi), \quad (1)$$

$$(ED,EA) = (MC,MA) = (BC,BA) = \frac{\pi}{3}\ (\pi). \quad (2)$$

Ces deux égalités entraînent compte tenu de l'identité

$$(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}) = \pi\ (2\pi)$$

[0] [ag18] v1.00

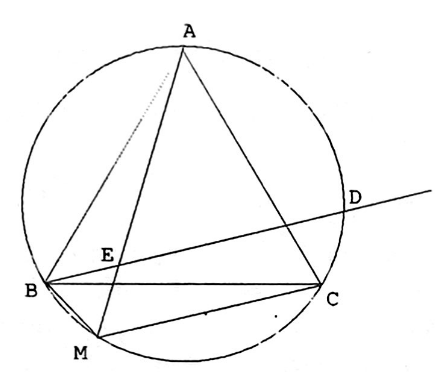
l'égalité

$$(AE, AD) = \pi - 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\ (\pi)\,. \qquad (3)$$

Les égalités (1), (2) et (3) prouvent que AED est équilatéral. En effet, si par exemple DAE est direct, on déduit des trois égalités ci-dessus vraies modulo π les égalités

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$$

modulo 2π, puisque ces déterminations principales se trouveront en fait dans l'intervalle $]0, \pi[$.



• BME est équilatéral :

$$(EB, EM) = (ED, EA) = \frac{\pi}{3}\ (\pi)$$

$$(ME, MB) = (MA, MB) = (CA, CB) = \frac{\pi}{3}\ (\pi)$$

et comme on l'a vu précédemment, le troisième angle du triangle sera automatiquement

$$(BM, BE) = \pi - 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\ (\pi)\,.$$

• $MCDE$ est un parallélogramme car (MC) est parallèle à (ED) par construction, et (ME) parallèle à (CD) d'après les calculs :

$$\begin{cases} (MC, ME) = (MC, MA) = (BC, BA) = \frac{\pi}{3}\ (\pi) \\ (MC, CD) = (CM, CD) = (AM, AD) = (AE, AD) = \frac{\pi}{3}\ (\pi) \end{cases}$$

qui entraînent $(MC, ME) = (MC, CD)\ (\pi)$.

• Propriété $\mathcal{P}$: Comme $E \in [AM]$,

$$MA = ME + EA = MB + ED = MB + MC$$

Remarque : Vérifions que $E \in [AM]$ provient de l'hypothèse $M \in \overset{\frown}{BC}$. Pour montrer que $[AM]$ coupe (BD) en E, on montre que A et M sont dans des demi-plans distincts de frontière (BD). Les mesures d'angles intervenant ici sont dans $]-\pi,\pi]$, et il s'agit de prouver que (en angles de vecteurs) $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}) < 0$ et $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) > 0$. On a

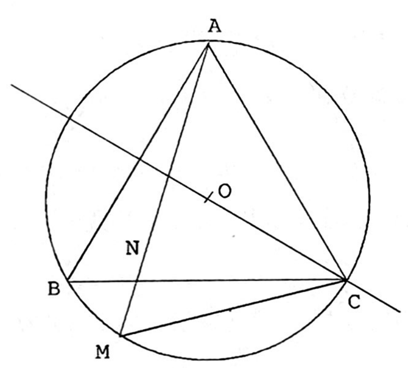
$$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}) + \pi = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) + 2\pi \ (2\pi)$$

soit $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = -\pi/3 < 0$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) &= (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \ (2\pi)\\ &= (\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BC}) + \frac{\pi}{3} = (\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB}) + \frac{\pi}{3} = (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) + \frac{\pi}{3} > 0\end{aligned}$$

car $0 < (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) < (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pi/3$ par hypothèse.

I.A.2. • N appartiendra au segment $[MA]$ si l'on prouve que $MN < MA$, ou encore $MB < MA$ puisque $MN = MB$. La médiatrice $\Delta = (OC)$ de $[AB]$ partage le plan en deux demi-plans $\mathcal{P}_A$ contenant A, et $\mathcal{P}_B$ contenant A. Montrer que $MB < MA$ revient à prouver que $M \in \mathcal{P}_B$ (cf. régionnement de la médiatrice). On va prouver que $MB < MA$ en utilisant trois méthodes différentes.



▶ **Première méthode** : On a

$$(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) = 2(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3} \ (2\pi)\,.$$

$M \in \gamma$ signifie que la détermination principale de $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OM})$ est comprise entre 0 et

$$(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3} \ (2\pi)\,,$$

soit $-2\pi/3 < (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}) < 0$. Les déterminations principales des angles $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM})$ sont de signes contraires donc $M \in \mathcal{P}_B$.

▶ **Deuxième méthode** : Comme le cercle (Γ) est centré sur la frontière Δ, l'arc (γ) d'extrémités A (sur Δ) et B (dans $\mathcal{P}_B$) est entièrement inclus dans le demi-plan fermé $\overline{\mathcal{P}}_B$ (cette propriété des cercles et des demi-plans se démontre facilement en choisissant un repère adapté d'origine O et dont un axe est Δ, compte tenu de l'hypothèse$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2\pi/3\ (2\pi)$).

▶ **Troisième méthode** : Montrons que $MB < MA$ en utilisant les nombres complexes. On pose

$$B(r), \quad C(re^{i\frac{2\pi}{3}}), \quad A(re^{i\frac{4\pi}{3}}), \quad M\left(re^{i\theta}\right) \quad \text{avec } 0 < \theta < \frac{2\pi}{3},$$

où r désigne le rayon de Γ.

$$\begin{aligned}
(MB < MA) &\Leftrightarrow \left|e^{i\theta} - 1\right| < \left|e^{i\theta} - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right| \\
&\Leftrightarrow \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| < \left|\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{2\pi}{3})\right| \\
&\Leftrightarrow \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| < \left|-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right| \\
&\Leftrightarrow 2\tan t < \tan t + \sqrt{3} \quad \text{où } 0 < t < \frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \tan t < \sqrt{3} \quad \text{où } 0 < t < \frac{\pi}{3},
\end{aligned}$$

et cette dernière affirmation est triviale.

• $r(C) = A$ puisque ABC est équilatéral direct. Le triangle BMN est isocèle en M et

$$(MN, MB) = (MA, MB) = (CA, CB) = \frac{\pi}{3}\ (\pi)$$

donc BMN sera équilatéral et $r(M) = N$.

• La rotation r conserve les distances, donc $MC = NA$. De plus $MN = MB$ (puisque BMN est équilatéral) et $N \in [MA]$, donc

$$MA = MN + NA = MB + MC.$$

I.A.3. Par la formule d'Al Kashi

$$MA^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM.OA\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 2\rho^2(1 - \cos\theta)$$

De la même manière, comme

$$\begin{array}{l}(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \theta - \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)\\ (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = \theta + \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)\,,\end{array}$$

on obtient

$$\begin{array}{l}MB^2 = 2\rho^2\left(1 - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right),\\ MC^2 = 2\rho^2\left(1 - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right).\end{array}$$

On déduit $MA^2 = 4\rho^2 \sin^2\theta/2$ soit $MA = 2\rho\sin\theta/2$ puisque $2\pi/3 < \theta < 4\pi/3$.
De la même manière

$$MB = 2\rho\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad MC = 2\rho\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right),$$

donc

$$\begin{aligned} MB + MC &= 2\rho\left[\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\rho.2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi}{3} = 2\rho\sin\frac{\theta}{2} = MA. \end{aligned}$$

I.A.4 a) Connaissances mises en oeuvre.
b) Commentaire.

1-méthode : a) Condition de cocyclicité (term.) ou propriété des angles inscrits interceptant un même arc de cercle (3ème). Angles définis par des parallèles et une sécante (5ème)

b) Démonstration élémentaire restant dans le cadre de la géométrie et accessible à un bon élève de troisième.

2-méthode :

a) Régionnement du plan par la médiatrice (4ème)
Rotations (3ème et 2nde) ; cocyclicité (term.) ou angles inscrits (3ème)

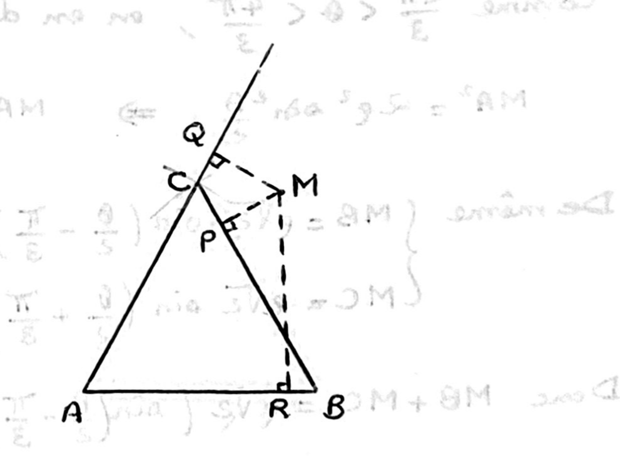
b) Cette preuve montre une utilisation des rotations pour obtenir des propriétés métriques d'une figure.

3-méthode :

a) Formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ dans un triangle quelconque.
Trigonométrie

b) La preuve est alors un calcul sans surprise mais offre une alternative aux démonstrations purement géométriques précédentes.

I.B.1

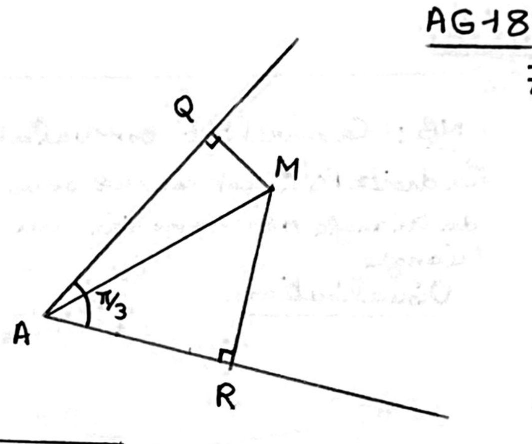


* Si $P=Q$, $P=Q$ appartiendra à (BC) et à (CA) donc $P=Q=C$.
Si $M \neq C$, la droite (MC) sera perpendiculaire à (BC) et (CA), donc $(BC) // (CA)$, absurde.

Ainsi P, Q, R seront 2 à 2 distincts dès que $M \notin \{A, B, C\}$

* Si $M = C$, $P = Q = M$ et R sera le pied de la hauteur de ABC issue de C, ie le milieu de $[AB]$.

I.B.2

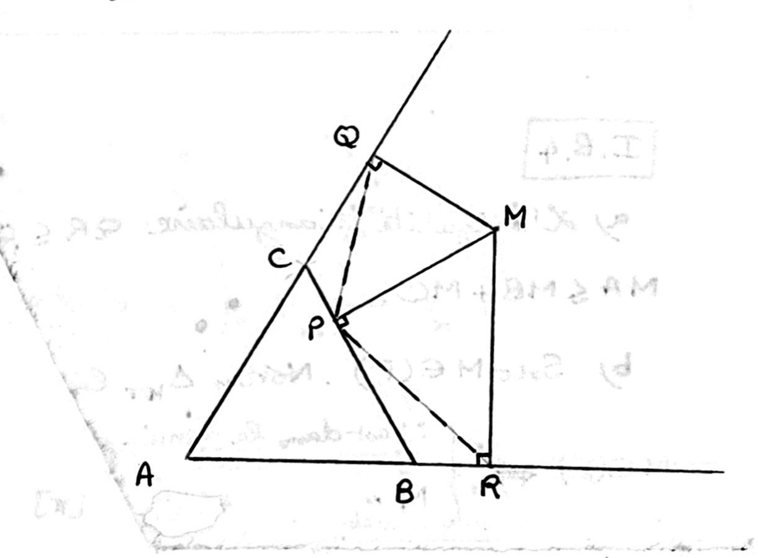


Le cercle de diamètre [AM] passe par Q et R (car les triangles AQM et ARM sont rectangles en Q et R), donc sera circonscrit au triangle AQR et :

$$\frac{QR}{\sin \hat{A}} = AM \qquad \text{d'où} \quad \boxed{QR = \frac{\sqrt{3}}{2}.MA}$$

Les 2 autres formules se montrent de la même façon.

I.B.3



$\widehat{PQ,PR} = \widehat{PQ,QM} + \widehat{QM,MR} + \widehat{MR,PR}$

Par cocyclicité :

$$\begin{cases} \widehat{PQ,QM} = \widehat{CP,CM} = \widehat{CB,CM} \\ \widehat{QM,MR} = \widehat{AQ,AR} = \widehat{AC,AB} \\ \widehat{MR,PR} = \widehat{BM,BP} = \widehat{BM,BC} \end{cases}$$

d'où $\widehat{PQ,PR} = \widehat{CB,CM} + \widehat{AC,AB} + \widehat{BM,BC}$

$= \widehat{BM,CM} + \widehat{AC,AB}$

$$\boxed{\widehat{PQ,PR} = \widehat{MB,MC} - \widehat{AB,AC} \quad [\pi]}$$

b) Le critère de cocyclicité en termes d'angles de droites montre que si $M \notin \{A,B,C\}$:

$M \in \Gamma \Leftrightarrow A,B,C,M$ cocycliques $\Leftrightarrow \widehat{MB,MC} = \widehat{AB,AC}$

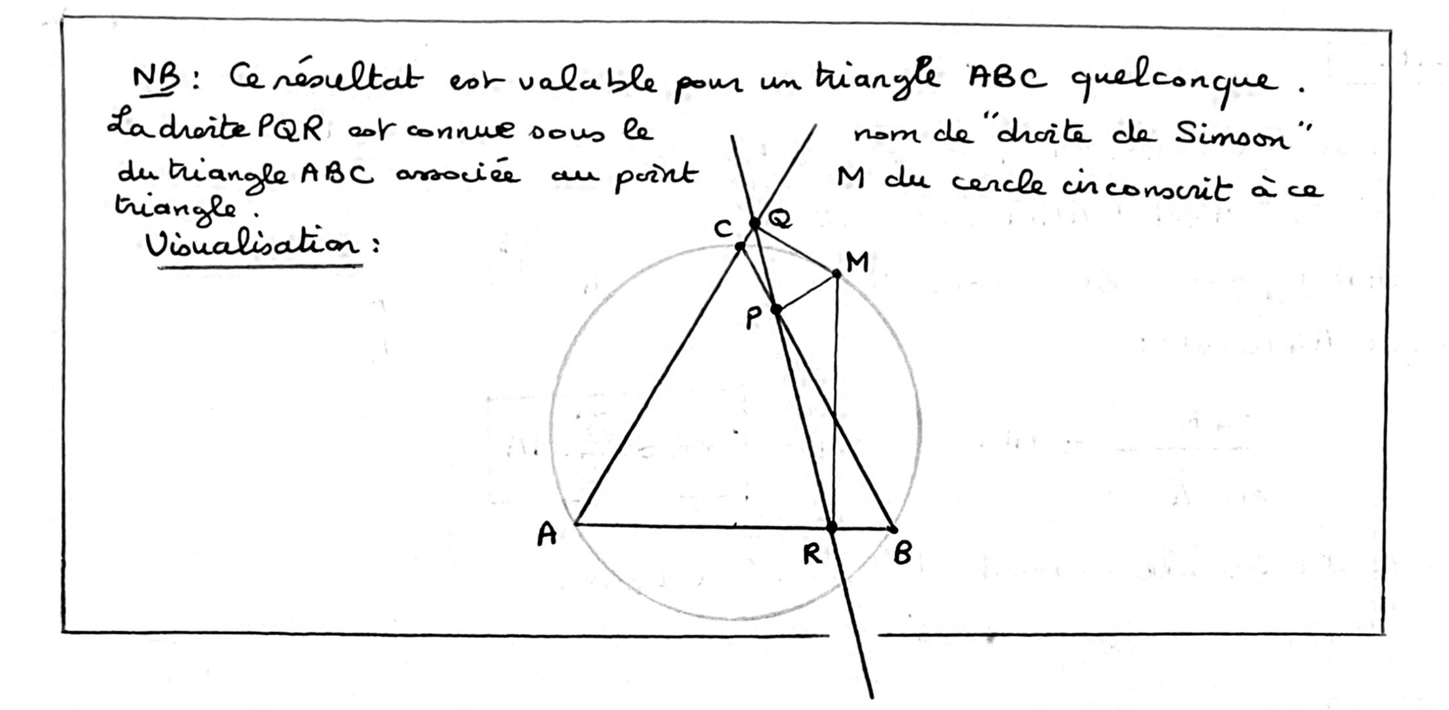
$\underset{a)}{\Leftrightarrow} \widehat{PQ,PR} = 0 \Leftrightarrow P,Q,R$ alignés

Si $M \in \{A,B,C\}$, par ex. $M = A$, alors $Q = R = A$ et P milieu de [BC]. Alors $M \in \Gamma$ et P,Q,R sont alignés.

$M \in \Gamma \Leftrightarrow P,Q,R$ alignés sera vraie pour tout M.

NB : Ce résultat est valable pour un triangle ABC quelconque.
La droite PQR est connue sous le nom de "droite de Simson" du triangle ABC associée au point M du cercle circonscrit à ce triangle.

Visualisation :



I.B.4

a) L'inégalité triangulaire $QR \leq QP + PR$ alliée à I.B.2 entraîne $MA \leq MB + MC$.

b) Soit $M \in (\Gamma)$. Notons Δ_{KT} la médiatrice de $[KT]$.

$M \in (\gamma) \Leftrightarrow$ { M est dans le demi-plan de frontière Δ_{AB} contenant B ; M " " " Δ_{AC} " C }

$\Leftrightarrow \begin{cases} MB \leq MA \\ MC \leq MA \end{cases}$

NB : Pour plus d'explications sur la première équivalence, voir en page 21.

c)

i) D'après les questions précédentes :

$$M \in (\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \Gamma \\ MB \leq MA \\ MC \leq MA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P, Q, R \text{ alignés} \\ RP < QR \\ PQ < QR \end{cases} \Leftrightarrow P \in [QR]$$

ii) On utilise i) et on complète :

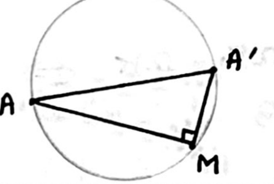
$$M \in (\gamma) \Leftrightarrow P \in [QR] \Leftrightarrow QR = QP + PR \underset{(I.B.2)}{\Leftrightarrow} MA = MB + MC$$

iii) provient alors de ii) et de l'écriture de (Γ) comme réunion des 3 arcs $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ définis comme (γ).

I.C.1 $MB+MC = MA$ sera maximum pour $M = A'$ où A' est le point de (Γ) diamétralement opposé à A.

En effet, $[AA']$ est la corde de plus grande longueur d'extrémité A que l'on puisse construire dans le cercle (Γ) ... grâce à Pythagore :

$$AA'^2 = AM^2 + MA'^2 \Rightarrow AM < AA' \text{ si } M \in \Gamma \setminus \{A, A'\}.$$



I.C.2

dessin pour :

$a = 3$

$b = 2,5$

$c^2 = 9 - 2,5^2 \Rightarrow c \simeq 1,66$

excentricité $e = \frac{c}{a} \simeq 0,55$

Soit K tq $FF'K$ soit équilatéral et $\widehat{FKF'} = \frac{2\pi}{3}$ $[\pi]$.

Notons Γ le cercle circonscrit à $FF'K$.

$$\widehat{FMF'} = \frac{2\pi}{3} \ [\pi] \Leftrightarrow \widehat{FMF'} = \widehat{FKF'} \Leftrightarrow M \in \Gamma$$

de sorte que

$$\begin{cases} M \in \mathcal{E} \\ \widehat{FMF'} = \frac{2\pi}{3} \ [\pi] \end{cases} \Leftrightarrow M \in \mathcal{E} \cap \Gamma$$

Tout revient à discuter suivant le nbre de points d'intersection de $\mathcal{E}$ et Γ.

* Γ est de rayon $\boxed{\rho = \frac{2c}{\sqrt{3}}}$ et de centre $\Omega\begin{pmatrix}0\\ \omega\end{pmatrix}$

Cherchons les coordonnées de K et Ω :

$OK = 2c.\frac{\sqrt{3}}{2} = c\sqrt{3}$ donc $\boxed{K\begin{pmatrix}0\\ -c\sqrt{3}\end{pmatrix}}$

$\Omega F = \Omega K \iff c^2 + \omega^2 = (\omega + c\sqrt{3})^2 \iff \omega = -\frac{c}{\sqrt{3}}$ donc $\boxed{\Omega\begin{pmatrix}0\\ -\frac{c}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}$

* Graphiquement, on constate qu'il peut y avoir 4 solutions.
Notons $\widehat{FF'}$ le plus petit arc de Γ d'extrémité F et F' (etc). Alors :

1) $\underline{\widehat{FF'} \cap \mathcal{E} = \emptyset}$

car $\begin{cases} M \in \widehat{FF'} \iff MK = MF + MF' & (I.B.3.c) \\ M \in \mathcal{E} \iff MF + MF' = 2a \end{cases} \Rightarrow MK = 2a$

et $MK \leq \rho = \frac{2c}{\sqrt{3}} \Rightarrow a \leq \frac{c}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} \leq \frac{c}{a} = e$ absurde car $e < 1$ pour une ellipse.

2) Les 2 seuls points d'intersection possible de $\mathcal{E}$ et Γ ne peuvent être que sur $\widehat{FK}$ ou $\widehat{F'K}$. Ils sont symétriques / à Oy et il suffira de savoir si $\widehat{FK}$ coupe $\mathcal{E}$ pour conclure :

• <u>Si K est à l'extérieur de $\mathcal{E}$</u>, ie $-c\sqrt{3} < -b \iff b < c\sqrt{3}$, l'arc $\widehat{FK}$ joignant F, intérieur à $\mathcal{E}$, à K situé à l'extérieur de $\mathcal{E}$, coupera $\mathcal{E}$.
<u>$\mathcal{E}$ coupe alors Γ en 2 points</u>.

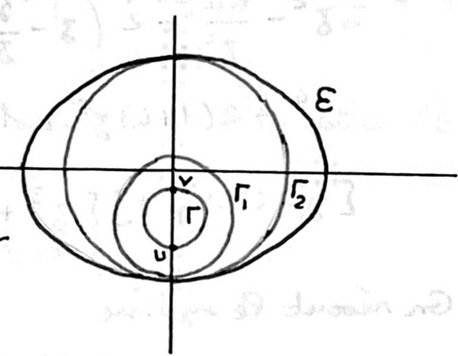
Notons que $b < c\sqrt{3} \iff \frac{b^2}{c^2} < 3 \iff \frac{a^2 - c^2}{c^2} < 3 \iff \frac{1}{2} < e$ (car $e = \frac{c}{a}$ et $a^2 = b^2 + c^2$)

• <u>Si $K \in \mathcal{E}$</u>, ie si Γ et $\mathcal{E}$ sont tangents en K, ie $e = \frac{1}{2}$, alors $\mathcal{E}$ coupe Γ en un seul point K.

• Si K est à l'intérieur de $\mathcal{E}$, ie si $e > \frac{1}{2}$, le cercle Γ est entièrement à l'intérieur de Γ d'après le lemme ci-dessous et $\Gamma \cap \mathcal{E} = \emptyset$.

> <u>lemme</u> : $\mathcal{E}$ ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
>
> Γ cercle de centre $\Omega\binom{0}{\omega}$ et de rayon ρ
>
> Si $-b \leq \omega - \rho < \omega + \rho \leq b$ alors Γ est à l'intérieur de l'ellipse $\mathcal{E}$ et ne peut l'intercepter qu'aux extrémités $U\binom{0}{\omega-\rho}$ ou $V\binom{0}{\omega+\rho}$.

preuve :



Si U est le pt de Γ le plus proche d'un des sommets $\binom{0}{\pm b}$ de $\mathcal{E}$, Γ est à l'intérieur du cercle Γ_1 tangent intérieurement à $\mathcal{E}$, et Γ_1 est à l'intérieur du cercle Γ_2 de centre O et de rayon b.

Γ_2 est clairement à l'intérieur de $\mathcal{E}$ (puisque l'on passe de Γ_2 à $\mathcal{E}$ par une affinité orthogonale de rapport $\frac{a}{b} > 1$ bien connue)

NB : On peut tout vérifier en utilisant les équations de ces cercles et ellipses.

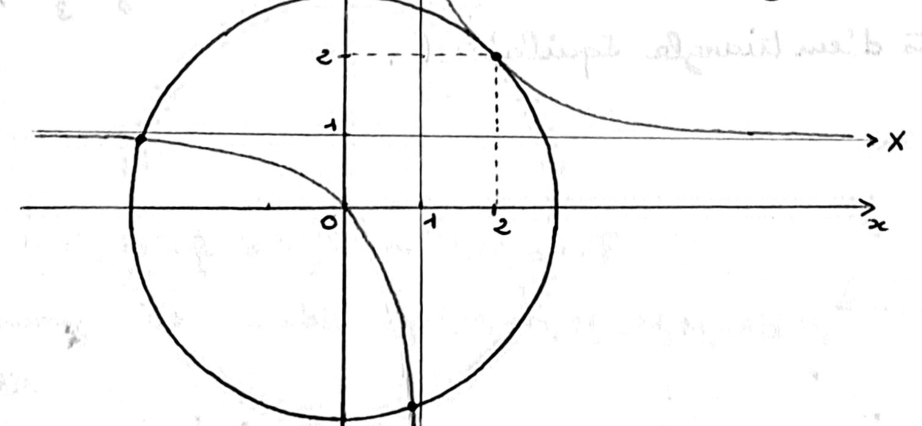
CQFD

II.A.1

$\mathcal{C}$ est le cercle de rayon $2\sqrt{2}$.

$\mathrm{Im}\,(z^2 - 2(1+i)z) = 0 \iff xy - x - y = 0 \iff (x-1)(y-1) - 1 = 0$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où $\Omega\binom{1}{1}$, $\mathcal{H}$ sera donc l'hyperbole équilatère d'équation $X.Y = 1$. (Les formules de changement de repère étant $\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+1 \end{cases}$)



NB : Il va sans dire que ce dessin prendra une demi-page le jour de l'épreuve.

II.A.2

a) $M \in \mathcal{C}$ ssi $|z| = 2\sqrt{2}$, ie $z\bar{z} = 8$.

$M \in \mathcal{H}$ ssi $z^2 - 2(1+i)z \in \mathbb{R}$ ce que l'on traduit par :

$$[z^2 - 2(1+i)z] - [\bar{z}^2 - 2(1-i)\bar{z}] = 0$$

On obtient la condition annoncée :

$$z^2 - \bar{z}^2 - 2(z - \bar{z}) - 2i(z + \bar{z}) = 0 \quad (*)$$

b) Il suffit de remplacer $\bar{z}$ par $\frac{8}{z}$ dans $(*)$ pour obtenir :

$$z^2 - \frac{64}{z^2} - 2\left(z - \frac{8}{z}\right) - 2i\left(z + \frac{8}{z}\right) = 0$$

$$z^4 - 2(1+i)z^3 + 16(1-i)z - 64 = 0$$

$$[z - 2(1+i)][z^3 + 16(1-i)] = 0$$

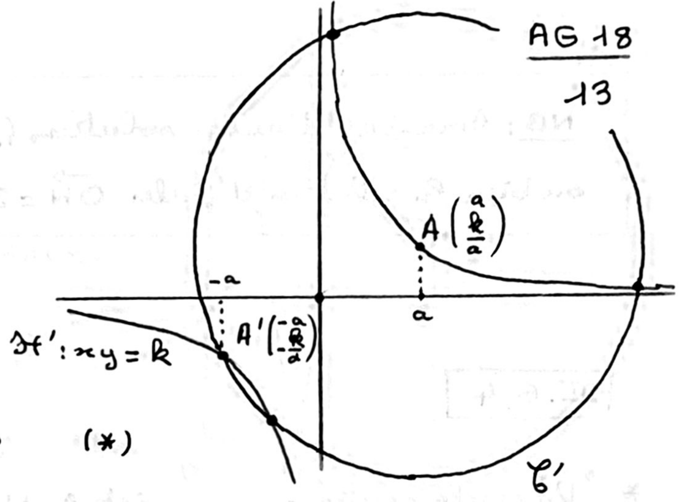
c) On résout le système

$$\begin{cases} z\bar{z} = 8 \\ [z - 2(1+i)][z^3 + 16(1-i)] = 0 \end{cases}$$

- Si $z = 2(1+i)$, $z\bar{z} = 8$ et l'on a bien une solution.

- Les autres solutions vérifient $z^3 = 16(i-1)$ et seront donc de la forme z_0, jz_0, j^2z_0 pour un $z_0 \in \mathbb{C}$ convenable. On peut prendre $z_0 = 2(1+i)$ car $[2(1+i)]^3 = 16(i-1)$. Ce sont là les affixes des sommets d'un triangle équilatéral puisque $|z_0 - jz_0| = |jz_0 - j^2z_0| = |j^2z_0 - z_0|$ (compte tenu de $j^3 = 1$ et $|j| = 1$).

NB : On peut aussi conclure en rappelant que $z \mapsto jz$ n'est autre que l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Le triangle z_0, jz_0, j^2z_0 est alors invariant par cette rotation, donc équilatéral.



II.B.1

$$\mathcal{C}': (x-a)^2 + \left(y - \frac{k}{a}\right)^2 = AA'^2 = 4a^2 + 4\frac{k^2}{a^2}$$

$$\mathcal{C}': x^2 - 2ax + y^2 - 2\frac{k}{a}y - 3a^2 - 3\frac{k^2}{a^2} = 0 \qquad (*)$$

II.B.2

$\begin{cases} xy = k \\ (*) \end{cases}$ entraînent $x^4 - 2ax^3 - 3\left(a^2 + \frac{k^2}{a^2}\right)x^2 - \frac{2k^2}{a}x + k^2 = 0 \quad (E)$

II.B.3

A' est dans $\mathcal{C}' \cap \mathcal{H}'$, donc $-a$ est solution de l'équation (E).
Celle-ci s'écrira :

$$(x+a)\left(x^3 - 3ax^2 - \frac{3k^2}{a^2}x + \frac{k^2}{a}\right) = 0$$

D'où la relation entre les abscisses des points M_1, M_2, M_3 :

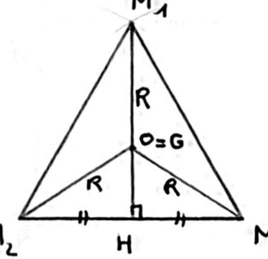
$$3a = x_1 + x_2 + x_3$$

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = a$ sera l'abscisse du cdg G du triangle $M_1M_2M_3$. Son ordonnée sera $\frac{1}{3}\left(\frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2} + \frac{k}{x_3}\right) = \frac{k}{3} \cdot \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{k}{3}\,\frac{-\frac{3k^2}{a^2}}{-\frac{k^2}{a}}$

$$= \frac{k}{a}$$

Le cdg de $M_1M_2M_3$ est donc $A\begin{pmatrix}a\\ \frac{k}{a}\end{pmatrix}$, qui est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$. Dans ces conditions, <u>$M_1M_2M_3$ sera équilatéral</u> d'après le :

> lemme : Un triangle dont le cdg coïncide avec le centre de son cercle circonscrit est équilatéral.



preuve : Si $G = O$, $GH = \frac{GM_1}{2} = \frac{R}{2}$

et $HM_3 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_2M_3 = R\sqrt{3}$.

En recommençant, on obtient $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = R\sqrt{3}$

CQFD

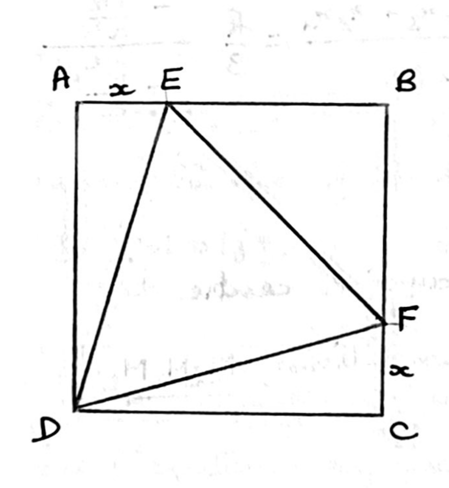
NB : Imaginez d'autres solutions (par exemple : utilisant les nombres complexes, ou bien la relation d'Euler $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$) [T]

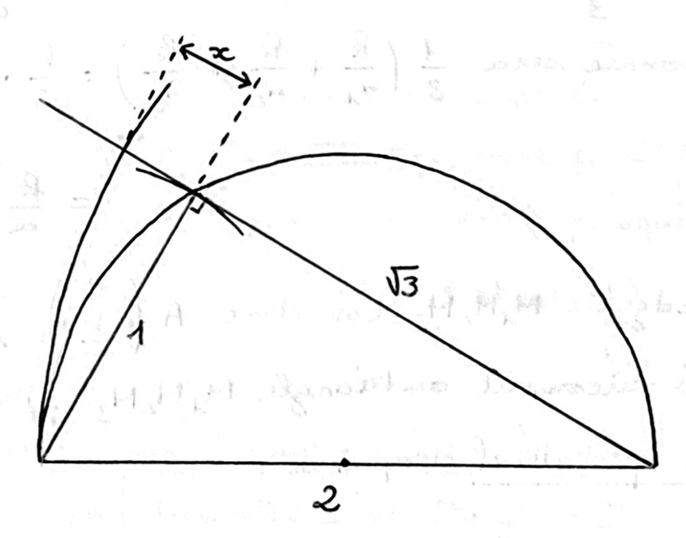
II.B.4

* "Un cercle centré en un point A d'une hyperbole équilatère de centre de symétrie O, et de rayon 2.OA, coupe cette hyperbole en 3 ou 4 points dont 3 d'entre eux sont les sommets d'un triangle équilatéral."

* Le cas envisagé en II.A est limite : il y a seulement 3 points d'intersection. O est le cdg du triangle $M_1M_2M_3$. O et le point de coordonnée $\binom{2}{2}$ sont sur $\mathcal{H}$ et sont symétriques par rapport au centre $\Omega\binom{1}{1}$ de l'hyperbole : c'est bien un cas particulier du Théorème énoncé ci-dessus.

III.A DEF est équilatéral ssi $1+x^2 = (1-x)^2+(1-x)^2$, ie $x^2-4x+1=0$
La seule solution positive de cette équation est $\boxed{x = 2-\sqrt{3}}$



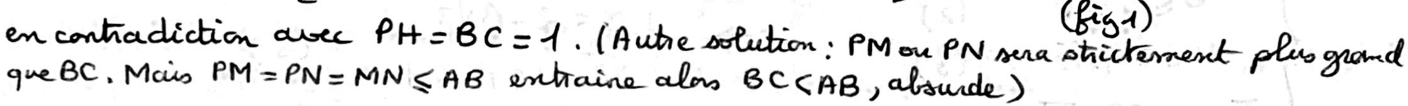


III.B.1.a

Si MNP est équilatéral et si M et N appartiennent à [AB], de 2 choses l'une :

1) P est sur le côté opposé [CD] (fig.1) :

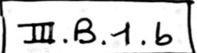
Alors $PH = x\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ (où $MN = x \leqslant 1$)



en contradiction avec $PH = BC = 1$. (Autre solution : PM ou PN sera strictement plus grand que BC. Mais $PM = PN = MN \leqslant AB$ entraine alors $BC < AB$, absurde)

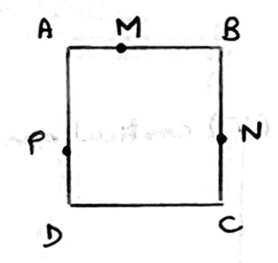
2) P est sur un côté adjacent à [AB], par ex. [BC] :

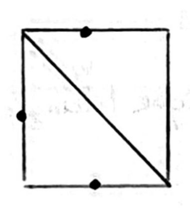
La médiatrice de (MN) sera alors parallèle à (BC), donc à (BP), et ne pourra jamais passer par P

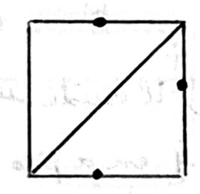


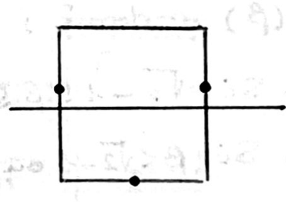
Vu le a), 4 cas de figure peuvent se présenter :

Autre solution : on peut décider de se ramener au cas (T) systématiquement par rotation de centre le centre O du carré et d'angles $k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.









OK Triangle de (T)

Par symétrie /à (AC) on se ramène à une solution de (T)

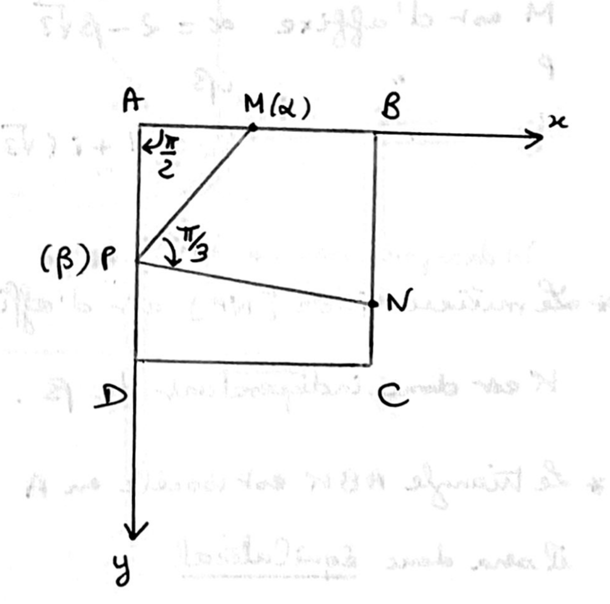
Symétrie /à (BD)

sym. /à la médiatrice de [AD].

On se ramène dans tous les cas à un triangle de (T).

III.B.2 a)

M d'affixe α
P " $i\beta$



La rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est donnée par : $r(z) - i\beta = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i\beta)$

et l'affixe de N sera :

$$z_N = i\beta + e^{i\frac{\pi}{3}}(\alpha - i\beta)$$

$$z_N = \frac{\alpha}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

b)

$$N \in [BC] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \\ 0 \leq \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \beta\sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 1 \leq \beta \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

c)

* Une condition nécessaire et suffisante est :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 1 & (1) \\ 0 \leq \beta \leq 1 & (2) \\ \alpha = 2 - \beta\sqrt{3} & (3) \\ \sqrt{3} - 1 \leq \beta \leq \sqrt{3} & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \beta\sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 1 \leq \beta \leq 1 \end{cases} \quad (S)$$

Réc., si (S) est vrai, (2), (3) et (4) sont triviales et :

$$(-\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) \geq -\beta\sqrt{3} \geq -\sqrt{3}$$

$$2 - 3 + \sqrt{3} \geq 2 - \beta\sqrt{3} = \alpha \geq 2 - \sqrt{3}$$

soit $2 - \sqrt{3} \leq \alpha \leq \sqrt{3} - 1$ ce qui assure (1) à fortiori.

* Si $P(\beta)$ est donné :

- Si $\sqrt{3} - 1 \leq \beta \leq 1$, il existe un unique triangle de (T) construit sur P.
- Si $\beta < \sqrt{3} - 1$, il n'y en a pas.

<u>NB</u> : Le cas $\beta = 1$ est celui traité en III.A.

d) Si MNP est un triangle de (T) :

M est d'affixe $\alpha = 2 - \beta\sqrt{3}$

P " $i\beta$

N " $z_N = 1 + i(\sqrt{3} - \beta)$ (en remplaçant α par $2 - \beta\sqrt{3}$ dans l'expression de z_N du II.B.2.a)

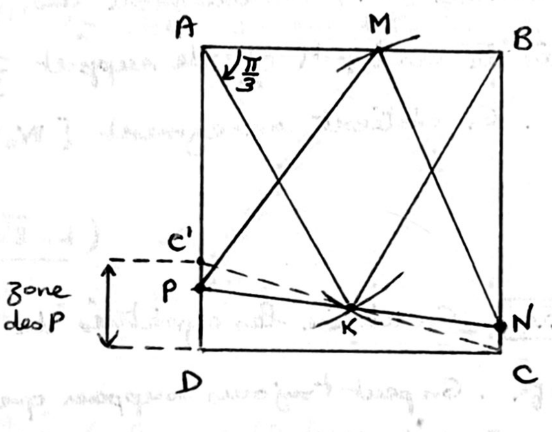
* Le milieu K de [NP] est d'affixe $z_K = \dfrac{i\beta + [1 + i(\sqrt{3} - \beta)]}{2} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

K est donc indépendant de β.

* Le triangle ABK est isocèle en A (car $AK = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right| = AB = 1$) et $\widehat{\vec{AB}, \vec{AK}} = \frac{\pi}{3}$, il sera donc <u>équilatéral</u>.

* Construction d'un triangle de (T)

On trace K à l'intérieur du carré ABCD et tel que ABK soit équilatéral.
Si P est donné dans [C'D] (qui correspond à la condition $\sqrt{3}-1 \leq \beta \leq 1$), N sera le symétrique de P /à K. Il suffit alors de compléter le triangle équilatéral MNP au compas.



e) P décrit [C'D], N décrit le symétrique de [C'D] /à K, et M le segment inclus dans [AB] défini par $\underbrace{2-\sqrt{3}}_{\simeq 0,27} \leq \alpha \leq \underbrace{\sqrt{3}-1}_{\simeq 0,73}$, que l'on peut déterminer géométriquement en faisant les constructions correspondant à P = D puis N = C.

lieu des points M
A W M T B
lieu des cdg
N
← lieu des points N
K
P
lieu des points P
D C

β) Les centres de gravités des triangles de (T) se trouve au $\frac{1}{3}$ de la base K de la médiane (MK). L'ensemble des c.d.g. sera donc l'image par l'homothétie de centre K et de rappot $\frac{1}{3}$ du segment [WT] de la figure précédente. On obtient un segment $[W_0T_0]$ parallèle à [AB].

III. B.3.a On utilise les symétries du III.B.1.b et la construction du III.B.2.e et β. On peut toujours supposer que S est sur [AD].

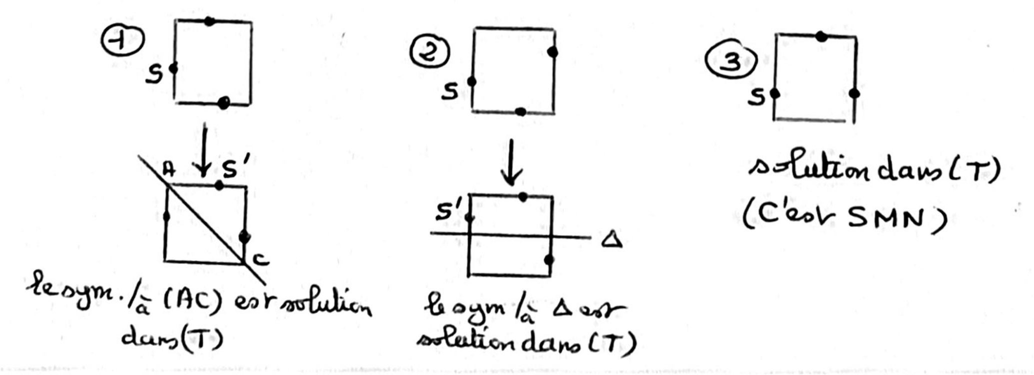
A S' M_1 M B
S
M'
N'
N
D S' N_1 C

(fig.2)

Cas où $AS \geq \sqrt{3}-1$

(α•) Cas où $AS \geq \sqrt{3}-1$ (ie $\beta \geq \sqrt{3}-1$) : Il existe un seul triangle SMN de (T) avec $M \in [AB]$ et $N \in [BC]$ (en rouge sur la figure ci-dessus)

Toutes les solutions sont dans les 3 cas :



Le cas ② s'avère impossible. Le cas ① permet de construire S', puis S'M'N' et le symétrique SM_1N_1 de S'M'N' /à (AC) qui est solution.
<u>Il y a 2 solutions</u>.

(β•) <u>Cas où AS < $\sqrt{3}-1$ (ie $\beta < \sqrt{3}-1$)</u>

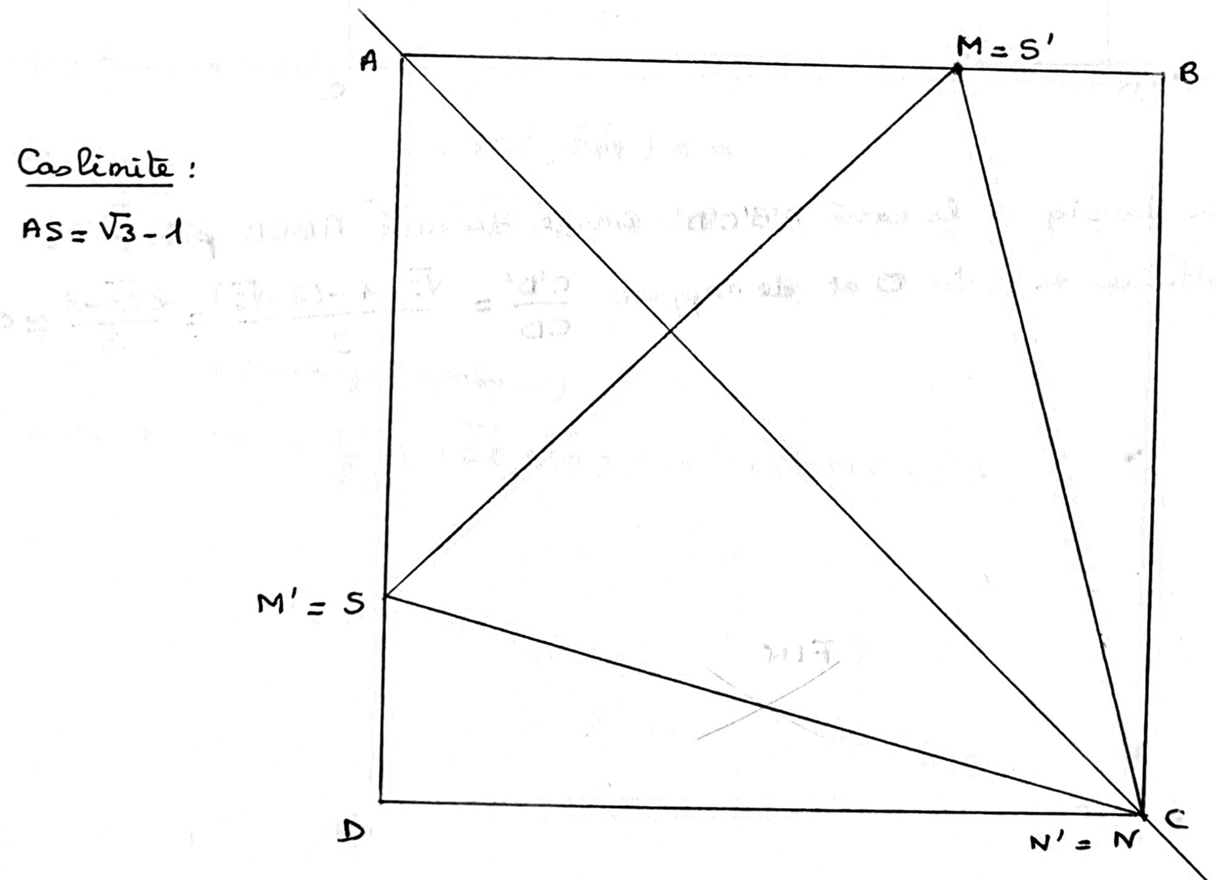
On se ramène au cas (α•) :

- si AS ≤ $2-\sqrt{3}$, par symétrie /à la médiatrice Δ de [AD]
- si $2-\sqrt{3}$ < AS < $\sqrt{3}-1$, par symétrie /à (AC)

On obtient chaque fois les symétriques S' de S, on construit les 2 triangles de sommet S' solution en s'inspirant de (α•) puis on trace les symétriques de ces triangles /à Δ ou (AC) suivant le cas.

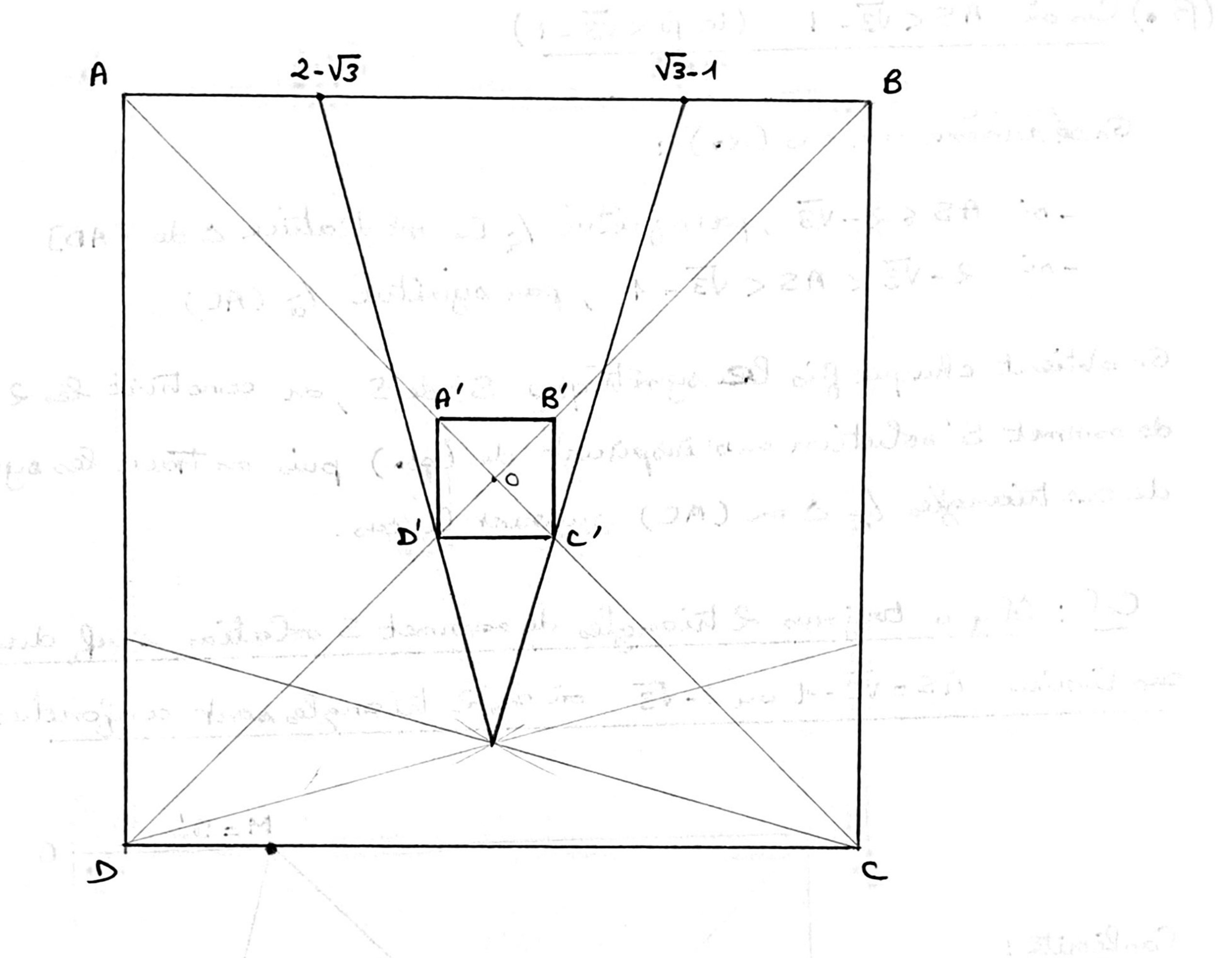
<u>Ccl</u> : <u>Il y a toujours 2 triangles de sommet S solution sauf dans les cas limites AS = $\sqrt{3}-1$ ou $2-\sqrt{3}$ où ces 2 triangles sont confondus</u>.

<u>Cas limite</u> :
AS = $\sqrt{3}-1$



<u>NB</u> : C'est le cas de figure envisagé au III.A.

III.B.3.b Vu III.B.1.b, il suffit de reproduire le lieu des cdg des triangles (T) (II.B.2.e) et de compléter par symétrie /à aux diagonales et /à la médiatrice Δ de [AD] :



Le lieu des cdg est le carré A'B'C'D' image du carré ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{C'D'}{CD} = \frac{\sqrt{3}-1-(2-\sqrt{3})}{3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \simeq 0{,}18$.

Complément : Précisions concernant l'équivalence du I.B.4.a :

$$M \in (\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ dans le demi-plan de frontière } \Delta_{AB} \text{ contenant } B \\ M \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \Delta_{AC} \quad \text{"} \quad C \end{cases}$$

($\Rightarrow$) Si $M \in (\gamma)$, supposons par l'absurde que M appartienne au ½-plan de frontière Δ_{AB} contenant A. L'arc de cercle $\widehat{BM}$ inclus dans (γ) relie de façon continue un point B du ½-plan de frontière Δ_{AB} contenant B, au point M situé dans l'autre ½-plan. Le théorème de passage des douanes montre que $\widehat{BM}$ coupe Δ_{AB} en N. On aurait :

* $-\frac{2\pi}{3} = (\vec{OC}, \vec{OB}) < (\vec{OC}, \vec{OM}) < (\vec{OC}, \vec{ON}) < 0$
(avec des mesures principales d'angles de vecteurs)

* $N \in \Delta_{AB} \setminus \{C\} \Rightarrow (\vec{OC}, \vec{ON}) = 0 \quad (\pi)$

ce qui est incompatible.

($\Leftarrow$) Réc, on traduit l'appartenance à ces 2 demi-plans par

$$\begin{cases} -\pi < (\vec{OC}, \vec{OM}) < 0 \\ 0 < (\vec{OB}, \vec{OM}) < \pi \end{cases} \Rightarrow 0 < (\vec{OB}, \vec{OC}) + (\vec{OC}, \vec{OM}) < \pi$$

$$\Rightarrow -\frac{2\pi}{3} < (\vec{OC}, \vec{OM}) < \frac{\pi}{3}$$

(ce sont des mesures principales...)

On en déduit $-\frac{2\pi}{3} < (\vec{OC}, \vec{OM}) < 0$ ie $M \in (\gamma)$. □

FIN

Enoncé de la Première Composition du Capes Interne 1993

Dans tout le problème les polynômes considérés sont des polynômes à coefficients réels, les fonctions considérées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

PREMIÈRE PARTIE

Polynômes d'interpolation de Lagrange

I. x_1 et x_2 sont deux réels distincts donnés. On supposera $x_1 < x_2$.

1. Déterminer les deux polynômes du premier degré P_1 et P_2 tels que :

$$P_1(x_1) = 1 \qquad P_1(x_2) = 0$$
$$P_2(x_1) = 0 \qquad P_2(x_2) = 1$$

Application numérique : $x_1 = 1, x_2 = 2$. Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions $x \longmapsto P_1(x)$, $x \longmapsto P_2(x)$.

2. Montrer que les deux polynômes P_1 et P_2 sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel des polynômes.
Soit $\mathscr{P}_1$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est au plus 1. Quelle est la dimension de $\mathscr{P}_1$?
Prouver que P_1 et P_2 constituent une base de $\mathscr{P}_1$.

3. Soit un polynôme P élément de $\mathscr{P}_1$. Montrer qu'il existe des nombres réels a et b uniques tels que $P = a\,P_1 + b\,P_2$.
Déterminer a et b à l'aide des valeurs de P en x_1 et en x_2.

4. En déduire que, étant donné deux couples de réels (x_1, y_1), (x_2, y_2) où x_1 et x_2 sont distincts, il existe un polynôme P et un seul dont le degré est au plus 1 tel que $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$.
Donner son écriture dans la base (P_1, P_2).

II. Dans cette question, x_1, x_2, x_3 sont trois nombres réels donnés deux à deux distincts. On supposera $x_1 < x_2 < x_3$.

1. *a.* Déterminer le polynôme P_1 du second degré tel que :

$$P_1(x_1) = 1 \qquad P_1(x_2) = P_1(x_3) = 0$$

[on remarquera d'abord qu'il est divisible par le produit $(x - x_2)(x - x_3)$].

b. Déterminer de même les polynômes P_2 et P_3 du second degré tels que :

$$P_2(x_2) = 1 \qquad P_2(x_1) = P_2(x_3) = 0$$
$$P_3(x_3) = 1 \qquad P_3(x_1) = P_3(x_2) = 0$$

c. Application numérique : $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions $x \longmapsto P_1(x)$, $x \longmapsto P_2(x)$, $x \longmapsto P_3(x)$.

2. Montrer que les trois polynômes P_1, P_2, P_3 sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel des polynômes.
Soit $\mathscr{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est au plus 2. Quelle est la dimension de $\mathscr{P}_2$?
Prouver que P_1, P_2, P_3 constituent une base de $\mathscr{P}_2$.

3. Soit un polynôme P élément de $\mathscr{P}_2$. Montrer qu'il existe des nombres a, b, c uniques tels que $P = a\,P_1 + b\,P_2 + c\,P_3$.

Déterminer a, b, c à l'aide des valeurs de P en x_1, x_2, x_3.

4. En déduire que, étant donné trois couples de réels (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) où x_1, x_2, x_3 sont deux à deux distincts, il existe un polynôme P et un seul dont le degré est au plus 2 tel que $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $P(x_3) = y_3$. Donner son écriture dans la base (P_1, P_2, P_3).

III. *Généralisation.*

1. Dans cette question, $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n, x_{n+1}$ sont $(n + 1)$ réels deux à deux distincts. Montrer qu'on peut leur associer $(n + 1)$ polynômes de degré n, $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n, P_{n+1}$ tels que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n, n + 1$,

$$P_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n, n + 1).$$

δ_{ij} est appelé symbole de Kronecker. Ces polynômes seront dits fondamentaux.

2. En s'inspirant des considérations développées dans les cas $n = 1$ et $n = 2$ (cf. questions I et II) montrer que, étant donné $(n + 1)$ couples de réels (x_j, y_j) où les x_j sont deux à deux distincts, il existe un polynôme P et un seul dont le degré est au plus n vérifiant, pour tout $j = 1, 2, \ldots, n, n + 1$, $P(x_j) = y_j$.

DEUXIÈME PARTIE

Approximations d'une fonction

En choisissant $y_j = f(x_j)$ lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les réels x_j, le résultat obtenu dans la première partie à la question III.2. permet de définir le polynôme d'interpolation de f, dont le degré est au plus n, associé aux $(n + 1)$ points x_j deux à deux distincts. Il sera noté P_f, ou plus simplement P si aucune confusion n'est à craindre.

Dans les cas $n = 1$ et $n = 2$, on se propose d'écrire ce polynôme P_f à l'aide des polynômes fondamentaux et de fournir un majorant de l'erreur commise en remplaçant dans l'intervalle I la fonction f par le polynôme P_f.

I. ***Cas n = 1.***

1. *Étude d'un exemple.*

On considère la fonction f définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$f(x) = x^2$$

et les nombres réels $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$, $\qquad x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

a. Écrire le polynôme P d'interpolation de f, du premier degré, associé aux valeurs x_1 et x_2.

b. Dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm), tracer la courbe (C) représentant la fonction f et la droite D représentant la fonction polynôme P.

Préciser le point de (C) où la tangente (T) à (C) a pour pente 1.

A étant le point de (C) de coordonnées (1, 1), montrer que la droite (D) est l'axe de la bande limitée par les droites (OA) et (T).

c. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - P(x)$. En déduire un majorant de $|f(x) - P(x)|$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2. *Étude générale.*

On considère une fonction f définie et deux fois continûment dérivable sur le segment $[a, b]$ x_1 et x_2 sont deux nombres réels distincts donnés.
On supposera $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$.

a. Écrire le polynôme d'interpolation P de f du premier degré associé aux valeurs x_1 et x_2.

b. Soit x_0 un nombre réel fixé de $[a, b]$, distinct de x_1 et de x_2.
On pose :

$$k_0 = \frac{f(x_0) - \mathrm{P}(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

Soit, par ailleurs, la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \mathrm{P}(x) - k_0(x - x_1)(x - x_2).$$

i. Montrer que φ admet au moins trois zéros sur $[a, b]$.
Montrer que φ' admet au moins deux zéros sur $[a, b]$.

ii. En déduire qu'il existe un nombre réel ξ_0 de $[a, b]$ tel que $\varphi''(\xi_0) = 0$.

iii. Exprimer simplement k_0 à l'aide de f'' et de ξ_0.

iiii. Montrer que, pour tout x_0 de $[a, b]$, distinct de x_1 et de x_2, il existe un réel ξ_0, pouvant dépendre de x_0, tel que :

$$f(x_0) - \mathrm{P}(x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2).$$

c. Déduire de ce qui précède que, pour tout x de $[a, b]$, il existe un réel ξ, pouvant dépendre de x, tel que :

$$f(x) - \mathrm{P}(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_1)(x - x_2).$$

d. Soit $\mathrm{M} = \sup_{[a,b]} |f''|$. Montrer que, pour tout x de $[a, b]$,

$$|f(x) - \mathrm{P}(x)| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2} |(x - x_1)(x - x_2)|.$$

e. Étudier les variations de la fonction : $x \longmapsto (x - x_1)(x - x_2)$ sur $[a, b]$.
Conclure en donnant un majorant de $|f(x) - \mathrm{P}(x)|$ sur $[a, b]$.

II. *Cas $n = 2$.*

1. *Étude d'un exemple.*

On considère la fonction f définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$f(x) = x^3$$

et les nombres réels $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1$.

a. Écrire le polynôme d'interpolation P de f du second degré associé aux valeurs x_1, x_2, x_3.

b. Dans un même repère orthonormé (unité graphique : 10 cm), représenter la fonction f et la fonction polynôme P.

c. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :

$$g(x) = f(x) - \mathrm{P}(x).$$

En déduire un majorant de $|f(x) - \mathrm{P}(x)|$ sur $[0, 1]$.

2. *Étude générale.*

On considère une fonction f définie et trois fois continûment dérivable sur le segment $[a, b]$. x_1, x_2, x_3 sont trois nombres réels donnés deux à deux distincts. On supposera $a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b$.

a. Écrire le polynôme P d'interpolation de f du second degré associé aux valeurs x_1, x_2, x_3.

b. Soit x_0 un nombre réel fixé de $[a, b]$, distinct de x_1, x_2 et x_3. On pose :

$$k_0 = \frac{f(x_0) - \mathrm{P}(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} .$$

Soit, par ailleurs, la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \mathrm{P}(x) - k_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

i. Montrer que φ admet au moins quatre zéros sur $[a, b]$.

ii. Montrer que φ' admet au moins trois zéros sur $[a, b]$.
Montrer que φ'' admet au moins deux zéros sur $[a, b]$.
En déduire qu'il existe un nombre réel ξ_0 de $[a, b]$ tel que $\varphi'''(\xi_0) = 0$.

iii. Exprimer simplement k_0 à l'aide de f''' et de ξ_0.

iiii. Montrer que, pour tout x_0 de $[a, b]$, distinct de x_1, x_2, x_3, il existe un réel ξ_0 de $[a, b]$ pouvant dépendre de x_0, tel que :

$$f(x_0) - \mathrm{P}(x_0) = \frac{1}{6} f'''(\xi_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3).$$

c. Déduire de ce qui précède que, pour tout x de $[a, b]$, il existe un réel ξ, pouvant dépendre de x, tel que :

$$f(x) - \mathrm{P}(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

d. Soit $\mathrm{M} = \sup\limits_{[a, b]} | f''' |$. Montrer que, pour tout x de $[a, b]$,

$$| f(x) - \mathrm{P}(x) | \leqslant \frac{\mathrm{M}}{6} |(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|.$$

e. On suppose désormais que $x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$, $x_3 = b$. On se propose, pour préciser la majoration précédente, de déterminer $\sup\limits_{[a, b]} |(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|$.

On pose $h = x_3 - x_1$.

i. Déterminer une fonction u du premier degré telle que, si l'on pose $t = u(x)$, on ait :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = h^3 t \left(t - \frac{1}{2}\right)(t - 1).$$

(On peut se servir d'un polynôme d'interpolation du premier degré).

ii. Étudier sur l'intervalle $[0, 1]$ la fonction $t \longmapsto t\left(t - \dfrac{1}{2}\right)(t - 1)$.

En déduire la borne supérieure de $\left| t\left(t - \dfrac{1}{2}\right)(t - 1)\right|$ sur $[0, 1]$.

iii. Conclure en donnant un majorant de $| f(x) - \mathrm{P}(x) |$ sur $[a, b] = [x_1, x_3]$, majorant faisant intervenir M et h.

TROISIÈME PARTIE

Équation différentielle avec conditions aux limites

On envisage le problème suivant dit « problème aux limites » sur le segment $[0, 1]$.

Soit une fonction numérique a continue sur le segment $[0, 1]$, et un nombre réel c. Le problème aux limites considéré, noté E_a, consiste à trouver une solution u de l'équation différentielle du second ordre sur $[0, 1]$

$$u''(x) - a(x)\,u(x) = 0$$

vérifiant les conditions, dites conditions limites,

$$u(0) = c, \qquad u'(1) = 0.$$

Dans une première étape, on examinera le cas où la fonction a est constante. Dans une deuxième étape, on dégagera une méthode d'approximation utilisant les résultats de la deuxième partie.

I. *Résolution de E_a quand a est une fonction constante.*

1. Résoudre le problème E_0 correspondant au cas où a est la fonction nulle.

2. Résoudre le problème E_{ω^2} correspondant au cas où a est la fonction constante $x \mapsto \omega^2$, ω désignant un réel donné strictement positif.

3. Résoudre le problème $E_{-\omega^2}$ correspondant au cas où a est la fonction constante $x \mapsto -\omega^2$, ω désignant un réel donné strictement positif. On discutera suivant les valeurs de ω.

II. *Méthode d'approximation de E_a.*

Dans ce qui suit on admettra l'existence et l'unicité d'une solution de E_a si la fonction a est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$.

On suppose désormais que la fonction a est trois fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ et telle que, pour tout x élément de $[0, 1]$, $0 < a(x) < 2$. Le problème E_a admet donc une solution et une seule sur $[0, 1]$ qui n'est pas la fonction nulle si le nombre donné c n'est pas nul, ce qui sera supposé dans toute la suite.

Il n'est pas possible en général d'expliciter la solution de E_a. On se propose d'utiliser une approximation de a par une fonction b polynomiale par intervalle et de fournir un majorant de l'erreur commise en résolvant E_b au lieu de E_a.

On pose pour une fonction f continue sur $[0, 1]$:

$$\|f\| = \sup_{[0,1]} (|f(x)|).$$

Montrer que $\|a\| < 2$.

1. *Approximation de la fonction a.*

   Soit $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, $(n+1)$ points de $[0, 1]$ définis par $x_0 = 0, \ldots,\quad x_i = \dfrac{i}{n}, \ldots,\quad x_n = 1$.

   Par ailleurs, on considère pour $i = 0, \ldots, n-1$, $\quad z_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

   a. Montrer qu'il existe une fonction b, polynomiale du second degré sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, telle que :

   $$b(x_i) = a(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$
   $$b(z_i) = a(z_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

   Montrer que b est continue sur $[0, 1]$.

   b. Soit b_i la restriction de b à $[x_i, x_{i+1}]$. En utilisant la question II.2.*e*. de la deuxième partie, donner un majorant de l'erreur $\sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} (|a(x) - b_i(x)|)$. En déduire un majorant de l'erreur $\|a - b\|$.

c. Déduire de ce qui précède et du fait que a est à valeurs strictement positives que, pour n assez grand, la fonction b construite ci-dessus est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$.

d. Déduire de ce qui précède et du fait que $\| a \| < 2$ que, pour n assez grand, la fonction b vérifie $\| b \| < 2$.

Les deux conditions sur n définies par *c.* et *d.* seront supposées réalisées par la suite.

2. *Étude d'une approximation de* E_a.

a. On désigne par v la solution du problème E_b. v vérifie donc :

$$\begin{cases} v'' - b\,v = 0 & \text{sur } [0, 1] \\ v(0) = c \\ v'(1) = 0 \,. \end{cases}$$

Justifier l'existence et l'unicité de v. On ne cherchera pas à l'expliciter.
Pour tout x élément de $[0, 1]$ on pose :

$$\psi(x) = \int_0^x \left[\int_1^t b(\theta)\, v(\theta)\, \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}t \,.$$

Calculer $\psi'(x)$, $\psi''(x)$. En déduire que, pour tout x élément de $[0, 1]$, $v(x) = \psi(x) + c$.

b. Montrer que, pour tout x élément de $[0, 1]$,

$$| v(x) | \leqslant \| b \| \, \| v \| \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + | c | \,.$$

En déduire l'existence d'un nombre strictement positif k_1, indépendant de n, tel que $\| v \| \leqslant k_1$.

3. *Comparaison de u et de v*.

a. u et v étant les solutions respectives de E_a et de E_b, montrer que, pour tout x élément de $[0, 1]$,

$$u(x) - v(x) = \int_0^x \left[\int_1^t (a(\theta)\, u(\theta) - b(\theta)\, v(\theta))\mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}t \,.$$

b. En déduire qu'il existe un nombre strictement positif k_2, indépendant de n, tel que :

$$\| u - v \| \leqslant k_2 \, \| a - b \| \,.$$

On exprimera k_2 à l'aide de k_1 et de $\| a \|$.

c. En utilisant la question II.1.*b.* de cette troisième partie, montrer qu'il existe un réel k positif indépendant de n, tel que :

$$\| u - v \| \leqslant \frac{k}{n^3} \,.$$

CAPES interne de Mathématiques
session 1993
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag28e]

Thème du problème : cercles tangents (géométrie plane).

Tous les cercles donnés ont un rayon non nul.

PREMIÈRE PARTIE

A

Cercles dont la distance des centres égale la somme des rayons.

On considère deux cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ de centres respectifs A et B, de rayons respectifs r_1 et r_2 tels que $AB = r_1 + r_2$.

Démontrer que ces cercles ont un seul point commun K, situé sur le segment [AB], et que, hormis le point K, tout point de l'un des cercles est extérieur au disque déterminé par l'autre.

Montrer que $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ admettent en K la même tangente.

On dit que de tels cercles sont tangents extérieurement, ou que le contact de ces cercles tangents est extérieur.

B

Cercles dont la distance des centres égale la valeur absolue de la différence des rayons.

On considère deux cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ de centres respectifs A et B, de rayons respectifs distincts r_1 *et* r_2 tels que $AB = |r_1 - r_2|$.

Démontrer que ces cercles ont un seul point commun K, situé sur la droite (AB), et que tout point du cercle de plus petit rayon est contenu dans le disque déterminé par le cercle de plus grand rayon.

Montrer que $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ admettent en K la même tangente.

On dit que deux tels cercles sont tangents intérieurement, ou que le contact de ces cercles tangents est intérieur.

C

Homothéties qui échangent deux cercles tangents.

1. Soit deux cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ tangents en K, de centres respectifs A et B, de rayons respectifs r_1 *et* r_2 distincts.

   Montrer qu'il existe une homothétie de centre K transformant $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}_B$. Préciser son rapport.

   Montrer qu'il existe une autre homothétie transformant $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}_B$. Préciser son rapport et construire son centre T.

2. Que peut-on dire si les deux rayons r_1 et r_2 sont égaux ?

D

Étude sur un exemple de trois cercles tangents deux à deux.

On considère un triangle ABC dont les côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ sont respectivement 7 cm, 5 cm, 6 cm.

Soit trois cercles $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A, B, C et de rayons respectifs r_1, r_2, r_3 avec $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 3$ cm.

1. Démontrer que ces cercles sont tangents extérieurement deux à deux. On note I le point de contact de $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$, J celui de $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_A$, K celui de $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$.

2. Quel est le rapport de l'homothétie de centre K qui transforme $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}_B$?

3. La droite (IK) recoupe le cercle $\mathscr{C}_A$ au point X ; la droite (JI) recoupe le cercle $\mathscr{C}_B$ en Y ; la droite (YK) recoupe le cercle $\mathscr{C}_A$ en Z.

   M est un point de $\mathscr{C}_A$ distinct de K, X, Z. La droite (MK) recoupe $\mathscr{C}_B$ en N, la droite (NI) recoupe $\mathscr{C}_C$ en P, la droite (PJ) recoupe $\mathscr{C}_A$ en Q. Montrer que M et Q sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathscr{C}_A$.

   Étudier successivement les cas particuliers où M est l'un des trois points K, X, Z.

DEUXIÈME PARTIE

Construction de trois cercles tangents deux à deux

Le but de cette partie est la construction de trois cercles tangents deux à deux à partir de la donnée de leurs centres : trois points non alignés A, B, C. Ces trois points constituent un triangle dont les côtés sont $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

A

Préliminaire.

Démontrer que lorsque trois cercles, de centres non alignés, sont tangents deux à deux, il ne peut s'agir que de l'un des cas suivants :

- soit les trois contacts sont extérieurs ;
- soit deux contacts sont intérieurs et le troisième extérieur.

B

Étude du cas où les trois contacts sont extérieurs.

1. *Étude de conditions nécessaires.*

   Soit trois cercles $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_C$, de centres respectifs A, B, C non alignés, de rayons respectifs r_1, r_2, r_3. On les suppose tangents extérieurement deux à deux, $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ en I, $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_A$ en J, $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ en K.

   Pour réaliser une figure d'étude uniquement, on peut prendre, comme à la première partie, $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm avec $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 3$ cm.

   Les perpendiculaires en I et J à (BC) et (CA) se coupent en Ω.

a. Justifier l'égalité $\Omega I = \Omega J$. En déduire que :

$$\Omega A^2 - KA^2 = \Omega B^2 - KB^2, \text{ puis que } \Omega A^2 - \Omega B^2 = KA^2 - KB^2.$$

Montrer que Ω et K sont sur une même perpendiculaire à la droite (AB).

b. Démontrer que Ω est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, I, J, K étant les points de contact avec les côtés.

2. *Construction.*

On donne trois points A, B, C non alignés. Construire trois cercles de centres respectifs A, B, C, tangents deux à deux extérieurement. Combien ce problème a-t-il de solutions ?

C

Étude du cas où un seul des trois contacts est extérieur.

1. *Étude de conditions nécessaires.*

Soit trois cercles $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A, B, C non alignés et de rayons respectifs r_1, r_2, r_3. On suppose que $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ sont tangents extérieurement en I, $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_A$ tangents intérieurement en J, $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ tangents intérieurement en K.

Une figure d'étude peut être obtenue avec $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm, $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 4$ cm.

Démontrer que I, J, K sont les points de contact avec les côtés du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle $\widehat{CAB}$.

2. *Construction.*

On donne trois points A, B, C non alignés. Construire trois cercles de centres respectifs A, B, C, tangents deux à deux, les deux derniers seuls ayant un contact extérieur. Combien ce problème a-t-il de solutions ?

TROISIÈME PARTIE

Quelques propriétés de la figure formée par trois cercles tangents deux à deux mettant en jeu les rayons

A

Cas où les trois contacts sont extérieurs.

Soit trois cercles $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A, B, C non alignés, de rayons respectifs r_1, r_2, r_3, tangents deux à deux extérieurement en I sur [BC], J sur [CA], K sur [AB].

Le triangle ABC de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ a pour demi-périmètre p.

1. Démontrer que $r_1 + r_2 + r_3 = p$ puis que $r_1 = p - a$, $r_2 = p - b$, $r_3 = p - c$.

2. En utilisant le barycentre G des points A, B, C respectivement affectés des coefficients r_2r_3, r_3r_1, r_1r_2, démontrer que les droites (AI), (BJ), (CK) sont concourantes.

B

Cas où un seul des trois contacts est extérieur.

Soit trois cercles $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A, B, C non alignés, de rayons respectifs r_1, r_2, r_3 tels que $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ soient tangents extérieurement en I, $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_A$ tangents intérieurement en J, $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ tangents intérieurement en K.

Le triangle ABC de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ a pour demi-périmètre p.

1. Démontrer que $r_1 = p$, $r_2 = p - c$, $r_3 = p - b$.

   Démontrer que $r_1 r_2 + r_1 r_3 - r_2 r_3 > 0$.

2. Démontrer que les droites (AI), (BJ), (CK) sont concourantes.

C

1. Soit un triangle ABC de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, de demi-périmètre p, d'aire s. Le cercle inscrit a pour centre Ω et pour rayon R, le cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{BAC}$ a pour centre Ω' et pour rayon R'.

   a. En reliant les aires des triangles ABC, ΩBC, ΩCA et ΩAB, montrer que $s = p\mathrm{R}$.

   b. Montrer que $s = (p - a)\mathrm{R}'$.

   c. On rappelle que dans le triangle ABC :

   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \qquad \text{et} \qquad 2s = bc\sin\widehat{A}.$$

   Établir que : $16s^2 = (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$.

   En déduire que : $s = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

2. On considère trois cercles $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A, B, C non alignés, de rayons respectifs r_1, r_2, r_3 tangents deux à deux.

   a. Montrer que, si les trois contacts sont extérieurs,

   $$\frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} + \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{\mathrm{R}^2}.$$

   b. Montrer que, si $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ ont seuls un contact extérieur,

   $$\frac{1}{r_2 r_3} - \frac{1}{r_3 r_1} - \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{\mathrm{R}'^2}.$$

QUATRIÈME PARTIE

Première étude, sur des cas particuliers, de la famille $\mathscr{F}$ des cercles tangents à deux cercles tangents donnés

Soit deux cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ tangents en un point K, de centres respectifs A et B, de rayons respectifs 3λ et λ où λ est un réel donné strictement positif.

A

Cas où $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ sont tangents intérieurement.

1. Soit O le milieu du segment [AB]. On choisit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel le point A a pour coordonnées $(\lambda, 0)$. A tout point M de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

   On considère l'ensemble E des points M du plan tels que :

   $$14\, z\bar{z} - z^2 - \bar{z}^2 = 48\,\lambda^2$$

($\bar{z}$ est le complexe conjugué de z).

Écrire l'équation cartésienne de E.

Montrer que E est une ellipse de centre O, de foyers A et B, dont on précisera les sommets et l'excentricité. Tracer E.

2. M étant un point quelconque de l'ellipse E, démontrer que $MA + MB = 4\lambda$.

   En déduire que M est le centre d'un cercle tangent à la fois à $\mathscr{C}_A$ et à $\mathscr{C}_B$.

3. Démontrer que l'ellipse E est l'ensemble des centres des cercles tangents intérieurement à $\mathscr{C}_A$ et tangents extérieurement à $\mathscr{C}_B$.

B

Cas où $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ sont tangents extérieurement.

1. Montrer que si M est le centre d'un cercle tangent extérieurement à $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, alors $MA - MB = 2\lambda$.
2. Montrer que si M est le centre d'un cercle tangent intérieurement à $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, alors $MB - MA = 2\lambda$.
3. En déduire que si M est le centre d'un cercle tangent à $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, les contacts étant de même nature, alors M est sur une hyperbole H, de foyers A et B, dont on précisera les sommets, l'excentricité, les asymptotes.
4. Tracer H.
5. Démontrer que l'hyperbole H est l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, les contacts étant de même nature.
6. On considère un repère orthonormal analogue à celui envisagé à la question A.1. de cette quatrième partie. A tout point M de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Trouver une relation entre z et $\bar{z}$ caractérisant les points de H.

CINQUIÈME PARTIE

Famille $\mathscr{F}$ des cercles tangents à deux cercles tangents donnés *(deuxième étude)*

A

Préliminaire : introduction de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

1. Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r, et un point M du plan. Une droite Δ passant par M coupe $\mathscr{C}$ en P et Q. On désigne par P' le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à P.

   Montrer que : $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MP} \cdot \overline{MP'}$.

   En déduire que ce nombre peut encore s'écrire $MO^2 - r^2$ et qu'il ne dépend pas de la sécante choisie. Ce nombre est appelé la puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$ et noté $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(M)$.

   Montrer que si M est extérieur au disque déterminé par $\mathscr{C}$ et si t désigne le point de contact d'une tangente à $\mathscr{C}$ issue de M, $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(M) = Mt^2$.

2. Préciser le signe de $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(M)$ suivant la position de M par rapport à $\mathscr{C}$.

B

Soit deux cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ tangents en un point K, de centres respectifs A et B, de rayons respectifs distincts r_1 et r_2. Soit T le centre de la deuxième homothétie h transformant $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}_B$.

1. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre ω tangent à $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ en deux points distincts U et V.

   a. En utilisant les homothéties de centre U transformant $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}$ et de centre V transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}_B$, montrer que U, V et T sont alignés.

   b. En introduisant le cercle circonscrit au triangle UVK, qui existe en général, et en appliquant les résultats obtenus dans la deuxième partie, montrer que $\overline{TU} \cdot \overline{TV} = TK^2$.

   En déduire que : $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(T) = TK^2$.

   Examiner le cas où ω est sur la droite (TK).

2. Réciproquement, soit Δ une droite passant par T coupant le cercle $\mathscr{C}_A$ en U_1 et U_2 supposés distincts. On désigne par V_1 et V_2 les images de U_1 et U_2 par l'homothétie h.

   Montrer que les droites (AU_1) et (BV_2) sont en général sécantes ; on appelle ω leur point d'intersection. Montrer que le cercle $\mathscr{C}$ de centre ω passant par U_1 est tangent aux deux cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, et que la puissance de T par rapport à $\mathscr{C}$ est TK^2.

   Examiner le cas où Δ est la droite (TK).

3. Caractérisation des cercles de la famille $\mathscr{F}$, famille des cercles tangents à $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ en des points distincts.

   Montrer qu'un cercle $\mathscr{C}$ appartient à $\mathscr{F}$ si et seulement si $\mathscr{C}$ est tangent à l'un des cercles $\mathscr{C}_A$ ou $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(T) = TK^2$.

   En déduire que par tout point de $\mathscr{C}_A$, autre que les points de contact des tangentes éventuelles à $\mathscr{C}_A$ passant par T, il passe un cercle tangent à $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$.

C

Soit trois cercles $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A, B, C non alignés et de rayons respectifs r_1, r_2, r_3 distincts deux à deux. On les suppose tangents deux à deux aux points respectifs K sur (AB), I sur (BC), J sur (CA). R, S, T sont les centres des autres homothéties transformant respectivement $\mathscr{C}_B$ en $\mathscr{C}_C$, $\mathscr{C}_C$ en $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}_B$.

1. Faire une figure soignée.

2. Justifier les alignements (de trois points) qui apparaissent, faisant intervenir des éléments de $\{I, J, K, R, S, T\}$.

CAPES interne 1993 de Mathématiques deuxième composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

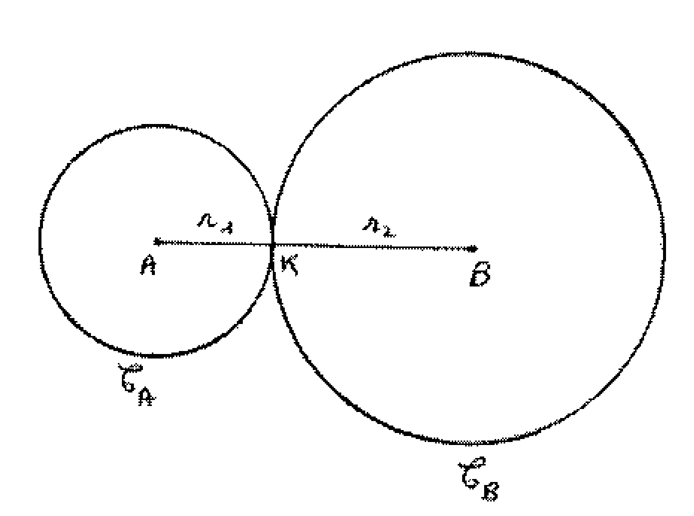
IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag28s] v1.00

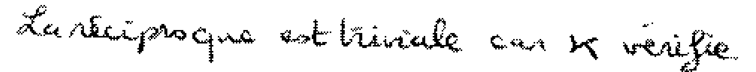
CAPES interne 1993, 2ème composition
"CERCLES TANGENTS"

I.A



* Si $M \in \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B$, alors $AM = r_1$ et $BM = r_2$ donc $AM + BM = AB$, qui entraîne $M \in [AB]$.
Ainsi $M \in [AB]$ et $AM = r_1$.
Comme il existe un unique point K de $[AB]$ tel que $AK = r_1$, on a prouvé :

$$M \in \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B \Rightarrow M = K$$


La réciproque est triviale car K vérifie

$$AK = r_1 \quad \text{et} \quad BK = AB - AK = r_2$$

ce qui implique $K \in \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B$.

NUCETTO VILLA 1994

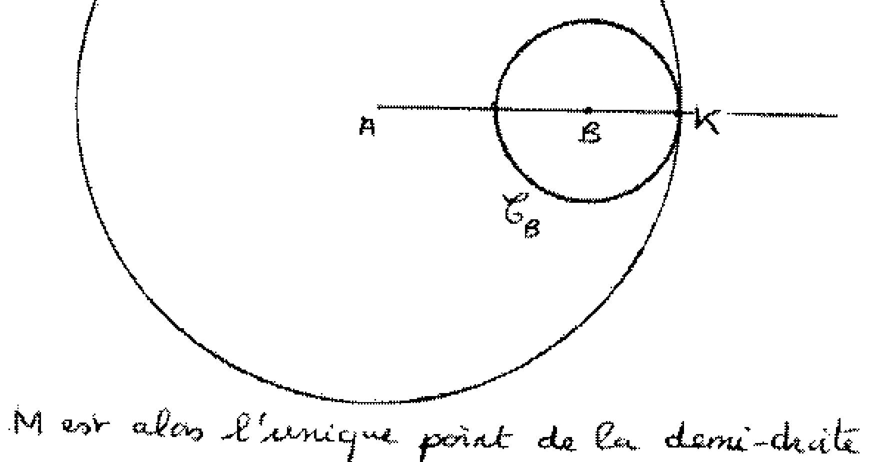
* Si $M \in \mathcal{C}_B \setminus \{K\}$, alors $M \notin [AB]$ et donc

$$AB < AM + BM$$
$$r_1 + r_2 < AM + r_2$$
$$r_1 < AM$$

ce qui prouve que tout point M de $\mathcal{C}_B \setminus \{K\}$ est extérieur au disque de frontière $\mathcal{C}_A$.

* La tangente en K à $\mathcal{C}_A$ est perpendiculaire au rayon $[AK]$, celle en K à $\mathcal{C}_B$ est perpendiculaire au rayon $[BK]$. Comme A, B, K sont alignés, ces 2 tangentes seront confondues.

I.B



Supposons par ex. $r_2 < r_1$.
Alors $AB = r_1 - r_2$

* Si $M \in \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B$, alors

$MA - MB = r_1 - r_2 = AB$

donc $MA = MB + AB$

ce qui entraîne $B \in [MA]$. M est alors l'unique point de la demi-droite $[AB)$ qui satisfait $MA = r_1$. Notons K ce point.

Réciproquement, on vérifie que K est commun aux 2 cercles : $K \in [AB)$ et $KA = r_1$ entraînent, puisque $AB = r_1 - r_2 < r_1$, que $B \in [AK]$ donc $AB + BK = AK$, soit $(r_1 - r_2) + BK = r_1$ et finalement $BK = r_2$, ie $K \in \mathcal{C}_B$.

* Si $M \in \mathcal{C}_B \setminus \{K\}$, B n'appartient pas au segment $[AM]$ donc

$$AM < AB + BM$$
$$AM < (r_1 - r_2) + r_2$$
$$AM < r_1$$

ce qui prouve que M est intérieur au disque de frontière $\mathcal{C}_A$.

* $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ auront encore la même tangente en K : la perpendiculaire à (AB) en K.

I.C.1

* K, A, B sont alignés et distincts de sorte qu'il existe une homothétie h de centre K transformant A en B. Son rapport est

$$k = \frac{\overline{KB}}{\overline{KA}} = \pm \frac{r_2}{r_1}$$

et $h(\mathcal{C}_A) = \mathcal{C}_B$ puisque l'image du cercle $\mathcal{C}_A$ par h est un cercle de centre $h(A) = B$, de rayon $|k| \cdot r_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdot r_1 = r_2$, ie le cercle $\mathcal{C}_B$.

* Rapport de h : C'est $k = \frac{\overline{KB}}{\overline{KA}}$, ce qui donne 2 rapports différents suivant le cas de figure :

① Si $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ sont tangents extérieurement : $k = -\frac{r_2}{r_1}$

② Si $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ sont tangents intérieurement : $k = \frac{r_2}{r_1}$

* Autre homothétie transformant $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}_B$:

On connait le résultat suivant

lemme : Soient $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ 2 cercles de centres resp. A et B distincts et de rayons resp. r_1 et r_2 distincts. Il existe exactement 2 homothéties transformant $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}_B$, l'une de rapport positif $\frac{r_2}{r_1}$, l'autre de rapport négatif $-\frac{r_2}{r_1}$.

preuve du lemme :

Si $h(\mathcal{C}_A) = \mathcal{C}_B$, alors $h(A) = B$ et si $M \in \mathcal{C}_A \setminus (AB)$, l'image M' de M par h sera telle que $(BM') \parallel (AM)$. M' sera l'un des 2 points N_1 et N_2 intersection de $\mathcal{C}_B$ et de la parallèle à (AM) passant par B. Notons N_1 celui des 2 points N_1, N_2 qui vérifie "$\vec{BN_1}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires et de même sens".

• Si $h(M) = N_1$, l'intersection Ω_1 de (MN_1) et (AB) est le centre de h, son rapport est $\frac{r_2}{r_1}$.

• Si $h(M) = N_2$, l'intersection Ω_2 de (MN_2) et (AB) est le centre de h, son rapport est $-\frac{r_2}{r_1}$.

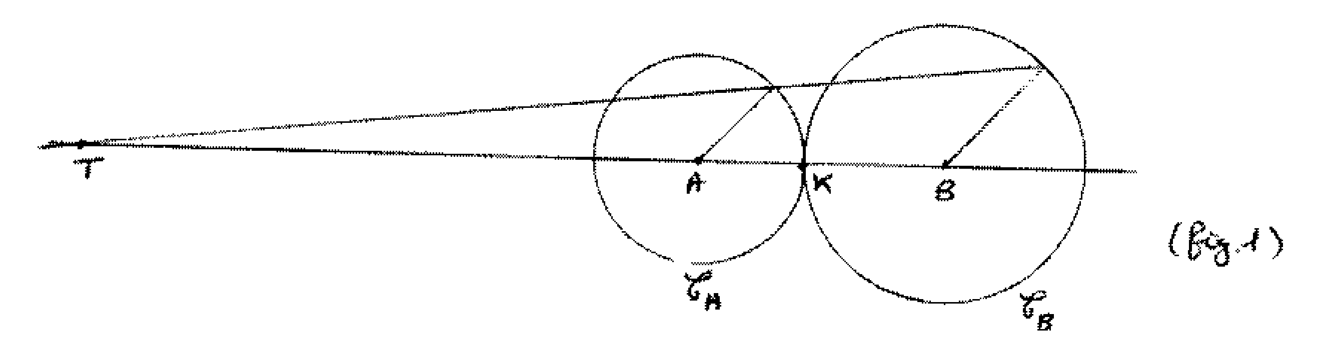
Réciproquement, les homothéties $h_{\Omega_1, \frac{r_2}{r_1}}$ et $h_{\Omega_2, -\frac{r_2}{r_1}}$ transforment bien $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}_B$.

CQFD

On utilise ce lemme dans chaque cas de figure pour construire T :

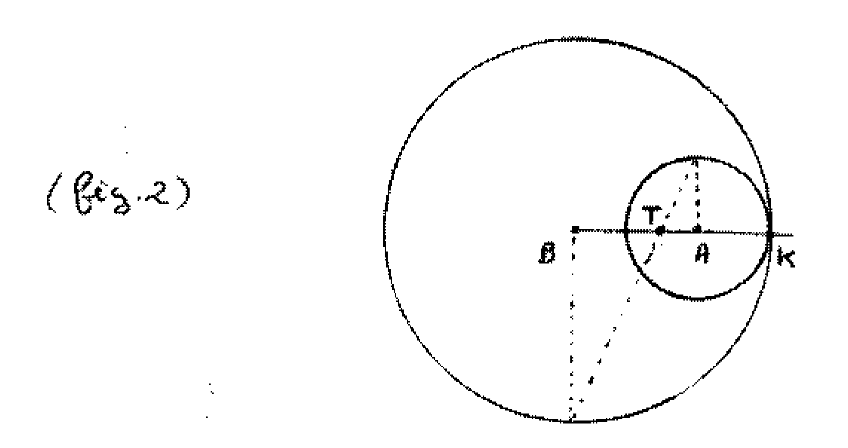
① Si $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ sont tangents extérieurement : l'autre homothétie h_T de centre T est de rapport $\frac{r_2}{r_1}$ et l'on a la (fig. 1) :

② Si $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ sont tangents intérieurement, on obtient la (fig. 2).



(fig. 1)

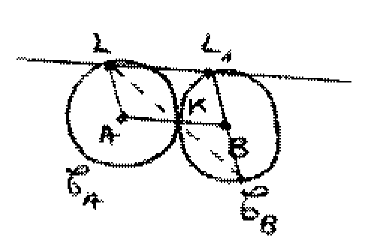
(fig. 2)



I.C.2 Soit $r_1 = r_2$.

<u>1^er cas</u> : $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_B$. Une homothétie h transformant $\mathcal{C}_A$ en lui-même sera de centre A et de rapport $\pm\frac{r_2}{r_1} = \pm 1$. Donc h sera soit l'identité, soit la symétrie par rapport au point A. Réc., ces 2 homothéties conviennent.

2e cas : $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ sont tangents extérieurement.



Une seule homothétie convient alors : la symétrie centrale /à K. En effet, le même raisonnement qu'en I.C.1 montre que si $h(\mathcal{C}_A)=\mathcal{C}_B$, alors $h(L)=L_1$ ou L_2 (figure ci-contre).

Comme $(AL)\parallel(BL_i)$ et $BL_i = AL$, l'un des 2 points L_i, disons L_1, donne forme à un parallélogramme ALL_1B. (LL_1) ne coupe pas (AB) et supprime l'une des 2 possibilités.

NB : il y a une translation (de vecteur $\vec{AB}$) qui transforme $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}_B$.

I.D.1

(fig. 3)

Il suffit de remarquer :

$AB = 6 = 2 + 4 = r_1 + r_2$

$BC = 7 = 3 + 4 = r_3 + r_2$

$CA = 5 = 2 + 3 = r_1 + r_3$

I.D.2 Ce rapport est $-\frac{KB}{KA} = -\frac{4}{2} = -2$.

I.D.3

* Posons

h_K = homothétie de centre K transformant $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}_B$, de rapport -2

h_I = " I " $\mathcal{C}_B$ en $\mathcal{C}_C$, " $-\frac{3}{4}$

h_J = " J " $\mathcal{C}_C$ en $\mathcal{C}_A$, " $-\frac{2}{3}$

La composée $h_J h_I h_K$ sera une homothétie-translation de rapport $(-2)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$ laissant $\mathcal{C}_A$ globalement invariant. D'après I.C.2, seules Id et la symétrie centrale s_A / A peuvent convenir, donc ici :

$$h_J h_I h_K = s_A$$

<u>NB</u> : On peut aussi conclure en notant que $h_J h_I h_K(A) = h_J h_I(B) = h_J(C) = A$, de sorte que A soit le centre de l'homothétie $h_J h_I h_K$ de rapport -1 ...

* <u>Montrer que M et Q sont diamétralement opposés revient à prouver que $s_A(M) = Q$</u>. On a

$$s_A(M) = h_J h_I h_K(M) = h_J h_I(N) = h_J(P) = Q$$

* <u>Cas particuliers</u> : L'énoncé suppose $M \notin \{K, X, Z\}$ pour que les droites (MK), (NI) et (PJ) soient bien définies. Dans le cas contraire, la construction proposée se généralise en utilisant les homothéties h_K, h_I et h_J. Ainsi :

a) Si $M = Z$, la construction donnera le point

$$h_J h_I h_K (Z) = h_J h_I (Y) = h_J (J) = J$$

diamétralement opposé à Z sur $\mathcal{C}_A$

b) Si $M = X$, on obtient

$$s_A(X) = h_J h_I h_K (X) = h_J h_I (I) = h_J (I)$$

c) Si $M = K$, on trouve

$$s_A(K) = h_J h_I h_K (K) = h_J h_I (K)$$

que l'on peut facilement dessiner sur la fig. 3.

II. A

* <u>1solution</u> : Il faut prouver que les 2 cas suivants sont impossibles :

(a) 1 contact intérieur et 2 extérieurs

(b) 3 contacts intérieurs

<u>Cas (a)</u> : Ce cas entraine

$$AB = |r_1 - r_2|$$
$$BC = r_2 + r_3$$
$$CA = r_3 + r_1$$

d'où :

$BC < CA + AB$

$r_2 + r_3 < r_3 + r_1 + |r_1 - r_2|$

$r_2 - r_1 < |r_1 - r_2|$

$AC < BC + AB$

$r_3 + r_1 < r_2 + r_3 + |r_1 - r_2|$

$r_1 - r_2 < |r_1 - r_2|$

et finalement :

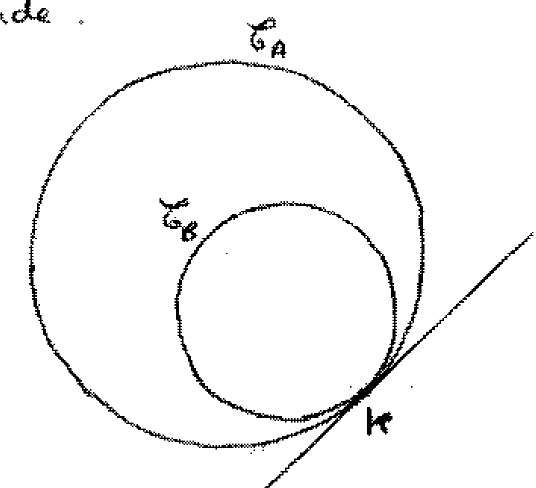
$$\text{Sup}(r_1 - r_2,\ r_2 - r_1) < |r_1 - r_2|$$

ce qui est absurde.

Cas (b) : S'il y avait 3 contacts intérieurs, on pourrait toujours supposer que $r_1 > r_2 > r_3$ et obtenir

$$AB = r_1 - r_2$$
$$BC = r_2 - r_3$$
$$CA = r_1 - r_3$$

qui entraine : $$CA < BC + BA$$
$$r_1 - r_3 < r_2 - r_3 + r_1 - r_2$$
$$r_1 < r_1 \quad \text{absurde.}$$



* 2ème solution :

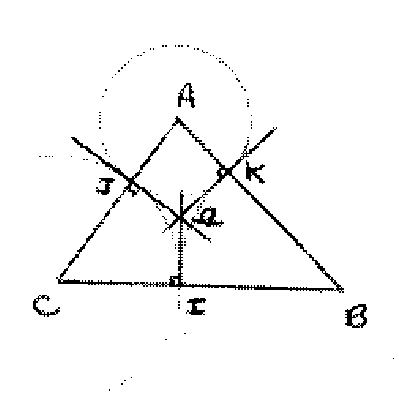
Supposons que $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ soient intérieurement tangents et que, par exemple, tous les points de $\mathcal{C}_B \setminus \{K\}$ soient intérieurs à $\mathcal{C}_A$ (cf. I.B).

Si $\mathcal{C}_C$ était extérieur à $\mathcal{C}_A$, le seul point de contact possible entre $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_A$ serait K(*). Les 3 cercles seraient tangents en K et leurs centres seraient alignés. C'est absurde.
Donc $\mathcal{C}_C$ est intérieur à $\mathcal{C}_A$.

Si $\mathcal{C}_C$ était intérieur à $\mathcal{C}_B$, le seul point de contact entre $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_A$ serait encore K, ce qui entraine une absurdité comme précédemment.
Donc $\mathcal{C}_C$ est extérieur à $\mathcal{C}_B$
CQFD

(*) Raisonner à nouveau par l'absurde : si $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_A$ admettaient un contact extérieur en L distinct de K, tous les points de $\mathcal{C}_A \setminus \{L\}$ serait à l'extérieur de $\mathcal{C}_C$, et comme les points de $\mathcal{C}_B \setminus \{K\}$ sont tous intérieurs à $\mathcal{C}_A$, tous les points de $\mathcal{C}_B$ seraient extérieurs à $\mathcal{C}_C$. Dans ce cas $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_B$ n'auraient aucun point commun, ce qui est à rejeter.

II.B.1.a



* Le th. de Pythagore donne

$$\Omega I^2 = C\Omega^2 - CI^2 = C\Omega^2 - CJ^2 = \Omega J^2$$

d'où $\Omega I = \Omega J$

* Toujours par Pythagore :

$$\begin{cases} \Omega A^2 - KA^2 = (\Omega J^2 + JA^2) - KA^2 = \Omega J^2 \\ \Omega B^2 - KB^2 = (\Omega I^2 + IB^2) - KB^2 = \Omega I^2 \end{cases}$$

d'où $\Omega A^2 - KA^2 = \Omega B^2 - KB^2$

puis $\Omega A^2 - \Omega B^2 = KA^2 - KB^2$. (*)

* En utilisant Chasles dans (*) :

$$(\vec{\Omega K} + \vec{KA})^2 - (\vec{\Omega K} + \vec{KB})^2 = KA^2 - KB^2$$

$$2\,\vec{\Omega K}.\vec{KA} - 2\,\vec{\Omega K}.\vec{KB} = 0$$

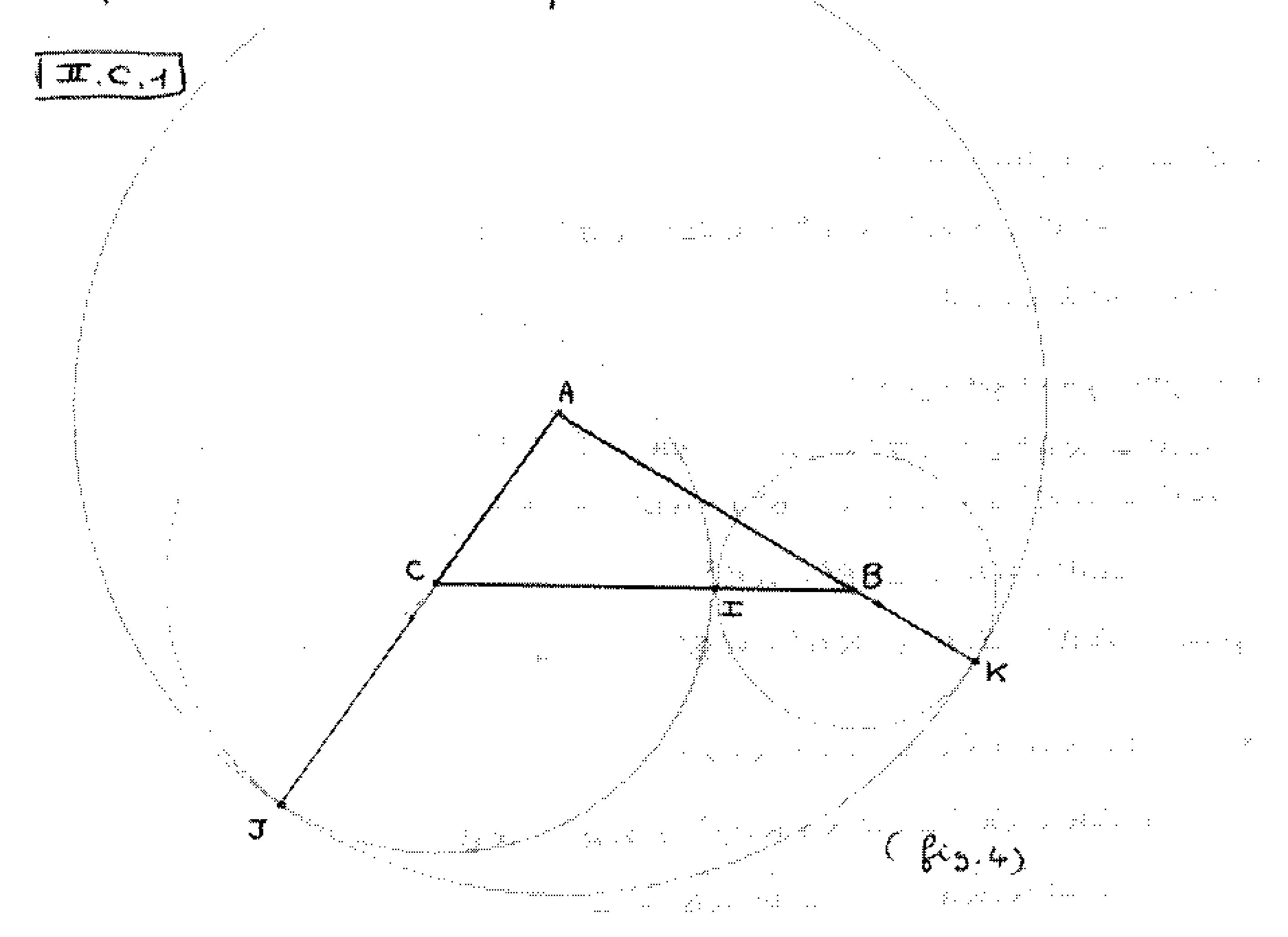
$$\vec{\Omega K}.\vec{BA} = 0$$

Ω sera sur la perpendiculaire à (AB) passant par K.

II.B.1.b On a déjà prouvé que $\Omega I = \Omega J$, et le même argument prouve que $\Omega I = \Omega K$. Ω est donc le centre du cercle inscrit au triangle ABC, et les points de contact sont bien I, J, K.

II.B.2 Il suffit de construire le centre Ω du cercle inscrit à ABC (ie le point d'intersection des bissectrices des angles du triangle ABC), puis de projeter orthogonalement Ω sur (AB), (BC), (AC) resp. pour obtenir K, I, J resp.
D'après Pythagore, $BI = BK$, $CI = CJ$ et $AJ = AK$, ce qui permet d'affirmer que les cercles $\mathcal{C}(A, AK)$, $\mathcal{C}(B, BI)$, $\mathcal{C}(C, CJ)$ sont tangents extérieurement.
Le problème admet cette unique solution !

II.C.1



(fig. 4)

On reproduit la démonstration de II.B.1 : si Ω' désigne l'intersection des perpendiculaires à (BC) en I, et à (AC) en J, on prouve que $\Omega' I = \Omega' J$ grâce à Pythagore, puis que Ω' appartient à la perpendiculaire en K à (AB). Par suite $\Omega' I = \Omega' J = \Omega' K$ et Ω' est le centre du cercle exinscrit à ABC dans l'angle $\widehat{CAB}$.

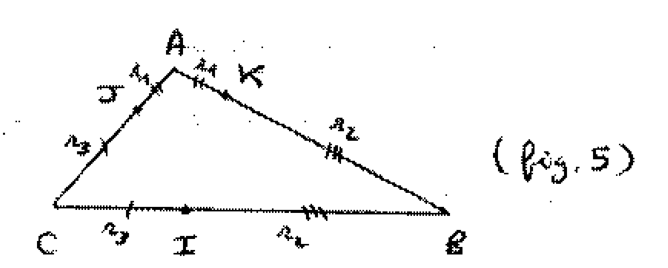
II.C.2 On construit le centre du cercle exinscrit à ABC dans $\widehat{CAB}$, soit Ω', puis on détermine I, J et K de la fig. 4 en projetant orthogonalement Ω' sur les côtés de ABC. On termine comme en II.B.2. Il y a autant de solutions que de centres de cercles exinscrits au triangle ABC, ie 3.

III.A.1

$$\begin{cases} a = r_2 + r_3 \\ b = r_1 + r_3 \\ c = r_1 + r_2 \\ 2p = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \quad p = r_1 + r_2 + r_3$$

puis : $\begin{cases} r_1 = p - (r_2 - r_3) = p - a \\ r_2 = p - (r_1 + r_3) = p - b \\ r_3 = p - (r_1 + r_2) = p - c \end{cases}$

III.A.2



(fig. 5)

J est le barycentre de $A(r_3)$, $C(r_1)$ puisque $r_3 \vec{JA} + r_1 \vec{JC} = \vec{0}$.

Soit G le barycentre de $A(r_2 r_3)$, $B(r_3 r_1)$, $C(r_1 r_2)$. Par associativité du barycentre, G sera le barycentre de $g\,(r_2 r_3 + r_1 r_2)$, $B(r_3 r_1)$ où g désigne le barycentre de $A(r_2 r_3)$, $C(r_1 r_2)$, ie celui de $A(r_3)$, $C(r_1)$, ie $g = J$.

Finalement G sera le barycentre de $J(r_2 r_3 + r_1 r_2)$, $B(r_3 r_1)$, donc sera sur la droite (JB).

On montrerait de même que $G \in (CK)$ et $G \in (AI)$. CQFD

III.B.1

La situation est celle de la fig. 4 où :

$$\begin{cases} a = r_2 + r_3 \\ b = r_1 - r_3 \\ c = r_1 - r_2 \\ 2p = a + b + c \end{cases} \qquad r_1 \geq \operatorname{Sup}(r_2, r_3)$$

En additionnant les 3 premières égalités : $p = r_1$.

En reportant : $\begin{cases} r_2 = p - c \\ r_3 = p - b \end{cases}$

Enfin :

$$r_1r_2 + r_1r_3 - r_2r_3 = r_1r_2 + r_3(r_1 - r_2) = r_1r_2 + r_3c > 0$$

III.B. Le barycentre G' de $A(-r_2r_3)$, $B(r_1r_3)$, $C(r_1r_2)$ est bien défini d'après la question précédente. On raisonne comme en III.A.2 ; par associativité du barycentre, G' sera le bary. de $g(-r_2r_3+r_1r_3)$, $C(r_1r_2)$ où g est le barycentre de $A(-r_2)$, $B(r_1)$, ie $g = K$ (cf fig. 4).

Donc $G' \in (KC)$.

De même $G' \in (BJ) \cap (AI)$. CQFD.

III.C.1.a

L'aire de ABC est la somme des aires des triangles ΩBC, ΩCA et ΩAB, de sorte que

$$s = \frac{AC.R}{2} + \frac{CB.R}{2} + \frac{BA.R}{2} = p.R$$

III.C.1.b

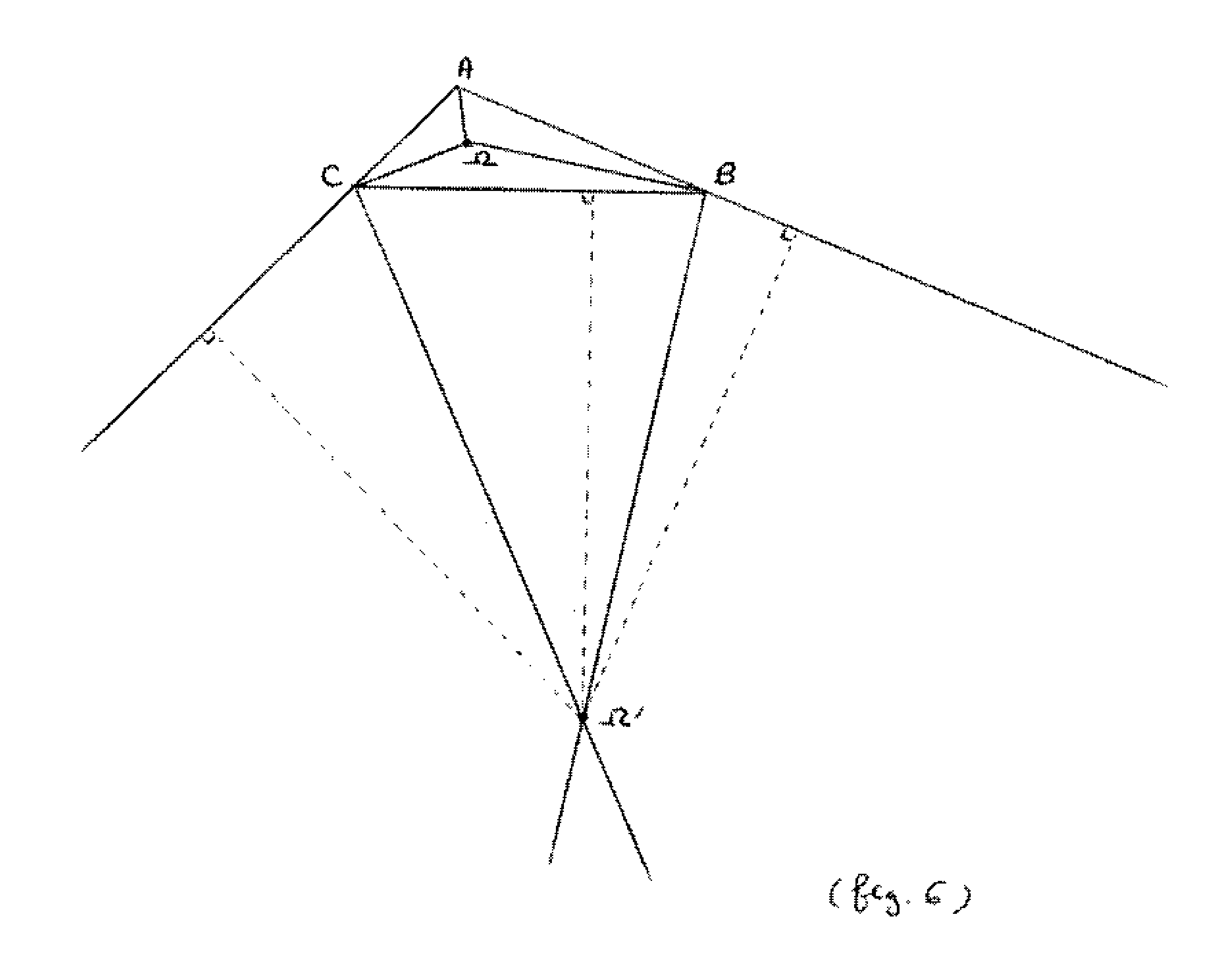
Ω' est extérieur au triangle ABC, et donc si l'on note $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC, etc, on trouve :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AB\Omega'C} - \mathcal{A}_{BC\Omega'} \qquad \text{(voir fig. 6)}$$

$$= \mathcal{A}_{A\Omega'C} + \mathcal{A}_{A\Omega'B} - \mathcal{A}_{BC\Omega'}$$

$$= \frac{bR'}{2} + \frac{cR'}{2} - \frac{aR'}{2}$$

$$\boxed{s = (p-a).R'}$$



(fig. 6)

III.C.1.c

$$4s^2 = b^2c^2\sin^2\hat{A} = b^2c^2(1-\cos^2\hat{A}) = b^2c^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)$$

$$= \left(b^2c^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4}\right)$$

d'où

$$16s^2 = \left(4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2\right)$$

$$= (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= \left(a^2 - (b-c)^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right)$$

$$16s^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)$$

La seconde formule se déduit facilement :

$$s^2 = \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{b+c+a}{2}$$

$$= (p-b)\ (p-c)\ (p-a) \cdot p$$

et comme s est positif : $\boxed{s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

III.C.2.a (cf fig. 3 p 5)

Nous avons
$$\begin{cases} p = r_1 + r_2 + r_3 \\ p - a = r_1 \\ p - b = r_2 \\ p - c = r_3 \end{cases} \qquad \text{(cf III.A.1)}$$

que nous reportons dans les formules $s = pR$ du III.C.1.a et dans $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$:

$$s = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)\, r_1 r_2 r_3} = (r_1 + r_2 + r_3) R$$

d'où
$$r_1 r_2 r_3 = (r_1 + r_2 + r_3) R^2$$

$$\boxed{\frac{1}{R^2} = \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_1 r_2}}$$

III.C.2.b (cf fig. 4 p 10)

Le contact est extérieur seulement pour $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$. III.B.1 s'applique :

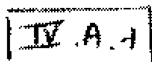
$$\begin{cases} p = r_1 \\ p - a = r_1 - (r_2 + r_3) \\ p - b = r_3 \\ p - c = r_2 \end{cases}$$

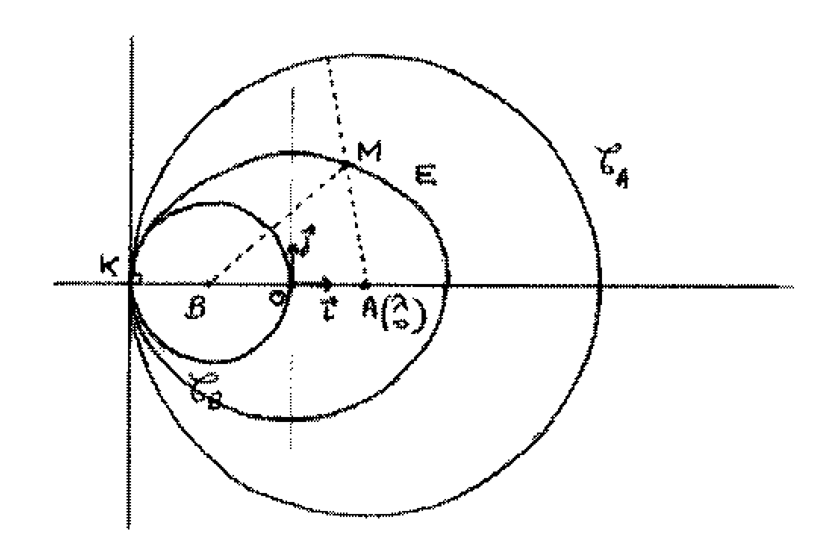
et en remplaçant comme dans la question précédente

$$s = \sqrt{r_1 (r_1 - r_2 - r_3)\, r_3 r_2} = (r_1 - r_2 - r_3) R'$$

$$r_1 r_2 r_3 = (r_1 - r_2 - r_3) R'^2$$

$$\boxed{\frac{1}{R'^2} = \frac{1}{r_2 r_3} - \frac{1}{r_1 r_3} - \frac{1}{r_1 r_2}}$$


IV.A.1



(fig.7)

$E: \quad 14|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z^2 = 48\lambda^2$

$14(x^2+y^2) - 2(x^2-y^2) = 48\lambda^2$

$12x^2 + 16y^2 = 48\lambda^2$

$3x^2 + 4y^2 = 12\lambda^2$

$$E: \quad \frac{x^2}{4\lambda^2} + \frac{y^2}{3\lambda^2} = 1$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre O. Avec les notations courantes :

$$a = 2\lambda$$
$$b = \lambda\sqrt{3}$$
$$c^2 = a^2 - b^2 = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad c = \lambda$$

Les foyers de E auront pour coordonnées $\binom{\pm c}{0} = \binom{\pm\lambda}{0}$. Ce sont A et B.
Les sommets de E sont les points $\binom{\pm a}{0} = \binom{\pm 2\lambda}{0}$ et $\binom{0}{\pm b} = \binom{0}{\pm\lambda\sqrt{3}}$ parmi lesquels on note K. Enfin, l'excentricité de E est :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

IV.A.2 * On sait, d'après la définition bifocale de l'ellipse, que l'ensemble des points M vérifiant $MA + MB = 2a$ est l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a^2 = b^2 + c^2$ et $c = \frac{AB}{2}$. Ici, E sera l'ensemble des points M vérifiant $MA + MB = 4\lambda$ puisque $a = 2\lambda$.

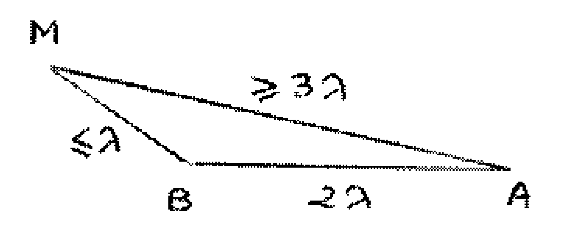
* Soit $M \in E$. Si $M\begin{pmatrix}2\lambda\\0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}-2\lambda\\0\end{pmatrix}$, M est clairement centre d'un cercle tangent à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$.
Supposons donc que $M \notin (AB)$, de sorte que ABM soit un triangle non aplati. Montrer que M est centre d'un cercle tangent intérieurement à $\mathcal{C}_A$ et tangent extérieurement à $\mathcal{C}_B$ revient à trouver un réel positif r (le rayon de ce cercle) qui vérifie (cf. fig 7 p15) :

$$\begin{cases} 3\lambda = MA + r \\ \lambda + r = MB \end{cases} \qquad (S)$$

Posons $\ell = MA$. Alors $MB = 4\lambda - \ell$ et (S) devient

$$\begin{cases} 3\lambda = \ell + r \\ \lambda + r = 4\lambda - \ell \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $r = 3\lambda - \ell$.
Cette solution est strictement positive, sinon $\ell = MA \geqslant 3\lambda$ entraîne $MB = 4\lambda - \ell \leqslant \lambda$ et contredit l'inégalité triangulaire dans le triangle non aplati MAB :



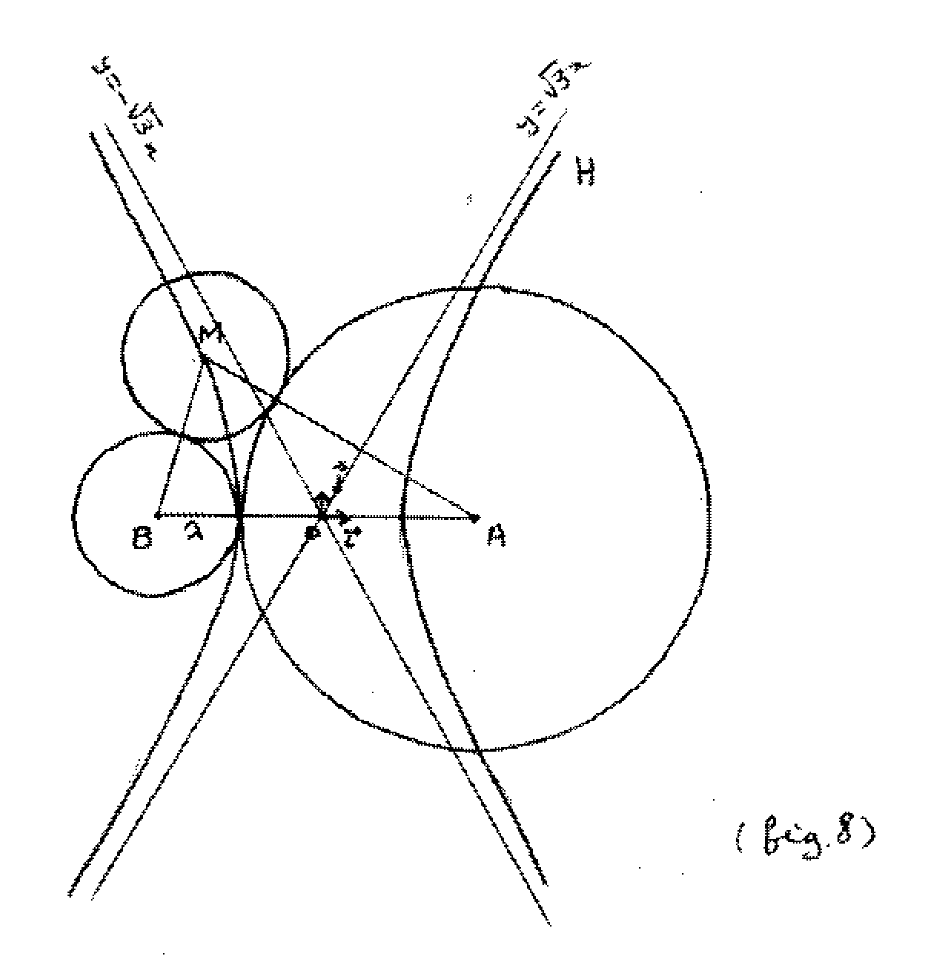
CQFD

IV.A.3 Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des centres des cercles tangents intérieurement à $\mathcal{C}_A$ et tangents extérieurement à $\mathcal{C}_B$. On vient de voir que $E \subset \mathcal{E}$.
Réc., si $M \in \mathcal{E}$, il existe $r > 0$ (le rayon du cercle solution) tel que

$$\begin{cases} 3\lambda = MA + r \\ \lambda + r = MB \end{cases}$$

d'où $\quad 3\lambda = MA + (MB - \lambda) \quad$ ie $\quad MA + MB = 4\lambda$.

IV.B.1



(fig. 8)

Si M est centre d'un cercle tangent extérieurement à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$, il existe $r>0$ tel que (cf fig. 8) :

$$\begin{cases} MA = r + 3\lambda \\ MB = r + \lambda \end{cases}$$

d'où $MA - MB = 2\lambda$

IV.B.2

Si M est centre d'un cercle tangent $\mathcal{C}_M$ intérieurement à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$, alors $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ sont inclus dans le disque fermé de frontière $\mathcal{C}_M$ (sinon $\mathcal{C}_M$ serait inclus dans le disque de frontière $\mathcal{C}_A$, par ex., et donc serait tangent extérieurement à $\mathcal{C}_B$ ce qui est à rejeter). Le dessin est donc le suivant :

et il existera $r > 0$ avec

$$\begin{cases} MB = r - \lambda \\ MA = r - 3\lambda \end{cases}$$

d'où $\quad MB - MA = 2\lambda$

IV.B.3 D'après les 2 questions précédentes, si M est le centre d'un cercle tangent à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ et ayant 2 contacts de même type, alors

$$|MA - MB| = 2\lambda$$

Cette équation définit une hyperbole H de foyers A et B, et avec les notations habituelles :

$|MA - MB| = 2a \qquad$ donc $a = \lambda$

$AB = 2c \qquad$ donc $c = \frac{4\lambda}{2} = 2\lambda$

$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{4\lambda^2 - \lambda^2} = \lambda\sqrt{3}$

L'équation de H dans le repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ où O milieu de $[AB]$ et $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est :

$$H : \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{3\lambda^2} = 1$$

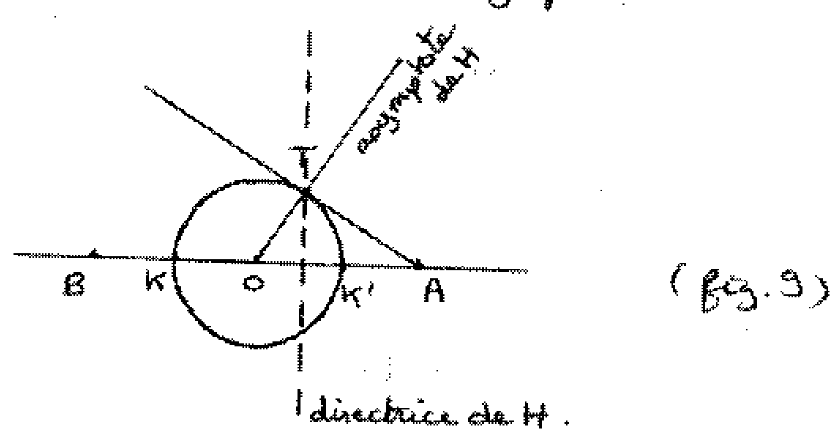
L'excentricité de H est $e = \frac{c}{a} = \frac{2\lambda}{\lambda} = 2$, ses asymptotes admettent les équations $y = \pm \frac{b}{a} x = \pm\sqrt{3}\,x$ dans $\mathcal{R}$, et les sommets de H ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} \pm\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ (ainsi K est un des sommets de H)

2° solution pour l'étude de H : $|MA - MB| = 2\lambda$.

K est clairement sur H puisque c'est le centre d'un cercle tangent intérieurement à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$. K sera donc l'un des sommets de H. L'autre sommet sera le symétrique K' de K par rapport au milieu O de [AB].

On déterminera les asymptotes et les directrices de H, géométriquement, à l'aide du Théorème (U Coniques, U52)

Théorème : Si H est une hyperbole de foyers A et B, et de sommets K, K', les tangentes au cercle de diamètre [KK'] passant par les foyers A et B ont des points de contact situés à la fois sur les directrices et sur les asymptotes de H.



(fig. 9)

On trace donc le point T sur la fig. 9. L'asymptote (OT) à H est facile à obtenir. La directrice associée à A aussi : c'est la perpendiculaire à (AB) passant par T.
Enfin $e = \frac{c}{a} = \frac{OA}{OK'} = \frac{2\lambda}{\lambda} = 2$.

IV.B.4 Voir fig 8 p 17

IV.B.5

Si $M \in H$, de 2 choses l'une :

1^er cas : $MA - MB = 2\lambda$

S'il existe $r > 0$ tq $\begin{cases} MA = r + 3\lambda \\ MB = r + \lambda \end{cases}$, alors M sera centre d'un cercle tangent extérieurement à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ (cf IV.B.1). Posons $MB = \ell$, le système équivaut à :

$$\begin{cases} 2\lambda + \ell = r + 3\lambda \\ \ell = r + \lambda \end{cases} \iff r = \ell - \lambda$$

Comme $\ell - \lambda > 0$ (sinon $MB \leq \lambda \Rightarrow MA = MB + 2\lambda \leq 3\lambda$ et il y a contradiction avec l'inégalité triangulaire dans MAB de la fig. 8 :

du moins tant que $M \notin (AB)$ (car alors $AB = 4\lambda < BM + MA \leq \lambda + 3\lambda \Rightarrow 4\lambda < 4\lambda$). Le seul point M tel que $M \in (AB)$ et $MA - MB = 2\lambda$ se traite séparément de façon évidente) c'est fini.

2^e cas : $MB - MA = 2\lambda$

On montre de même qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{cases} MB = r - \lambda \\ MA = r - 3\lambda \end{cases} \quad \text{(cf IV.B.2)}$$

Posons $MB = \ell$, le système devient

$$\begin{cases} \ell = r - \lambda \\ \ell - 2\lambda = r - 3\lambda \end{cases} \iff r = \ell + \lambda > 0$$

CQFD

IV.B.6 Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O milieu de [AB] et où A admet les coordonnées $\begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$M \in H \iff |MA - MB| = 2\lambda$$

$$\iff (MA - MB)^2 = 4\lambda^2$$

$$\iff MA^2 + MB^2 - 2\,MA.MB = 4\lambda^2$$

$$\iff (x-2\lambda)^2 + y^2 + (x+2\lambda)^2 + y^2 - 2\,MA.MB = 4\lambda^2$$

$$\iff MA.MB = x^2 + y^2 + 2\lambda^2$$

$$\iff |z - 2\lambda| . |z + 2\lambda| = |z|^2 + 2\lambda^2$$

$$\iff |z^2 - 4\lambda^2| = z\bar{z} + 2\lambda^2$$

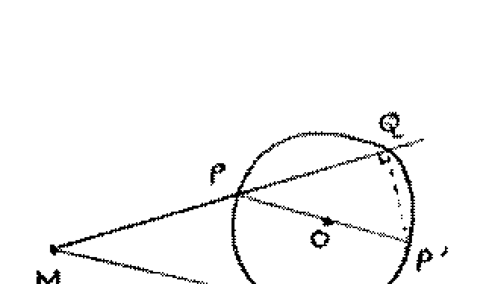
$$\iff \sqrt{(z^2 - 4\lambda^2)(\bar{z}^2 - 4\lambda^2)} = z\bar{z} + 2\lambda^2$$

$$\iff (z\bar{z})^2 - 4\lambda^2(z^2 + \bar{z}^2) + 16\lambda^4 = (z\bar{z} + 2\lambda^2)^2$$

$$\iff z^2 + \bar{z}^2 + z\bar{z} = 3\lambda^2$$

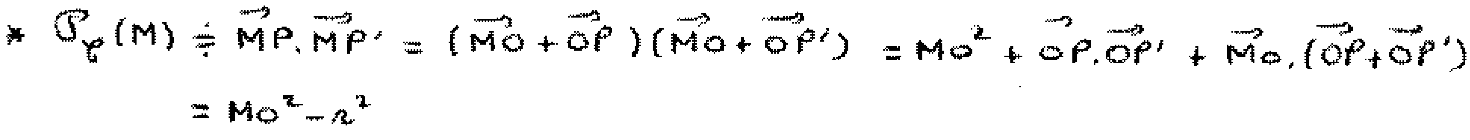
(Figure : $B\begin{pmatrix} -2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$, O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $A\begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$, M)

V.A.1



* Q appartient au cercle de diamètre [PP']
donc PQP' est rectangle en Q et

$$\vec{MP}.\vec{MQ} = \vec{MP}.(\vec{MP'} + \vec{P'Q}) = \vec{MP}.\vec{MP'}$$



* $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) \doteq \vec{MP}.\vec{MP'} = (\vec{MO} + \vec{OP})(\vec{MO} + \vec{OP'}) = MO^2 + \vec{OP}.\vec{OP'} + \vec{MO}.(\vec{OP} + \vec{OP'})$
$= MO^2 - r^2$

ne dépend que de M et du cercle $\mathcal{C}$.

* Si (Mt) est tangente à $\mathcal{C}$ en t, le Th. de Pythagore entraine

$$OM^2 - r^2 = Mt^2$$

donc $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = Mt^2$

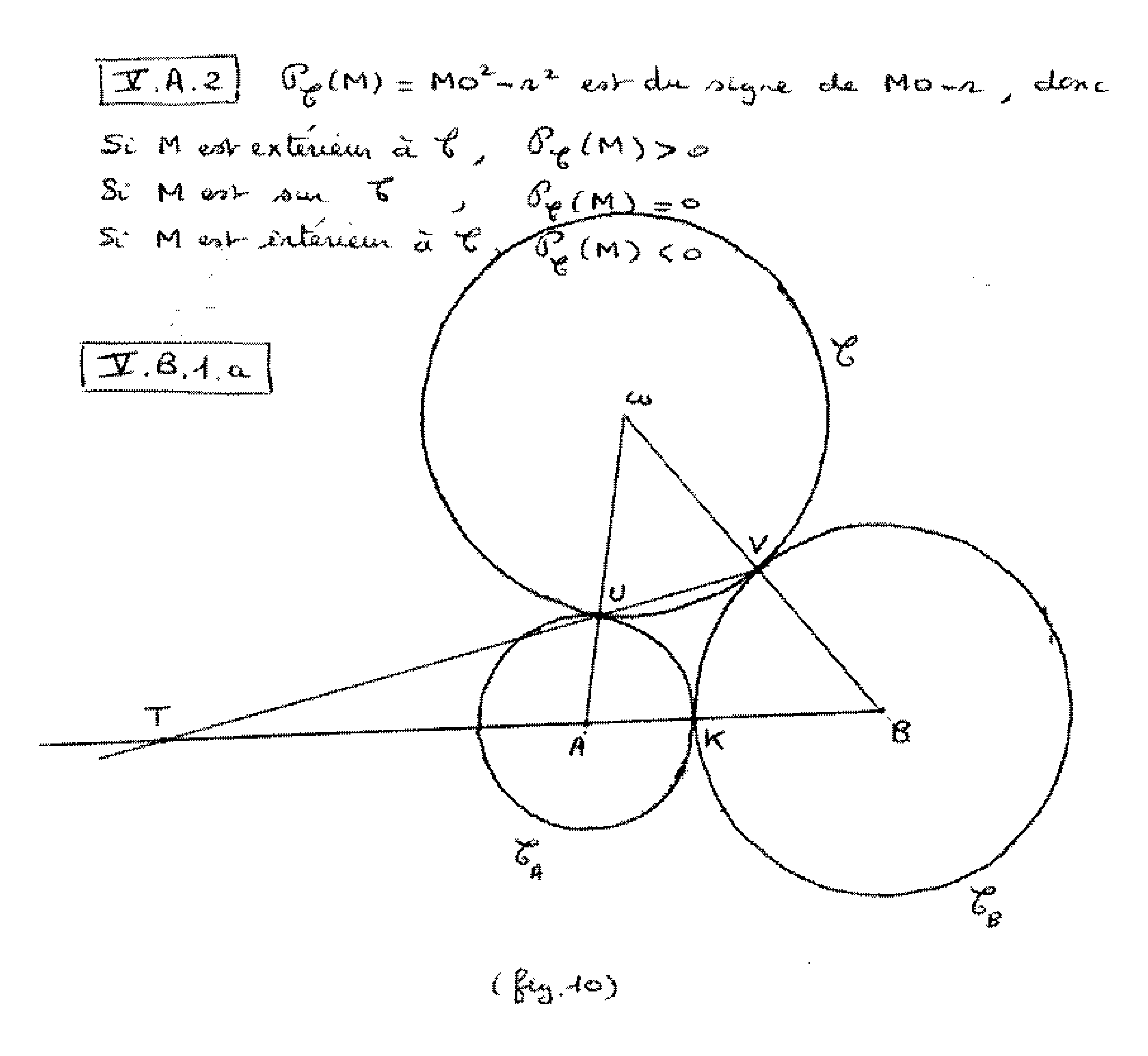
V.A.2 $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = MO^2 - r^2$ est du signe de $MO - r$, donc

Si M est extérieur à $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) > 0$

Si M est sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$

Si M est intérieur à $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) < 0$

V.B.1.a



(fig.10)

Notons h_A l'homothétie de centre U transformant $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}$, de rapport $\varepsilon_1 \frac{r}{r_A}$.

h_B^{-1} " " V " $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_B$, " $\varepsilon_2 \frac{r_B}{r}$

où $\varepsilon_i = \pm 1$, et posons

$$h = h_B^{-1} \circ h_A$$

h est une homothétie-translation transformant $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}_B$ et de rapport $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{r_B}{r_A}$ distinct de 1. C'est donc une homothétie. D'après I.C.1, le centre de h sera T ou K. Le lemme ci-dessous prouve que ce centre est T, et l'on déduit de $h = h_B^{-1} \circ h_A$ que

<u>T, U et V sont alignés</u>.

Lemme : K n'est pas le centre de h.

preuve : Si c'était le cas, $h_B^{-1} \circ h_A(K) = K \Rightarrow h_A(K) = h_B(K) \doteq L \in \mathcal{C}$.
Les points L, U, K d'une part, et L, V, K d'autre part seraient alignés.
Comme $L \neq K$ (en effet, $L = K$ entraîne que $\mathcal{C}$ est tangent à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ en K, et donc $U = V$, absurde) on déduit que

$$L, U, V, K \text{ sont alignés}$$

Mais L, U, V appartiennent à $\mathcal{C}$. Etant alignés, 2 points parmi L, U, V seront confondus. Comme $U \neq V$, on aura $L = U$ ou $L = V$.
Supposons $L = U$. Alors

$$h_A(K) = U \Rightarrow K = U \Rightarrow L = K \quad \text{absurde (fait ci-dessus)}$$

CQFD

IV.B.1.b (voir fig. 10 p22)

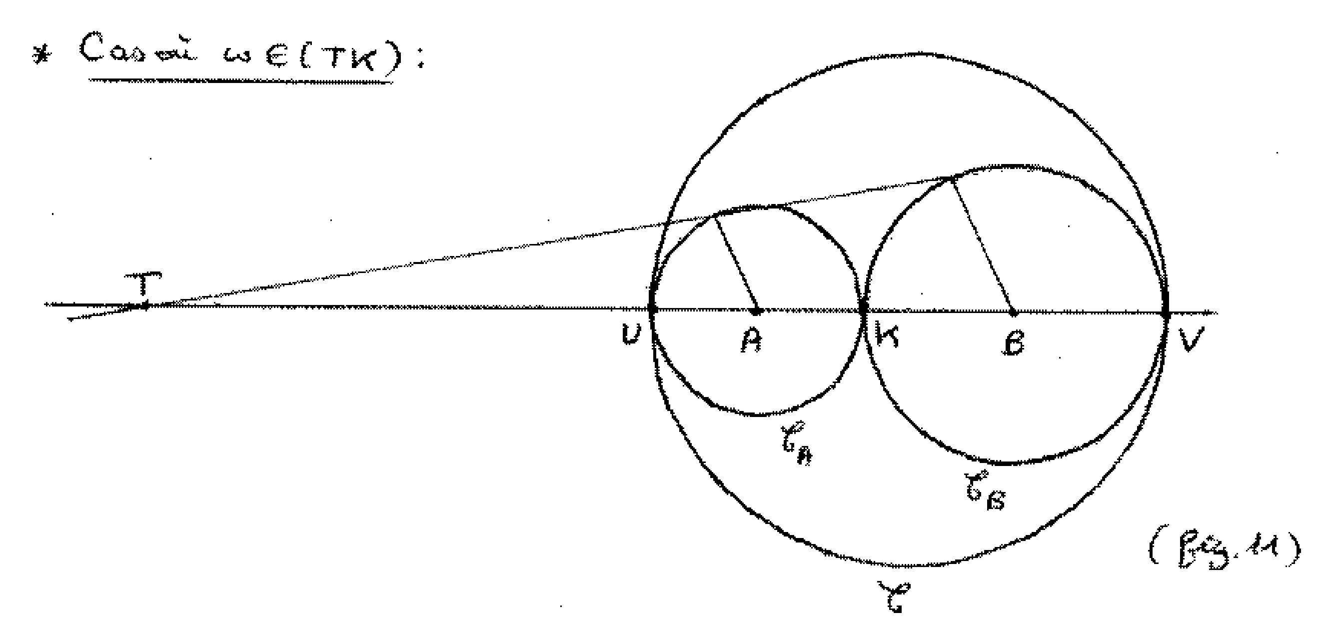
* D'après la 2^e partie, le cercle $\mathcal{C}_{UVK}$ circonscrit au triangle UVK n'est autre que le cercle inscrit dans le triangle $AB\omega$ si les 3 cercles sont tangents extérieurement (cf fig. 10), ou l'un des cercles exinscrits à $AB\omega$ sinon.
Dans les 2 cas, $(TK) = (AB)$ est tangent à $\mathcal{C}_{UVK}$ en K et la puissance de T / au cercle $\mathcal{C}_{UVK}$ permet d'écrire :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}_{UVK}}(T) = \overrightarrow{TU}.\overrightarrow{TV} = TK^2$$

On déduit $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(T) = \overrightarrow{TU}.\overrightarrow{TV} = TK^2$

* UVK n'est aplati que si U et V appartiennent à (AB), ce $\omega \in (AB)$, ie $\omega \in (TK)$. Dans ce cas, le cercle circonscrit $\mathcal{C}_{UVK}$ n'existe pas et le raisonnement ci-dessus est en défaut. On fait une étude à part :

* Cas où $\omega \in (TK)$:

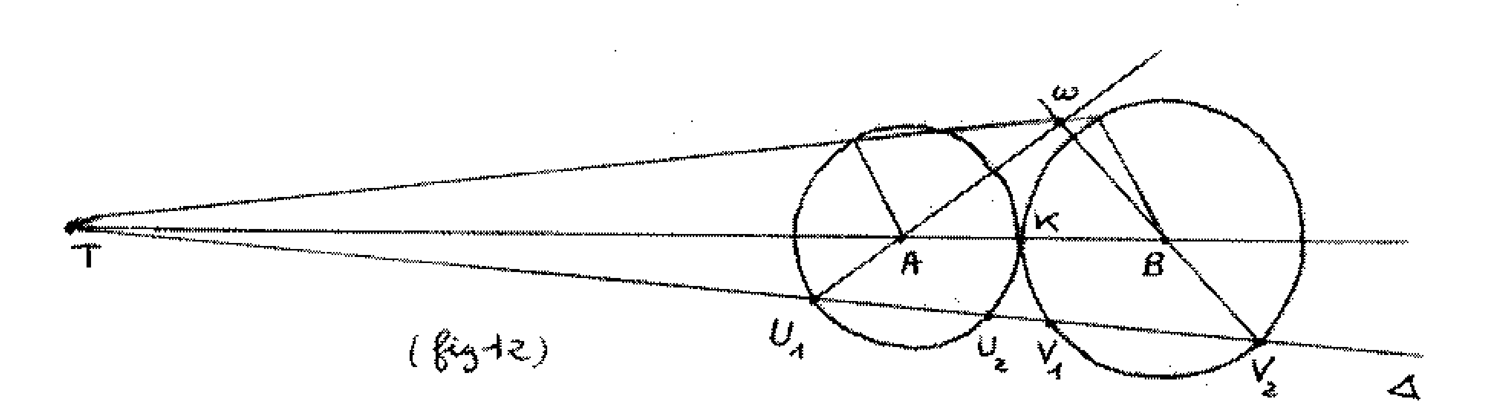


(fig. 11)

h désignant l'homothétie de centre T et de rapport $\frac{r_2}{r_1}$,

$$\left.\begin{array}{l} h(U)=K \\ h(K)=V \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{TK}}{\overline{TU}} = \frac{\overline{TV}}{\overline{TK}} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \overline{TU}.\overline{TV} = TK^2$$

V.B.2



(fig 12)

* Si $(AU_1) \parallel (BV_2)$, alors comme $(AU_1) \parallel (BV_1)$ (image d'une droite par une homothétie) on aura $(BV_1) = (BV_2)$ et 2 cas :

1^er cas : $V_1 = V_2$. C'est absurde car entraîne $U_1 = U_2$.

2^e cas : V_1 et V_2 diamétralement opposés. Cela n'est possible que si $\Delta = (AB)$

* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\omega, \omega U_1)$ est tangent à $\mathcal{C}_A$ en U_1.

BV_1V_2 est isocèle et $(BV_1) \parallel (\omega U_1) = (AU_1)$ donc $\omega U_1 V_2$ est isocèle en ω. Par suite $\mathcal{C}$ passe par V_2, et comme $B \in (\omega V_2)$, $\mathcal{C}$ sera tangent à $\mathcal{C}_B$ en V_2.

* D'après V.B.1.b, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(T) = \overrightarrow{TU_1} . \overrightarrow{TV_2} = TK^2$

* Si $\Delta = (TK)$, V_1 et V_2 sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}_B$ et $U_2 = V_1$. Le milieu de $[U_1V_2]$ est le centre ω du cercle $\mathcal{C}$ cherché.

V.B.3

* Si $\mathcal{C} \in \mathcal{F}'$, alors $\mathcal{C}$ est tangent à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(T) = TK^2$ d'après V.B.1.

* Réc., soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre ω tangent à $\mathcal{C}_A$ en U_1 et tel que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(T) = TK^2$. La droite $\Delta = (TU_1)$ recoupe $\mathcal{C}_A$ en U_2, et coupe $\mathcal{C}_B$ en V_1 et V_2, et l'on sait l'existence d'un cercle $\mathcal{C}'$ de centre ω' tangent à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ avec $\mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(T) = TK^2$. (cf V.B.2)

On a : $\omega \in (U_1A)$

$\omega' \in (U_1A) \cap (V_2B)$ et $\omega' \in$ médiatrice de $[U_1V_2]$

Notons V_2' le second point d'intersection de (TU_1) et $\mathcal{C}$ (éventuellement confondu avec V_2').

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(T) = \overline{TU_1} . \overline{TV_2'} = TK^2 = \overline{TU_1} . \overline{TV_2} \Rightarrow V_2' = V_2$$

De sorte que ω' soit à la fois sur (U_1A) et sur la médiatrice de $[U_1U_2]$. Donc $\omega = \omega'$ et $\underline{\mathcal{C} \in \mathcal{F}'}$.

NB : On suppose $U_1 \neq U_2$, sinon (TU_1) tangent à $\mathcal{C}_A$ et

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(T) = TU_1^2 = TK^2$$

U_1 est sur $\mathcal{C}_A$ et sur le cercle de centre T passant par K, donc $U_1 = K$ et c'est absurde, (TK) coupant alors $\mathcal{C}_A$ en 2 points distincts !

* La dernière question a déjà été traitée en V.B.2 : si $U_1 \in \mathcal{C}_A$, on trace (TU_1) qui recoupe $\mathcal{C}_A$ en U_2 que l'on suppose distinct, puis on note V_1 et V_2 les images de U_1 et U_2 par l'homothétie de centre T. On y montre alors que l'intersection ω de (V_1A) et (V_2B) est centre d'un cercle tangent à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$.

V.C.1 Voir fig. 13 p 27

V.C.2

On raisonne sur la fig. 13 :

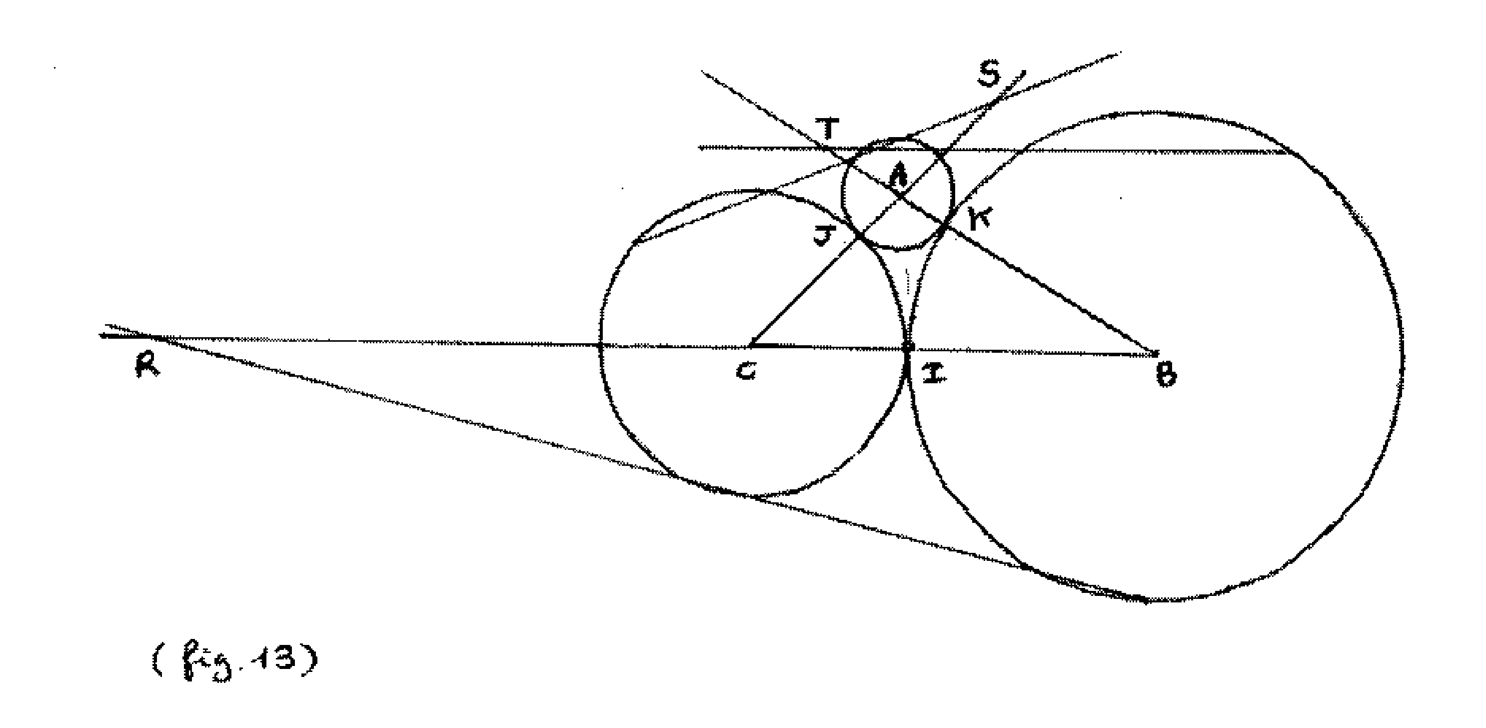
1) Alignements du type SIK, IJT ou RJK :

Prenons l'alignement de S, I, K. Notons :

h_I et h_R les 2 homothéties transformant $\mathcal{C}_B$ en $\mathcal{C}_C$
h_J et h_S " " $\mathcal{C}_C$ en $\mathcal{C}_A$
h_K et h_T " " $\mathcal{C}_A$ en $\mathcal{C}_B$

$h_I^{-1} \circ h_K^{-1}$ est une homothétie-translation de rapport $\left(-\frac{r_2}{r_3}\right)\cdot\left(-\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{r_1}{r_3}$ transformant $\mathcal{C}_C$ en $\mathcal{C}_A$. C'est donc l'homothétie h_S.

De $h_I^{-1} \circ h_K^{-1} = h_S$ on déduit l'alignement de S, I, K.



(fig. 13)

2) Alignement R, S, T.

$h_S^{-1} \circ h_T^{-1}$ est une homothétie-translation de rapport $\frac{r_3}{r_1} \times \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_2}$ transformant $\mathcal{C}_B$ en $\mathcal{C}_C$, c'est donc h_R et R, S, T seront alignés.

FIN

ENONCÉ DE LA PREMIÈRE [redacted] COMPOSITION

DU CAPES INTERNE 1994

Dans tout le problème on se place dans le plan affine euclidien P et on désigne par $\overline{P}$ l'ensemble des vecteurs associés à P. (ABC) est un triangle non dégénéré dont les côtés ont pour longueur BC = a, CA = b, AB = c. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. α, β, γ sont trois nombres réels dont deux au moins ne sont pas nuls. Sous réserve d'existence :

U est le barycentre de B et C affectés des masses β et γ ;

V est le barycentre de C et A affectés des masses γ et α ;

W est le barycentre de A et B affectés des masses α et β.

On a donc :

$\beta \overrightarrow{UB} + \gamma \overrightarrow{UC} = \vec{0}$;
$\gamma \overrightarrow{VC} + \alpha \overrightarrow{VA} = \vec{0}$;
$\alpha \overrightarrow{WA} + \beta \overrightarrow{WB} = \vec{0}$.

L'objet du problème est d'étudier dans quelques cas la correspondance entre les configurations proposées et les triplets (α, β, γ).

I

On se propose d'établir dans cette partie quelques résultats dont certains seront utilisés par la suite.

1. On appelle $\vec{f}$ l'application de P dans $\vec{P}$ définie pour tout point M de P par :

$$\overrightarrow{f(M)} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC}\,.$$

On appelle φ l'application de P dans $\mathbb{R}$ définie pour tout point M de P par :

$$\varphi(M) = \alpha\,MA^2 + \beta\,MB^2 + \gamma\,MC^2\,.$$

1.1. M et N sont deux points distincts de P. Montrer que :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(N)} + (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MN}$$

$$\varphi(M) = \varphi(N) + (\alpha + \beta + \gamma)\,MN^2 + 2\,\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{f(N)}.$$

1.2. En déduire que si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la fonction $\vec{f}$ est constante et qu'elle est bijective si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

2. On suppose dans cette question que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. On sait alors qu'il existe un unique point G appelé barycentre du système $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$. On a alors $\overrightarrow{f(M)} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MG}$.

2.1. En déduire que quand O et G sont distincts (le triangle ABC n'est pas équilatéral) $\alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC}$ est un vecteur directeur de la droite (OG).

2.2. Proposer une démonstration de la propriété d'associativité du barycentre.

2.3. On passe en revue quelques cas particuliers.

2.3.1. À quelles conditions peut-on affirmer l'existence de chacun des points U, V, W ? Démontrer que dans ce cas les droites (AU), (BV) et (CW) sont concourantes.

2.3.2. Montrer que si $\alpha = -\beta$, alors (CG) est parallèle à (AB).

2.3.3. Montrer que si $-\alpha = \beta = \gamma$, alors le quadrilatère (GBAC) est un parallélogramme.

2.4. Montrer que $\varphi(M) = \varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma)\,MG^2$. En déduire l'ensemble des points M de P pour lesquels $\varphi(M) = k$, k étant un réel donné. Discuter.

3. On suppose dans cette question que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

3.1.

3.1.1. Calculer $\varphi(0)$.

3.1.2. Montrer que pour tout point M de P, $\varphi(M) = 2\,\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{f(O)}$.

3.1.3. Montrer que $\overrightarrow{f(O)} \neq \vec{0}$ et déterminer l'ensemble des points M de P tels que $\varphi(M) = 0$.

3.2.

3.2.1. On suppose que $\alpha\beta\gamma \neq 0$. En déduire que les points U, V, W existent et que les droites (AU), (BV), (CW) sont parallèles.

3.2.2. On suppose que $\alpha = 0$. Où sont situés les points V et W ?

3.3. On mène par O la droite Δ perpendiculaire aux droites (AU), (BV), (CW). À chaque triplet (α, β, γ) vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on associe ainsi une droite Δ passant par O. Réciproquement montrer qu'à toute droite Δ passant par O on peut associer un triplet (α, β, γ) défini à un facteur multiplicatif près, satisfaisant à la condition $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et tel que celles des droites (AU), (BV), (CW) qui sont définies soient perpendiculaires à Δ. On envisagera deux cas :

- Δ est l'une des médiatrices des côtés du triangle (ABC);
- Δ n'est la médiatrice d'aucun côté du triangle (ABC).

II

Les applications qui suivent sont indépendantes entre elles.

1. *Bissectrices et barycentres.*

Le triangle (ABC) est supposé non isocèle .

1.1. *Résultats préliminaires.*

1.1.1. Établir les résultats suivants :

$$\overline{AO} \cdot \overline{AB} = \frac{c^2}{2}, \qquad \overline{OA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}(c^2 - b^2), \qquad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2).$$

On obtient des résultats analogues en permutant les points A, B, C.

1.1.2. On suppose que $\beta + \gamma \neq 0$. Établir que les droites (OA) et (AU) sont perpendiculaires si et seulement si $\beta c^2 + \gamma b^2 = 0$.

1.2. *Étude de la configuration.*

Les questions ci-dessous seront illustrées par une figure précise où, en prenant le centimètre pour unité, on a $a = 6$; $b = 3{,}5$; $c = 8$. Les démonstrations seront faites dans le cas général.

1.2.1. On prend $(\alpha, \beta, \gamma) = (a, b, c)$. U_1 est le barycentre de $\{(B, b); (C, c)\}$. La parallèle à la droite (AU_1) passant par B coupe la droite (AC) en B'. Montrer que AB' = AB. Déduire du fait que le triangle (ABB') est isocèle la propriété suivante : la droite (AU_1) est bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle (ABC). Quel point remarquable du triangle (ABC) est le barycentre du système : $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$?

1.2.2. Soit U_2 le barycentre de $\{(B, b); (C, -c)\}$ (on rappelle que $b \neq c$). Calculer le produit $\overrightarrow{AU_1} \cdot \overrightarrow{AU_2}$. En déduire que la droite (AU_2) est bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle (ABC).

Soit ω_1 le milieu du segment $[U_1, U_2]$. Montrer que ω_1 est le barycentre du système $\{(B, b^2); (C, -c^2)\}$.

1.2.3. Montrer que l'ensemble des points M du plan P tels que $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$ est le cercle C_A de diamètre $[U_1, U_2]$. Démontrer que la droite (OA) est tangente en A au cercle C_A. (On pourra utiliser les résultats de la question 1.1.2.)

1.2.4. De manière analogue on note C_B le cercle de centre ω_2 ensemble des points M tels que $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{a}{c}$, C_C le cercle de centre ω_3 ensemble des points M tels que : $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{b}{a}$. Les cercles C_A et C_B sont sécants. Ils se coupent en deux points I et J. On portera sur la figure proposée au début de la question 1.2. les cercles C_A, C_B, C_C, les points I et J.

1.2.4.1. Montrer que les points I et J appartiennent à C_C et en déduire que les points $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont alignés.

1.2.4.2. Montrer que $O\omega_1^2 - O\omega_2^2 = I\omega_1^2 - I\omega_2^2 = J\omega_1^2 - J\omega_2^2$. Soit S le milieu de $[\omega_1, \omega_2]$. Déduire des égalités précédentes que $\overline{OS} \cdot \overrightarrow{\omega_1 \omega_2} = \overline{IS} \cdot \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}$. Montrer alors que les points O, I, J sont alignés.

2. *Étude d'un cas où le lieu des points M, tels que $\varphi(M) = 0$, est donné.*

Dans cette application on choisit comme pondération $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 1, 1)$.

Dans ce cas $\varphi(M) = MB^2 + MC^2 - MA^2$.

2.1.

2.1.1. Si G est le barycentre du système $\{(A, -1); (B, 1); (C; 1)\}$, quelle est la nature du quadrilatère (GBAC) ?

2.1.2. Montrer que $\varphi(M) = MG^2 - 2\,bc\cos\widehat{A}$. En déduire selon la mesure de l'angle $\widehat{A}$ l'ensemble des points M de P tels que $\varphi(M) = 0$.

2.2. On donne dans le plan P un cercle Γ de centre G et de rayon ρ. On cherche, dans certaines conditions, les triangles (A, B, C) tels que Γ soit l'ensemble des points M de P vérifiant $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$.

2.2.1. Le cercle Γ et le point A étant donnés, montrer qu'il existe un triangle (A, B, C) si et seulement si $GA > \rho\sqrt{2}$. (On pourra montrer que : $\rho^2 = \frac{1}{2}GA^2 - \frac{1}{2}BC^2$). Cette condition étant remplie, déterminer l'ensemble des points B et l'ensemble des points C.

2.2.2. Le cercle Γ et le point B étant donnés, déterminer l'ensemble des points A puis l'ensemble des points C. (On pourra montrer que : $AG^2 - AB^2 = \rho^2 + GB^2$.)

3. *Étude d'un cas où le lieu des points* M, *tels que* φ (M) = 0, *est donné* ($\alpha + \beta + \gamma = 0$).

Dans cette application on prend $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Les notations sont celles de la question 3. de la partie I. La droite Δ, les points B et C et les nombres β et γ sont donnés. On se propose de construire le point A.

3.1. On suppose que $\beta + \gamma = 0$. Montrer qu'il existe un point A si et seulement si Δ est médiatrice du segment [B, C].

3.2. On suppose que $\beta + \gamma \neq 0$.

3.2.1. Montrer que si Δ est perpendiculaire à la droite (BC), il n'existe pas de solution.

3.2.2. On suppose que les droites Δ et (BC) ne sont pas perpendiculaires. Construire le cercle circonscrit au triangle (ABC) et préciser suivant la position de U sur la droite (BC) le nombre de points A qui conviennent.

III

Dans cette partie on s'intéresse au cas où $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et où le triangle (ABC) est rectangle en A. Les notations sont celles de la question 3. de la partie I. Le point B, le triplet (α, β, γ), la droite Δ sont connus, Δ ne passe pas par B. On se propose de déterminer les lieux des points A et C.

1. Dans cette question on prend $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, -3)$. I est le projeté orthogonal de B sur Δ. Faire une figure où l'on prend BI = 4 (unité : le centimètre).

1.1. Montrer que les points C et U appartiennent respectivement à deux droites fixes D_1 et D_2 que l'on construira.

1.2. Soit U un point de D_2, H son projeté orthogonal sur Δ. Montrer qu'il existe un triangle (A, B, C) associé à Δ et U si et seulement si $\frac{UB}{UH} \leqslant \sqrt{3}$.

1.3. En déduire que U est à l'intérieur d'une conique que l'on précisera et qui sera tracée sur la figure de la question 1.1. (Placer les sommets et éventuellement les asymptotes et faire un dessin approximatif.) Déterminer alors l'ensemble des points U et l'ensemble des points C.

1.4. On considère le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ est un vecteur directeur de la droite (BI), $\vec{j}$ un vecteur directeur de la droite Δ, $\overline{BI} = \alpha\,\vec{i}$.

Déterminer l'équation de l'ensemble des points A quand U décrit l'ensemble déterminé à la question 1.3. Le tracer sur la figure précédente. (Mêmes consignes qu'en 1.3.)

2. Dans cette question on prend $(\alpha, \beta, \gamma) = (-3, 2, 1)$. I est le projeté orthogonal de B sur Δ. Faire une figure où l'on prend BI = 3 (unité : le centimètre).

2.1. Montrer que les points C et U appartiennent à deux droites fixes D_1 et D_2 que l'on construira.

2.2. Démontrer que pour tout point U de D_2 il existe deux triangles (A, B, C) rectangles en A.

2.3. On considère le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ de la question (1, 4). Déterminer l'équation de l'ensemble des points A quand U décrit la droite D_2. Le tracer sur la figure précédente. (Mêmes consignes qu'en 1.3.)

3. Dans cette question on prend $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 2, -1)$. En utilisant une démarche analogue à celle des questions précédentes, déterminer les ensembles des points U, C, A.

UNIVERSITE P. et M. CURIE
PARIS VI
CAPES DE MATHEMATIQUES

CAPES INTERNE DE MATHEMATIQUES
1ère composition 1994 (Géométrie)

- I -

1.1 - D'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{f(M)} = \alpha\, \overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$
$$= \alpha\, \overrightarrow{MN} + \alpha\, \overrightarrow{NA} + \beta\, \overrightarrow{MN} + \beta\, \overrightarrow{NB} + \gamma\, \overrightarrow{MN} + \gamma\, \overrightarrow{NA}$$
$$= \overrightarrow{f(N)} + (\alpha + \beta + \gamma)\, \overrightarrow{MN}$$

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}$, par bilinéarité du produit scalaire:

$$MA^2 = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}) \cdot (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA})$$
$$= MN^2 + 2\overrightarrow{MN}\, \overrightarrow{NA} + NA^2$$

D'où $\varphi(M) = \varphi(N) + (\alpha + \beta + \gamma)\, MN^2 + 2\overrightarrow{MN}\, (\alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NB} + \gamma\overrightarrow{NC})$

$$= \varphi\,(N) + (\alpha + \beta + \gamma)\, MN^2 + 2\overrightarrow{MN}\, \overrightarrow{f(N)})$$

1. 2 - Donc si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, pour tous M et N dans P : $\overrightarrow{f(M)} = f\ \overrightarrow{(N)}$ et $\vec{f}$ est constante.

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

soit N fixé et $\vec{V}$ dans P, $\overrightarrow{f(M)} = \vec{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(N)} + (\alpha + \beta + \gamma)\, \overrightarrow{MN} = \vec{V}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\vec{V} - \overrightarrow{f(N)}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

ce qui définit M donc f est bijective.

Réciproquement si $\vec{f}$ est bijective $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ sinon $\vec{f}$ serait constante.

2 - 2.1 - D'après 1.1 $\overrightarrow{f(O)} = (\alpha + \beta + \gamma)\, \overrightarrow{OG}$ $(\overrightarrow{f(G)} = \vec{0})$ donc si $G \neq 0$, $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ est un vecteur directeur de la droite (OG).

Note : Dans tout le problème pour alléger la rédaction on note, pour $B \neq C$, [BC] la droite définie par les points B et C, [BC] le segment d'extrémités B et C.

2.2 - Enonçons la propriété d'associativité du barycentre :

Soient $1 \le p < n$ *deux entiers,* $A_1, \dots, A_n$ *n point du plan,* $a_1, \dots, a_n$ *n coefficients (nombres réels) tels que* $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ *et* $\sum_{i=1}^{p} a_i \neq 0$. *Soient G le barycentre du système* $\{(A, a_1)\ 1 \le i \le n\}$, *G' le barycentre du système* $\{(A, a_i)\ 1 \le i \le p\}$ *et G" le barycentre du système* $\{(G', a_1 + .. a_p), (A_{p+1}, a_{p+1}), -, (A_n, a_n)\}$ *alors* $G'' = G$.

Démonstration soit M un point

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{M' A_i} = \sum_{i=1}^{p} a_i \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=p+1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$$

$$= (a_1 + - - + a_p) \overrightarrow{MG'} + \sum_{i=p+1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} \text{ par définition de G'}$$

$$= (a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG''}$$

par définition de G"

on en déduit $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{G'' A_c} = \vec{0}$ qui montre que G" = G

2.3

2.3 - 1 U existe ssi $\beta + \gamma \neq 0$

(et alors $\beta\, \overrightarrow{UB} + \gamma\, \overrightarrow{UC} = \vec{0} \Leftrightarrow \beta\, \overrightarrow{UB} + \gamma\, \overrightarrow{UB} + \gamma \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BU} = \dfrac{\gamma}{\beta + \gamma} \overrightarrow{BC}$ qui permet de construire U)

V existe ssi $\alpha + \gamma \neq 0$

W existe ssi $\alpha + \beta \neq 0$

Si $(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta) \neq 0$, en raison de la propriété d'associativité du barycentre G est sur (AU) car σ barycentre de $\{(A,\alpha), U(\beta + \gamma)\}$, sur (BV) et (CW) donc ces droites sont concourantes en G.

2.3 - 2 Si $\alpha = -\beta$, γ est non nul et la relation $\alpha\, \overrightarrow{GA} + \beta\, \overrightarrow{GB} + \gamma\, \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ s'écrit $\alpha\, (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) + \gamma\, \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

soit $\gamma\, \overrightarrow{GC} = \alpha\, \overrightarrow{AB}$ qui montre que (GC) est parallèle à (AB)

2.3 - 3 Si de plus $\gamma = -\alpha$, on a $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BA}$ donc le quadrilatère (GBAC) est un parallélogramme.

2.4 - On a $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$ donc la relation du 1.1 donne

$\varphi(M) = \varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma)\, MG^2$

$\varphi(M) = k \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{k-\varphi(G)}{\alpha+\beta+\gamma} = h.$

L'ensemble des points cherchés est alors

- si vide $h < 0$
- réduit à $\{G\}$ si $h = 0$,
- un cercle de centre G et rayon $\sqrt{h}$ si $h > 0$.

(Remarque : on ne peut pas utiliser le fait que le barycentre est invariant si on multiplie tous les coefficients par λ car alors φ est aussi multipliée par λ).

3 - 3.1 -

3.1. - 1 Comme OA = OB = OC et $\alpha + \beta + \gamma = 0$ $\varphi(O) = 0$

3.1. - 2 De 1.1 appliquée à O :

$\varphi(M) = \varphi(O) + (\alpha + \beta + \gamma)\, MO^2 + 2\overrightarrow{MO}\, f(\vec{O})$

on déduit $\varphi(M) = 2\, \overrightarrow{MO}\, \overrightarrow{f(O)}$

3.1. - 3 D'après 1.1

$\overrightarrow{f(O)} = \overrightarrow{f(A)} = \beta\, \overrightarrow{AB} + \gamma\, \overrightarrow{AC} \neq 0$ car AB et AC ne sont pas colinéaires (triangle non dégénéré).

Soit $\vec{V} = \overrightarrow{f(O)} \neq \vec{0}$

L'ensemble des M tels que $\varphi(M) = 0$ est aussi l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{f(O)} = 0$ donc la droite passant par O orthogonale à $\vec{V}$.

3.2 -

3.2. - 1 Si on avait $\beta + \gamma = 0$ on aurait $\alpha = 0$ donc U existe, de même pour V et W. On a de plus

$\overrightarrow{f(A)} = \alpha\, \overrightarrow{AA} + \beta\, \overrightarrow{AB} + \gamma\, \overrightarrow{AC} = (\mu + \gamma)\, \overrightarrow{AU}$

$\overrightarrow{f(B)} = (\alpha + \gamma)\, \overrightarrow{BV}$

$\overrightarrow{f(C)} = (\alpha + \mu)\, \overrightarrow{CW}$

Comme f est constante on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AU}$, $\overrightarrow{BV}$, $\overrightarrow{CW}$ sont colinéaires et les droites (AU), (BV), (CW) parallèles (de vecteur directeur $\overrightarrow{f(O)}$).

3.2 - 2 Si $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 0$ donc U n'existe pas, les relations

$0\, \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{\alpha VC} = 0$

$0\, \overrightarrow{WA} + \beta\, \overrightarrow{WB} = 0$

montrent que V est en C et W en B.

($\beta = -\gamma$ non nul car les 3 réels α, β, γ, ne sont pas tous nuls).

3.3 - Soit Δ une droite passant par O,

a) Δ est médiatrice d'un côté du triangle : traitons par exemple le cas où Δ est la médiatrice de [BC].

On prend les poids (A,0) (B,1), (C,-1) alors U (donc (AU) n'est pas défini. V est en C, W en B et on a bien (BV) $\perp \Delta$ et (CW) $\perp \Delta$.

b) Δ n'est pas une médiatrice: la direction $\vec{u}$ perpendiculaire n'est parallèle à aucun côté du triangle.

La droite passant par A de direction $\vec{u}$ coupe alors (BC) en U distincts de B et C ($\vec{u}$ non parallèle à 1 côté) et il existe β et γ non nuls tels que U barycentre de $\{(B,\mu), (C,\gamma)\}$.

Première démonstration De même la droite passant par B et de direction $\vec{u}$ coupe (AC) en V distinct de A et C donc il existe α' et γ' non nuls tels que V barycentre de $\{(A, \alpha'), (C, \gamma')\}$ ou après multiplication par une constante de $\{(A,\alpha) (C,\gamma)\}$

Soit W l'intersection de la droite passant par C de direction $\vec{u}$

Le théorème de Céva montre alors que

$$\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} \frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = -1$$

or $\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$ $\frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} = -\frac{\alpha}{\gamma}$

donc $\frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$ et W est le barycentre de $\{(A,\alpha), (B, \beta)\}$

La relation $\alpha + \beta + \gamma = 0$ est immédiate (sinon (AU), (BV), (CW) seraient concourantes).

Autre démonstration

Soit α tel que $\alpha + \beta + \gamma = 0$

α est non nul ($\beta + \gamma \neq 0$), β, γ aussi donc $\alpha + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$: V et W existent. D'après 3.2 -1, (BV) et (CW) sont parallèles à (AU) donc orthogonales à Δ.

- II -

1.1

1.1 - 1 La projection orthogonale de O sur le segment [AB] est le milieu C' de [AB] (OAB est un triangle isocèle) donc

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = \frac{c^2}{2}$

Variante : $OB^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})^2 = OA^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} + AB^2$ et $AB = c$, $OA = OB$.

de même $\overrightarrow{AO}\ \overrightarrow{AC} = \frac{f^b}{2}$

et par différence $\overrightarrow{AO}\ \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\ (f^b - c^2)$

soit $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\ (c^2 - b^2)$

qui donne par permutation

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\ (b^2 - a^2)$

alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}$

$= \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

1\. 1 - 2 $\beta + \gamma \neq 0$ donc U existe

et $\overrightarrow{AU} = \frac{\beta\ \overrightarrow{AB} + \gamma\ \overrightarrow{AC}}{\beta + \gamma}$

d'où $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AU} = \frac{\beta\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} + \gamma\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}}{\beta + \gamma}$

$= \frac{-\beta C^2 - \gamma b^2}{2(\beta+\gamma)}$

$= 0 \Leftrightarrow \beta C^2 + \gamma b^2 = 0$

Remarque : (ABC) non dégénéré donc $O \neq A$ et $U \neq A$

1.2 figure 1

1.2.1 - La relation de Thalès implique

$\frac{AC}{AB'} = \frac{U_1C}{U_1B} = \frac{b}{c}$

d'où $AB' = \frac{c}{b}\ AC = c = AB$

Donc le triangle (ABB') est isocèle et la bissectrice extérieure de l'angle $\hat{A}$ du triangle (ABB') qui est la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ du triangle (ABC) est parallèle à (BB') passant par A : c'est (AU).

Remarque: (AU) est bien intérieure au triangle puisque $b>0$, $c>0$.

On en déduit que le barycentre du système {(A,a), (B,b), (C,c)} est l'intersection des bissectrices intérieures du triangle, soit le centre du cercle inscrit.

1.2.2 - U_2 est défini par $(b-c)\ \overrightarrow{AU_2} = b\ \overrightarrow{AB} - c\ \overrightarrow{AC}$ ($b \neq c$ car le triangle ABC n'est pas isocèle) et U_1 par $(b+c)\ \overrightarrow{AU_1} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$

d'où $(b^2 - c^2)\ \overrightarrow{AU_1}\ \overrightarrow{AU_2} = b^2\ AB^2 - c^2\ AC^2$

$= b^2\ c^2 - c^2\ b^2 = 0$

Et (AU_2) est bissectrice extérieure de l'angle $\hat{A}$ du triangle (ABC)

On a $\overrightarrow{\omega_1 U_1} = \dfrac{b\,\overrightarrow{\omega_1 B} + c\overrightarrow{\omega_1 C}}{b + c}$

$\overrightarrow{\omega_1 U_2} = \dfrac{b\overrightarrow{\omega_1 B} - c\overrightarrow{\omega_1 C}}{b - c}$

ω_1 est le milieu du $[U_1\ U_2]$ donc $\overrightarrow{\omega_1\ U_1} + \overrightarrow{\omega_1\ U_2} = 0$

soit $\left(\dfrac{b}{b+c} + \dfrac{b}{b-c}\right)\overrightarrow{\omega_1\ B} + \left(\dfrac{c}{b+c} - \dfrac{c}{b-c}\right)\overrightarrow{\omega_1\ C} = 0$

ou $0 = [b(b-c) + b(b+c)]\ \overrightarrow{\omega_1 B}$

$+ [c(b-c) - c(b+c)]\ \overrightarrow{\omega_1 C}$

$= 2b^2\ \overrightarrow{\omega_1 B} - 2c^2\ \overrightarrow{\omega_1 C}$

qui montre que ω_1 est le barycentre de $\{(B,\ b^2),\ (C,\ -\ c^2)\}$.

1.2 - 3 U_1 et U_2 sont les deux points de la droite (BC) tels que $\dfrac{U_1B}{U_1C} = \dfrac{U_2D}{U_2C} = \dfrac{c}{b}$ donc (cours) l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$ est le cercle de diamètre $[U_1,\ U_2]$ (On remarque que l'angle U_1AU_2 est droit: on retrouve que A est sur ce lieu).

Variante : $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow b^2\ MB^2 - c^2\ MC^2 = 0$

$\Leftrightarrow b^2\ (\overrightarrow{M\omega_1}^2 + \overrightarrow{\omega_1\ B})^2 - c^2\ \ (\overrightarrow{M\omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 C})^2 - G$

$\Leftrightarrow \underset{\neq 0}{(b^2 - c^2)}\ M\omega_1{}^2 + 2\overrightarrow{M\omega_1}\ \underset{= \vec{0}\text{ d'après 1.2.2}}{(b^2\overrightarrow{\omega_1 B} - c^2\overrightarrow{\omega_1 C})}$

$b + f^2\ \omega_1\ B^2 - C^2\ \omega_1\ C^2 = 0$

$\Leftrightarrow M\omega_1{}^2 = \dfrac{c_2\ \omega_1\ C^2 - b_2\omega_1\ B^2}{b^2 - c^2}$

L'ensemble des points M tels que $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$ est donc soit vide, soit un cercle de centre ω_1. Comme ce cercle contient les points U_1 et U_2 c'est le cercle C_A de diamètre $[U_1\ U_2]$ (ω_1 est le milieu de $[U_1\ U_2]$.

En appliquant 1.1.2 avec $\beta = b^2$, $\gamma = -\ c^2$ on a $\beta c^2 + \gamma b^2 = 0$ donc (OA) et (AW_1) sont orthogonales et la droite (OA) est tangente en A au cercle C_A.

1.2 - 4

1.2 - 4 - 1

I vérifie $\frac{IC}{IA} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{a}{b}$

$\frac{IB}{IC} = \frac{c}{f} \Rightarrow I \in C_c$

de même $J \in C_c$ et ω_1, ω_2, ω_3, sont alignés car ils appartiennent à la médiatrice de [IJ]

($I \neq J$ car par exemple I est intérieur au triangle et J extérieur).

1.2 - 4 - 2

a) La puissance de O par rapport au cercle C_A (centre ω_1, rayon $I\omega_1$) est $O\omega_1^2 - I\omega_1^2 = OA^2$ puisque (OA) est tangente à ce cercle.

De même (OB) est tangente à C_B et la puissance de O par rapport au cercle C_B (centre ω_2 rayon $I\omega_2$) est $O\omega_2^2 - I\omega_2^2 = OB^2$

OA = OB donc

$O\omega_1^2 - I\omega_1^2 = O\omega_2^2 - I\omega_2^2$

soit $O\omega_1^2 - O\omega_2^2 = I\omega_1^2 - I\omega_2^2$

Variante:

$O\omega_1^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\omega_1})^2$

$= OA^2 + A\omega_1^2$ car $(OA) \perp (A\omega_1)$

$= R^2 + R_A^2$ en notant R le rayon du cercle circonscrit à (ABC) et R_A le rayon de C_A.

De même $O\omega_2^2 = R^2 + R_B^2$

et $O\omega_1^2 - O\omega_2^2 = R_A^2 - R_B^2 = I\omega_1^2 - I\omega_2^2$ car I est sur C_A et C_B.

Le raisonnement est bien sûr le même avec J.

b) $\overrightarrow{O\omega_1} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{S\omega_1} = \overrightarrow{OS} - \frac{\overrightarrow{\omega_1\omega_2}}{2.}$

$\overrightarrow{O\omega_2} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{S\omega_2} = \overrightarrow{OS} + \frac{\overrightarrow{\omega_1\omega_2}}{2}$

$\Rightarrow O\omega_1^2 = OS^2 + \frac{\omega_1\omega_2^2}{4} - \overrightarrow{OS}.\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$

$O\omega_2 = OS^2 + \frac{\omega_1\omega_2^2}{4} + \overrightarrow{OS}\ \overrightarrow{\omega_1\omega_2}$

$$O\omega_1^2 - O\omega_2^2 = -2\overrightarrow{OS}\,\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$$

de même $I\omega_1^2 - I\omega_2^2 = -2\overrightarrow{IS}\,\omega_1\omega_2$

d'où $\overrightarrow{OS}.\,\overrightarrow{\omega_1\omega_2} = \overrightarrow{IS}.\,\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$

ou $\overrightarrow{OI}.\,\overrightarrow{\omega_1\omega_2} = 0$

de même $\overrightarrow{OJ}.\,\overrightarrow{\omega_1\omega_2} = 0$

ce qui montre que O, I, J sont alignés sur la droite orthogonale à $(\omega_1\omega_2)$ passant par O.

2.2 - 1

2 - 1 - 1 Soit m le milieu de [BC] (barycentre de {(B,I), (C,I)}), par associativité du barycentre $-\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GM} = 0$

soit $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{Gm}$, m est aussi le milieu de [AG] et le quadrilatère (GBAC) dont les diagonales se coupent en leurs milieux est un parallélogramme.

2 - 1 - 2 D'après I puisque G est le barycentre de {(A, - I), (B,I), (C,I)} $\varphi(M) = \varphi(G) + MG^2$ comme $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$,

$GA^2 = GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

$\varphi(G) = GB^2 + GC^2 - GA^2$

$= GB^2 + GC^2 - GB^2 - GC^2 - 2\overrightarrow{GB}.\,\overrightarrow{GC}$

$= -2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

$= -2\overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AC}$ (invariant par symétrie par rapport à m)

$= 2bc\cos\hat{A}$.

$\varphi(M) = 0 \Leftrightarrow MG^2 = 2bc\cos\hat{A}$

Donc l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = 0$ est

- si A obtu ($\cos\hat{A} < 0$), vide,
- si A droit, réduit au point G,
- si A aigu, le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{2bc\cos\hat{A}}$.

2 - 2

2 - 2 - 1 Supposons que le triangle ABC existe et que $\varphi(M) = 0$

soit $\varphi(G) + MG^2 = 0$

ou $MG^2 = 2\overrightarrow{GB}.\,\overrightarrow{GC}$

Introduisant à nouveau m milieu de [AG] qui est aussi le milieu de [BC]

$$\overrightarrow{GB}.\,\overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{Gm} + \overrightarrow{mB}).\,(\overrightarrow{Gm} + \overrightarrow{mC})$$
$$= (\overrightarrow{Gm}\ \overrightarrow{\frac{BC}{2}}).\,(\overrightarrow{Gm} + \overrightarrow{\frac{BC}{2}})$$
$$= Gm^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$= \frac{GA^2}{4} - \frac{BC^2}{4}$

D'où $2MG^2 = GA^2 - BC^2$

$\Rightarrow GA > \sqrt{2} \quad MG = \sqrt{2} \quad \rho$

Donc la condition est nécessaire et on remarque que

$MG^2 = \rho^2 = 2Gm^2 - 2Bm^2$

Réciproquement supposons que $AG > \rho\sqrt{2}$

Soit B un point tel que la distance Bm vérifie

$2Bm^2 = 2Gm^2 - \rho^2 = \frac{GA^2}{2} - \rho^2 > 0$ et soit C le symétrique de B par rapport à m. Le quadrilatère ACGB est un parallélogramme et G est donc le barycentre de $\{(A,-I), (B,I), (C,I)\}$

Soit M un point de P,

$\varphi(M) = \varphi(G) + MG^2$

$= MG^2 - 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

$= MG^2 - 2Gm^2 + 2Bm^2$

$= MG^2 - \rho^2$

et $\varphi(M) = 0 \Leftrightarrow MG = \rho$

$\Leftrightarrow M \in \Gamma$

Donc Γ est bien l'ensemble des points de P tels que $\varphi(M) = 0$

Ensemble des points B.

Il résulte de ce qui précède que cet ensemble est le cercle $\mathcal{C}$ de centre m (milieu de [AG]) et de rayon $r = \sqrt{\frac{AG^2}{4} - \frac{\rho^2}{2}}$ (privé des deux points sur (AG) car le triangle (ABC) est non dégénéré).

Le lieu de C s'en déduit par symétrie autour de centre m : c'est le même.

III

3 - Si le triangle (A, B, C) existe, d'après I - 3, pour $\alpha + \Gamma + \gamma = 0$, $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{f(O)}$ et $\overrightarrow{f(O)}$ dirige les droites parallèles (AU), (BV), (CW). Le lieu des points M tels que $\varphi(M) = 0$ est donc la droite passant par O orthogonale à $\overrightarrow{f(O)}$ soit Δ.

3 - 1 Δ, B et C étant donnés, si A existe et si $\Gamma + \gamma \neq 0$, $\alpha \neq 0$ et $\overrightarrow{f(O)} = \overrightarrow{f(B)} = \alpha\ \overrightarrow{BA} + \alpha\ \overrightarrow{BC}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, donc Δ n'est pas perpendiculaire à (BC). On en déduit que si Δ est perpendiculaire à (BC), il

n'existe pas de point A solution.

3 - 2 Si Δ n'est pas perpendiculaire à (BC) et si A existe, le centre O du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle (ABC) appartient à Δ et à la médiatrice de [BC]. D'où la construction du cercle $\mathscr{C}$. Si U est donné sur la droite (BC), notons L la droite perpendiculaire à Δ passant par U. Si A existe, il appartient à L réciproquement, si L rencontre $\mathscr{C}$ en ce point A distinct de B et C, ce point est solution d'après I - 3.

Notons alors L_1 et L_2 les deux tangentes à $\mathscr{C}$ perpendiculaire à Δ et U_1 et U_2 les points d'intersection de L_1 et L_2 avec (BC)(U_1 et U_2 existent car Δ n'estpas perpendiculaire à (BC).

Si UE (BC) - $[U_1U_2]$, il n'y a pas de solution

Si UE $[U_1U_2]$ - $\{U_1, U_2, B, C\}$, il y a deux solutions

Si UE $\{U_1, U_2, B, C\}$, il y a une solution.

1.1 - 1 (figure 2)

D'après une remarque du I $\overrightarrow{BU} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et comme le triangle est rectangle en A, O est le milieu de [BC] :

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BO}$

$BU = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BO}$

donc C est sur la droite D_1 image de Δ par l'homothétie de centre B et de rapport 2 et U sur la droite D_2 image de Δ par l'homothétie de centre B et rapport 3.

1.2 - Si A existe H projection de A sur un diamètre est intérieur au cercle Γ de diamètre [BC] (circonscrit à ABC).

$OH < OB$

alors (théorème de Pythagore).

$UH^2 = UO^2 - OH^2$

$= 4OB^2 - OH^2 > 3OB^2 = \frac{UB^2}{3}$

soit $\frac{UB}{UH} \leq \sqrt{3}$

Réciproquement si $\frac{UB}{UH} \leq \sqrt{3}$ on a $OH < OB$ donc H intérieur à Γ, (UH) coupe Γ.

Soit A un point d'intersection.

Comme U est le barycentre de {(B,I), (C, -3)} l'ensemble des points M tels que φ (M) = 0 est la droite passant par O milieu de [BC] et orthogonale à (AU): c'est Δ donc A convient.

1.3 - U est donc à l'intérieur de l'hyperbole $\mathcal{H}$ de foyer B,de directrice associée Δ et d'excentricité $\sqrt{3}$.

Les sommets S et S' sont les barycentre de {(B,I), (S, $\sqrt{3}$)}

et {(B,I), (S, - $\sqrt{3}$)}

définis par $\vec{SB} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \vec{BI}$ soit $\vec{BS'} = \frac{\sqrt{3}}{H\sqrt{3}} \vec{BI}$

Le centre est Ω milieu de [SS']

$\vec{B\Omega} = \frac{1}{2} (\vec{BS} + \vec{BS'})$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{2}\right]\vec{BI}$

$= \frac{2.3}{4} \vec{BI} = \frac{3}{2} \vec{BI}$

Pour avoir les asymptotes on sait que les projections B_1 et B_2 du foyer B sur les asymptotes sont sur la directrice: donc on prend l'intersection du cercle de diamètre [SS'] et de Δ.

Pour avoir l'ensemble des points U il suffit alors de prendre les points de D_2 à l'intérieur de H (réciproque sans problème).

L'ensemble des C s'en déduit par l'homothétie de centre B et de rapport 2/3.

1.4- Soit t l'ordonnée de O dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$

on a les coordonnées

$B \left| \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\quad O \left| \begin{matrix} 0 \\ t \end{matrix} \right.$ $\quad C \left| \begin{matrix} -\alpha \\ 2t \end{matrix} \right.$ $\quad U \left| \begin{matrix} -2\alpha \\ 3t \end{matrix} \right.$ $\quad A \left| \begin{matrix} x \\ 3t = y \end{matrix} \right.$

Ecrivons que $\vec{BA} . \vec{CA} = 0$ (A sur le cercle de diamètre [BC])

$(x - \alpha)(x + \alpha) + 3t . t = 0$

$x^2 - \alpha^2 + 3t^2 = 0$

$$\boxed{x^2 + \frac{y}{3} = \alpha^2}$$

C'est l'équation d'une ellipse d'axes les axes du repère.

Elle passe par B et le symétrique de P par rapport à I.

Le problème est que l'enoncé dit "l'équation de l'ensemble" et non "l'ensemble".

Si on veut mettre la réciproque

Dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ B a pour coordonnées $(\alpha, 0)$. Soit (x,y) les coordonnées d'un point de l'ellipse précédente. Passons $t = y/_3$ et introduisons les points de coordonnées

$O \left| \begin{matrix} 0 \\ t \end{matrix} \right.$ $\quad C \left| \begin{matrix} -\alpha \\ 2t \end{matrix} \right.$ $\quad U \left| \begin{matrix} -2\alpha \\ 3t \end{matrix} \right.$

O est sur Δ et (UC) est bien orthogonale à Δ et le calcul précédent montre que $(BA, CA) = \pi/_2 \ (\pi)$ si $B \neq A$ et $C \neq A$, (i.e $t \neq 0$ donc $A \neq B$ et $A \neq B'$ symétrique de B par rapport à I).

Les points B, O, C, U sont bien alignés O est le milieu de [BC], U le barycentre de {(B,I), (C, -3)} et le triangle BAC est rectangle en A.

<u>2. 2.1</u> D'après une formule du I $\vec{BC} = 2\vec{BO}$

$$\vec{BU} = + \vec{BC}/3 = \frac{2}{3} \vec{BO}$$

donc C est sur la droite D1 image de Δ par l'homothétie de centre B et de rapport 2 et U sur D_2 image de Δ par l'homothétie de centre B et rapport 2/3.

<u>2.2</u> Si A existe, comme (AU) est orthogonale à Δ A est intersection de la perpendiculaire à Δ passant par U et du cercle de diamètre [BC].

Réciproquement Soit U sur D_2, C l'image de U par l'homothétie de centre B et rapport 3, U est sur [BC] donc la perpendiculaire à Δ passant par U coupe le cercle de diamètre [BC] en 2 points A et A'. Alors l'ensemble des points M tels que φ (M) = 0 est la droite passant par O et orthogonale à (AU): c'est Δ. Donc A et A' conviennent.

Il est clair alors que l'ensemble des points U est D_2 (privée de l'intersection avec (BI) pour que le triangle (ABC) soit non dégénéré).

2.3 Soit encore t l'ordonnée de O les coordonnées sont

$B\begin{vmatrix}\alpha\\0\end{vmatrix}$ $O\begin{vmatrix}0\\t\end{vmatrix}$ $U\begin{vmatrix}\alpha/3\\2t/3\end{vmatrix}$ $C\begin{vmatrix}-\alpha\\2t\end{vmatrix}$ $A\begin{vmatrix}x\\y = 2t/3\end{vmatrix}$

$$\vec{BA}.\vec{CA} = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(x + \alpha) - \frac{2t}{3}\frac{4t}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 - \frac{\gamma t^2}{9} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2y^2 = \alpha^2$$

équation d'une hyperbole d'axes les axes de repère et passant par B, les asymptotes ont pour équations $x = \pm\sqrt{2}\, y$.

3 - Comme précédemment

$$\vec{BC} = 2\vec{BO}$$
$$\vec{BU} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma} = -\vec{BC} = -2\vec{BO}$$

A est à la fois sur le cercle de diamètre [BC] et la perpendiculaire à Δ passant par U.

D'où la construction:

On prend O sur Δ, C tel que $\vec{BC} = 2\vec{BO}$ (O milieu de [BC]), U tel que $\vec{BU} = -\vec{BC}$ (B milieu de [UC], L perpendiculaire à Δ issue de U et Γ le cercle de centre O passant par B.

Si $L \cap \Gamma = \phi$: pas de solution.

Si L est tangente à Γ : une solution.

Si L coupe Γ en 2 points : deux solutions.

Soit K la projection orthogonale de U sur Δ, d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{OI}{OK} = \frac{OB}{OU} = 1/3$$

soit OK = 3OI

La condition d'existence est OK ≤ OB

soit $3OI < OB$

au $9OI^2 < OB^2 = OI^2 + IB^2$

au $8OI^2 \leq IB^2$

et $\boxed{OI \leq \dfrac{IB}{2\sqrt{2}}}$

L'ensemble des O est donc le segment de Δ des points de Δ à une distance au plus $\dfrac{IB}{2\sqrt{2}}$ de I.

Les ensembles de U et C s'en déduisent par les homothéties de centre B et de rapport -2 et 2 respectivement.

Calcul de l'équation de l'ensemble des points A.

Coordonnées :

$B \left| \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\quad O \left| \begin{matrix} 0 \\ t \end{matrix} \right.$ $\quad C \left| \begin{matrix} -\alpha \\ 2t \end{matrix} \right.$ $\quad U \left| \begin{matrix} 3\alpha \\ -2t \end{matrix} \right.$ $\quad A \left| \begin{matrix} x \\ y = -2t \end{matrix} \right.$

$\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{CA} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 + 8t^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = \alpha^2$

C'est l'équation d'une ellipse.

La figure n'est pas demandée explicitement.

Énoncé de la seconde composition du CAPES interne 1994

L'objectif du problème est d'étudier la convergence vers *la constance d'Euler* d'un certain nombre de suites et d'appliquer les résultats obtenus à la recherche d'une approximation du nombre moyen de diviseurs d'un entier. Quand les limites ci-dessous ont un sens, on notera :

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n}^{N} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \quad \text{et} \quad \lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Certaines démonstrations utilisent la propriété « triviale » des séries dites télescopiques :

$$\sum_{k=n}^{N}(r_k - r_{k+1}) = r_n - r_{N+1}.$$

La partie III est indépendante de la partie II. Elle utilise un résultat de la question 3.5. de la partie I.

PARTIE I

On considère les suites suivantes, définies pour n entier, $n \geq 1$, par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad u_n = S_n - \ln n.$$

1. Limite de la suite (u_n)

1.1. Montrer que pour tout k entier, $k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k-1}.$$

En déduire que $S_n \geq \ln n$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

1.2

1.2.1. On considère la fonction h qui à tout $x \geq 0$ associe $h(x) = x - \ln(x+1)$. Étudier le sens de variation de h et en déduire le signe de $h(x)$ quand x est positif.

1.2.2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et bornée. En déduire qu'elle admet une limite notée γ et que $\gamma \in [0,1]$. γ est appelé constante d'Euler.

2. Une première approximation de la vitesse de convergence

On pose $w_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{k}$ où k est un entier, $k \geq 2$.

2.1. Vérifier que $0 \leq w_k \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

2.2 Montrer que $u_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k$ et que $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} w_k = 1 - \gamma$.

2.3. On pose $r_n = S_n - \ln n - \gamma$. Montrer que $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} w_k$ et prouver que $0 \leq r_n \leq \dfrac{1}{n}$.

À partir de quelle valeur de n peut-on prétendre que u_n donne une approximation à 10^{-6} près de γ ?

3. On désire maintenant préciser le comportement de la suite (r_n)

3.1. Par des intégrations par parties successives, montrer que :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{(u+k-1)^4}\mathrm{d}u = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u}{(u+k-1)^2}.$$

3.2. Démontrer les égalités suivantes :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{(u+k-1)^4}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^2(1-u)^2}{(u+k-1)^5}\mathrm{d}u$$

$$\int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u}{(u+k-1)^2} = \int_{k-1}^{k} \frac{t-k+1}{t^2}\mathrm{d}t.$$

3.3. Montrer que :

$$w_k = \int_{k-1}^{k} \frac{t-k+1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$w_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{k-1}\right)^2 - \frac{1}{k^2}\right] + \int_0^1 \frac{[u(1-u)]^2}{(u+k-1)^5}\mathrm{d}u.$$

3.4. Montrer que si $u \in [0,1]$ alors $0 \leq u(1-u) \leq \dfrac{1}{4}$.

Établir l'inégalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{[u(1-u)]^2}{(u+k-1)^5}\,du \leq \frac{1}{16}\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^5}$.

3.5. En déduire les encadrements suivants :

$$0 \leq r_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{64n^4}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$$

$$0 \leq v_n - \gamma \leq \frac{1}{64n^4}$$

où $v_n = S_n - \ln n - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$.

3.6. À partir de quelle valeur de n la suite (v_n) donne-t-elle une approximation à 10^{-6} près de γ ?

PARTIE II

On va modifier la suite (u_n) en remplaçant $\ln n$ par $\ln\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$. Ce changement va augmenter la vitesse de convergence de la suite vers γ.
On pose $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$.

1. Étude préalable d'une fonction

On considère la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

1.1. Étudier le sens de variation de f et ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.

1.2. Montrer que $-f'(x) \leq \dfrac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^4}$. Démontrer par un raisonnement accessible à des élèves de terminale C ou E que l'expression

$$\int_k^{\infty} -f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} \int_k^X -f'(x)\mathrm{d}x$$

a un sens et que l'on peut écrire $f(k) = \displaystyle\int_k^{\infty} -f'(x)\mathrm{d}x \leq \dfrac{1}{12\left(k+\frac{1}{2}\right)^3}$.

2. Application à l'étude de la suite (x_n)

2.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma$.

2.2. Montrer que $x_k - x_{k+1} = f(k)$. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et que $x_n - \gamma = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$.

2.3. On veut majorer $f(k)$ par une expression facilement manipulable. Montrer d'abord que :

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 > k(k+1).$$

En déduire que :

$$\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^3} \leq \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}.$$

2.4. Déduire des questions précédentes la majoration suivante :

$$0 \leq x_n - \gamma \leq \frac{1}{24n^2}.$$

3. On veut obtenir une borne inférieure pour la quantité $x_n - \gamma$

3.1. Montrer que :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right) < (x+1)^2.$$

3.2. Par une étude identique à celle de la question **1.2.**, démontrer que :

$$f(k) \geq \frac{1}{4}\int_k^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^4} = \frac{1}{12(k+1)^3}.$$

3.3. Déduire de ce qui précède que :

$$x_n - \gamma \geq \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} \geq \frac{1}{12}\int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{24(n+1)^2}.$$

4. À partir de quelle valeur de n, x_n donne-t-il une approximation à 10^{-6} près de γ ?

5. Cette question est plus difficile que les précédentes. Il est fortement conseillé de ne la traiter qu'après la partie **III.** Cependant sa place logique est dans cette partie. On désire améliorer la rapidité de convergence vers γ. À partir du résultat précédent on conjecture que la suite $t_n = x_n - \dfrac{1}{24\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}$ conviendra. Pour trouver sa vitesse de convergence vers γ, on s'inspire des méthodes utilisées précédemment.

5.1. On considère la fonction g définie pour $x \geq 0$ par :

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{24\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{24\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2}.$$

Vérifier que :

$$t_n - t_{n+1} = g(n)$$

$$\gamma - t_n = \sum_{k=n}^{\infty} -g(k)$$

$$\frac{7}{48}\frac{1}{(x+1)^6} \leq g'(x) \leq \frac{7}{48}\frac{1}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^6}$$

$$\frac{7}{240}\frac{1}{(k+1)^5} \leq -g(k) \leq \frac{7}{240}\frac{1}{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^5}.$$

5.2. Soit φ une fonction convexe admettant une dérivée seconde continue sur un intervalle I contenant l'intervalle $[k, k+1]$. On sait que $\varphi''(x) \geq 0$ quel que soit $x \in I$ et que la courbe représentative de φ est située au-dessus de l'une quelconque de ses tangentes.

Démontrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(x)\mathrm{d}t \geq \varphi\left(k+\frac{1}{2}\right)$.

On pourra illustrer géométriquement ce résultat. Appliquer cette propriété pour $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^5}$.

5.3. Déduire des questions précédentes que :

$$\frac{7}{960(n+1)^4} \leq \gamma - t_n \leq \frac{7}{960n^4}.$$

À partir de quelle valeur de n, t_n donne-t-il une approximation à 10^{-6} près de γ ?

PARTIE III

On considère un entier $n \geq 1$. On dit que l'entier x est un diviseur de n s'il existe un entier y tel que $x \cdot y = n$. On appelle $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. On a ainsi $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(3) = 2$, $d(4) = 3$; etc.

On pose $\overline{d}(n) = \dfrac{1}{n}[d(1) + d(2) + \ldots + d(n)]$ le nombre moyen de diviseurs de n.

En suivant une méthode proposée en 1849 par Lejeune-Dirichlet, on cherche une approximation de $\overline{d}(n)$.

1. Une première approximation de $\overline{d}(n)$

1.1. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe $(H8)$ d'équation $xy = 8$ sur l'intervalle $[1, 8]$. Soit D_n le domaine défini par $1 \leq x \leq n$, $0 < y \leq n$, $xy \leq n$.

Quelle relation peut-on établir entre le nombre de points à coordonnées entières de D_n et la quantité $d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$? Illustrer la situation précédente quand $n = 8$.

1.2. En s'inspirant du croquis précédent, montrer que :

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(n) - n \leq \int_1^n \frac{n}{x} \mathrm{d}x \leq d(1) + d(2) + \ldots + d(n) + n.$$

En déduire que $-1 \leq \overline{d}(n) - \ln n \leq 1$.

2. Une deuxième approximation de $\overline{d}(n)$

Pour compter le nombre de points à coordonnées entières de D_n on s'intéresse aux segments suivants : $x = k$, $0 < y \leq \dfrac{n}{x}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Soit $E(x)$ la partie entière de x. On a donc $x - 1 < E(x) \leq x$.

2.1. Montrer que $n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - n < d(1) + \ldots + d(n) \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et donc que $u_n - 1 < \overline{d}(n) - \ln n \leq u_n$ où (u_n) est la suite définie dans la partie **I.**

2.2. En déduire que quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\gamma - 1 \leq \overline{d}(n) - \ln n \leq \gamma + \varepsilon$.

3. Une troisième approximation de $\overline{d}(n)$

On pose $q = E(\sqrt{n})$ et on considère le point Q de coordonnées (q, q).

3.1. Montrer que Q appartient à D_n et qu'il n'existe pas dans D_n de points à coordonnées entières tels que les deux coordonnées de ces points soient strictement plus grandes que q.

3.2. Montrer que

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(n) = 2\left[E\left(\frac{n}{1}\right) + E\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{q}\right)\right] - q^2.$$

3.3. Établir la double inégalité suivante :

$$n\sum_{1}^{q}\frac{1}{k}-q \leq E\left(\frac{n}{1}\right)+E\left(\frac{n}{2}\right)+\ldots+E\left(\frac{n}{q}\right) \leq n\sum_{1}^{q}\frac{1}{k}.$$

En déduire :

$$2\,u_q-\frac{q^2}{n}+\ln\frac{q^2}{n}-\frac{2q}{n} \leq \overline{d}(n)-\ln n \leq 2\,u_q-\frac{q^2}{n}+\ln\frac{q^2}{n}.$$

3.4. On admettra que quel que soit u, $u \geq -\frac{1}{2}$, on a $u-u^2 \leq \ln(1+u)$.

Montrer que $-\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n} \leq \ln\frac{q^2}{n} \leq 0$ dès que $n \geq 4$.

Établir les inégalités suivantes : $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n}$, $\frac{1}{q+1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}$.

3.5. Montrer que $-\frac{3}{\sqrt{n}}-\frac{3}{n} \leq \overline{d}(n)-\ln n-(2\gamma-1) \leq \frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{4}{n}$.

Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

Cl. Piquet
27.12.99

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1994

PARTIE I

1.1. Résulte de la décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$:
si $k-1 \leq t \leq k$, on a $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k-1}$, d'où l'encadrement demandé qui s'écrit aussi $\dfrac{1}{k} \leq \ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right) \leq \dfrac{1}{k-1}\cdot$ En sommant sur k de 2 à n, il vient $S_n - 1 \leq \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$, d'où $S_n \geq \ln n + \dfrac{1}{n} \geq \ln n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

1.2.1. La fonction h est continue dérivable sur $[0, +\infty[$; on a
$h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$ qui est donc positive sur $]0, +\infty[$. Il en résulte que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; comme $h(0) = 0$, on voit que $h(x) > 0$ si $x > 0$.

1.2.2. On a $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right) \geq 0$ $(n \geq 2)$ d'après l'encadrement du 1.1. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, donc convergente vers un réel $\gamma \geq 0$; comme $u_1 = 1$, on a aussi $\gamma \leq 1$.

2.1. C'est une réécriture du 1.1.

2.2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k = \ln n - (S_n - 1)$ donne $u_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k$. Par définition de la convergence d'une série, $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ signifie que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} w_k = 1 - \gamma$.

2.3. On a $r_n = u_n - \gamma = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$ d'après la question précédente. Le 2.1. donne alors $0 \leq r_n \leq 1/n$.
On aura $r_n < 10^{-6}$ si $n > 10^6$, ce qui est énorme. On obtient alors une approximation par excès de γ.

3.1. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{(u+k-1)^4}\,du &= -\frac{1}{6}\Big[\frac{u(1-u)(1-2u)}{(u+k-1)^3}\Big]_0^1 + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\big(u(1-u)(1-2u)\big)'}{(u+k-1)^3}\,du \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1-6u+6u^2}{(u+k-1)^3}\,du \\
&= -\frac{1}{12}\Big[\frac{1-6u+6u^2}{(u+k-1)^2}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2u-1}{(u+k-1)^2}\,du \\
&= \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) + \int_0^1 \frac{u\,du}{(u+k-1)^2}
\end{aligned}$$

3.2. La première égalité résulte à nouveau d'une intégration par parties ; en effet, $\left(u^2(1-u)^2\right)' = 2u(1-u)(1-2u)$ et la partie tout intégrée est nulle. La seconde égalité résulte immédiatement du changement de variable
$u = t - k + 1$.

3.3. On a $(k-1)\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = (k-1)(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$, d'où le premier résultat. D'après 3.2., il vient alors $w_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{t-k+1}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{u\,du}{(u+k-1)^4}\cdot$ On utilise 3.1. pour écrire

$$w_k = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) - \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{(u+k-1)^4}\,du\,.$$

La première égalité du 3.2. donne l'égalité demandée.

3.4. Résultat classique qui résulte des variations sur $[0,1]$ de $u \mapsto u(1-u)$ (cette fonction positive est maximale pour $u = \frac{1}{2}$). On a donc

$$0 \le \int_0^1 \frac{\big(u(1-u)\big)^2}{(u+k-1)^5}\,du \le \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^5} = \frac{1}{16}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^5}\cdot$$

3.5. La seconde égalité de la question 3.3. donne, compte-tenu de la majoration établie en 3.4. :

$$0 \le w_k - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) + \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big) \le \frac{1}{16}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^5}\cdot$$

On somme en k de $n+1$ à $+\infty$ pour obtenir, en tenant compte de la question 2.3. qui a donné $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$, $0 \le r_n - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2} \le \dfrac{1}{16}\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^5}\cdot$ Cette intégrale impropre est convergente et vaut $1/64n^4$, ce qui donne le premier encadrement demandé. On a $u_n - \gamma = r_n$ et $64n^4 > 12n^2$, donc $r_n \le 1/2n$. On a aussi $r_n \ge \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} = \dfrac{1}{2n}(1 - \dfrac{1}{6n})\cdot$ Or $n \ge 1$ donne $6n \ge n+1$, donc $1 - \dfrac{1}{6n} \ge 1 - \dfrac{n}{n+1}$ d'où $r_n \ge \dfrac{1}{2(n+1)}$, ce qui établit le deuxième encadrement.
Le troisième encadrement n'est que la réécriture du premier car $u_n - \gamma = r_n$.

3.6. v_n sera une approximation par excès de γ à 10^{-6} près si $64n^4 > 10^6$, soit $4\log_{10} n > 6 - \log_{10}(64)$, ce qui donne $n \ge 12$. Dès que $n \ge 12$, v_n est une approximation par excès de γ à 10^{-6} près.

PARTIE II

1.1. f est définie sur $[0, +\infty[$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(x+1)^2(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})}\cdot$$

f est donc monotone décroissante. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{2x+3}{2x+1} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. D'autre part, $f(0) = \ln 3 - 1$: lorsque x varie de 0 à $+\infty$, f décroit de $\ln 3 - 1$ à O. En particulier, f est (strictement) positive.

1.2. La majoration proposée est équivalente à $(x+\frac{1}{2})^3 \le (x+1)^2(x+\frac{3}{2})\cdot$ Or, pour $x \ge -\frac{1}{2}$, $0 \le (x+\frac{1}{2})^2 \le (x+1)^2$ et $0 \le (x+\frac{1}{2}) \le (x+\frac{3}{2})$; on a donc le résultat en effectuant le produit.

La fonction $-f'$ est positive et majorée par $1/4(x+\frac{1}{2})^2$. Il en résulte que la fonction $F : X \mapsto \int_k^X -f'(x)\,dx$ est croissante ($X > k$ = entier naturel) ; de plus, cette fonction est majorée par

$$\int_k^X \frac{dx}{4(x+\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{12}\Big[\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^3}\Big]_k^X \leq \frac{1}{12(k+\frac{1}{2})^3}$$

qui est une constante (indépendante de X). Ceci démontre l'existence de $\lim_{X\to+\infty} F(X)$ et sa majoration par $\frac{1}{12(k+\frac{1}{2})^3}$.

L'intégrale impropre $\int_k^{+\infty} -f'(x)\,dx$ existe donc et comme $\int_k^X -f'(x)\,dx$ vaut $f(k)-f(X)$ et que $\lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$ (voir 1.1.), on a le résultat demandé :

$$f(k) = \int_k^{+\infty} -f'(x)dx \leq \frac{1}{12(k+\frac{1}{2})^3}\,.$$

2.1. On a $u_n - x_n = \ln(1+\frac{1}{2n})$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{2n}) = 0$, donc, (u_n) étant convergente vers γ, il en va de même de (x_n).

2.2. La première égalité résulte de la définition de f ; f étant positive, (x_n) est décroissante. Par sommation sur k de n à $+\infty$ on obtient la seconde égalité.

2.3. La vérification de la première minoration est triviale. Il en résulte que $(k+\frac{1}{2})^4 > \big(k(k+1)\big)^4$, soit

$$\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} \leq \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\Big) = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^3}\,.$$

2.4. On a donc $f(k) \leq \frac{1}{12}\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^3}$, d'où, grâce à la deuxième égalité du 2.2.,

$$0 \leq x_n - \gamma \leq \frac{1}{12}\int_k^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{24n^2}$$

3.1. Se vérifie par le calcul.

3.2. On a donc $4(x+1)^2(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2}) \leq 4(x+1)^4$, d'où $-f'(x) \geq \frac{1}{4(x+1)^2}$ et, comme en 1.2, $f(k) \geq \frac{1}{4}\int_k^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^4} = \frac{1}{12(k+1)^3}\,.$

3.3. Il en résulte que $x_n - \gamma \geq \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\cdot$ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ étant décroissante, on a $\int_{k+1}^{k+2} \leq \frac{1}{(k+1)^3}$, donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3} \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{(n+1)^3} \qquad \text{et} \qquad x_n - \gamma \geq \frac{1}{24(n+1)^2}\,.$$

4. On aura $0 < x - \gamma < 10^{-6}$ dès que $24n^2 > 10^6$, soit $n \geq 205$. On peut affirmer que l'approximation de rang 203 est insuffisante car $x_{203} - \gamma \geq \dfrac{1}{24 \times 204^2} > 10^{-6}$.

Par contre, l'*encadrement* $x_n - \dfrac{1}{24(n+1)^2} \geq \gamma \geq x_n - \dfrac{1}{24n^2}$ assure une précision supérieure à 10^{-6} dès que $n \geq 44$. Un calcul simple donne alors

$$0{,}577\,215\,18 < \gamma < 0{,}577\,216\,13\,.$$

5.1. $t_n - t_{n+1} = g(n)$ est une simple vérification (on utilise 2.2.). Il est évident que les suites (t_n) et (x_n) ont même limite γ ; en sommant les égalités précédentes de n à l'infini, on obtient $\gamma - t_n = \sum_{k=n}^{+\infty} -g(k)$ ainsi que la convergence de cette dernière série.

On a $g'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{12(x+\frac{1}{2})^3} - \dfrac{1}{12(x+\frac{3}{2})^3}\cdot$ On réduit au même dénominateur ; ce dernier vaut $12(x+1)^2(x+\dfrac{1}{2})^3(x+\dfrac{3}{2})^3 \geq 12(x+1)^2(x+\dfrac{1}{2})^6$ tandis que le numérateur s'écrit $(3x^2+6x+\dfrac{13}{4})(x^2+2x+1) - 3(x^2+2x+\dfrac{3}{4}) = \dfrac{7}{4}(x+1)^2 - \dfrac{3}{16} < \dfrac{7}{4}(x+1)^2\cdot$ On en tire la majoration demandée.

La minoration est, quant à elle, plus laborieuse à obtenir. On pose $y = x+1$; on veut vérifier que $\dfrac{7y^2 - \frac{3}{4}}{48y^2(x+\frac{1}{2})^3(x+\frac{3}{2})^3} \geq \dfrac{7}{48y^6}$, c'est à dire que $y^4(7y^2 - \dfrac{3}{4}) \geq 7(y^2 - \dfrac{1}{4})^3$; cette inégalité est équivalente à $18y^4 - \dfrac{21}{4}y^2 + \dfrac{7}{16} \geq 0$ qui est exacte car $21^2 < 7 \times 18 \times 4$. On a donc bien vérifié l'encadrement donné pour $g'(x)$. On en déduit, par intégration en x de k à $+\infty$ l'encadrement donné pour $-g(k)$.

5.2. La tangente en $k+\frac{1}{2}$ à la courbe représentative de φ a pour équation $y - \varphi(k+\frac{1}{2}) = \big(x - (k+\frac{1}{2})\big)\varphi'(k+\frac{1}{2})\cdot$ Comme φ est convexe, $\varphi(x) \geq v(k+\frac{1}{2}) + \big(x-(k+\frac{1}{2})\big)\varphi'(k+\frac{1}{2})$, d'où $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(x)\,dx \geq \varphi(k+\frac{1}{2})\cdot$ Et comme $\varphi(x) = 1/x^5$ est aussi décroissante, $\dfrac{1}{k^5} \geq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^5} \geq \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^5}$.

k k+1

5.3. On a donc

$$\frac{7}{240}\int_{k+1}^{k+2}\frac{dx}{x^5} \leq \frac{7}{240}\cdot\frac{1}{(k+1)^5} \leq -g(k) \leq \frac{7}{240}\cdot\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^5} \leq \frac{7}{240}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^5}\,.$$

Comme $\gamma - t_n = \sum_{k=n}^{+\infty} -g(k)$, on obtient l'encadrement

$$\frac{7}{240}\sum_{k=n}^{+\infty}\int_{k+1}^{k+2}\frac{dx}{x^5} \leq \gamma - t_n \leq \frac{7}{240}\sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^5}$$

soit

$$\frac{7}{960(n+1)^4} \leq \gamma - t_n \leq \frac{7}{960n^4}\,.$$

Comme on dispose d'un encadrement, on aura une valeur de γ à 10^{-6} près dès que $\dfrac{7}{960n^4} - \dfrac{7}{960(n+1)^4} < 10^{-6}$. Comme

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 < 4(n+1)^3\,,$$

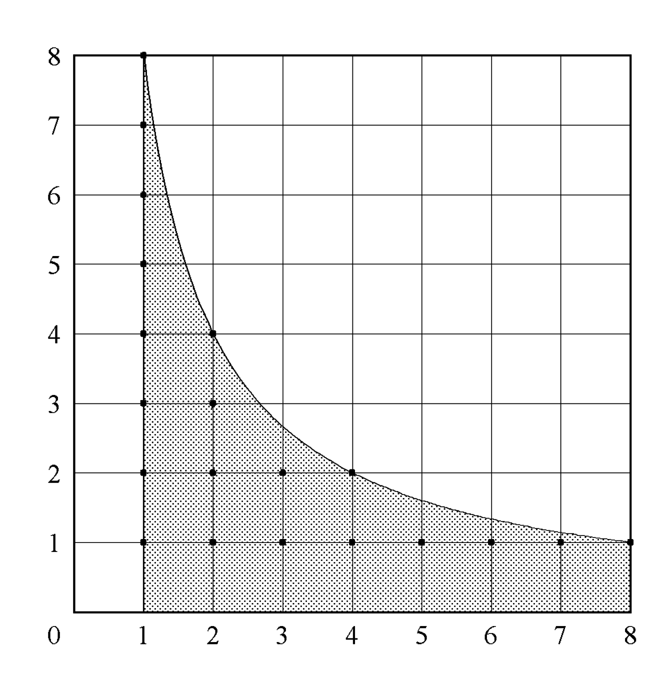
la condition précédente sera réalisée si $\dfrac{7}{n^4(n+1)} < 240 \times 10^{-6}$ ou encore si $700\,000 < 24n^5$. Il est facile de vérifier que cette condition est réalisée dès que $n \geq 8$. On obtient alors

$$0,577\,215\,66 < \gamma < 0,577\,215\,67\,.$$

PARTIE III

1.1. Soit (p,q) un point à coordonnées entières de D_n ; ceci implique que $pq \leq n$, donc que p (et q) est un diviseur d'un entier $\leq n$. Inversement, si p entier ≥ 1 divise un entier $m \leq n$, il existe $q \geq 1$ tel que $pq = m \leq n$, donc (p,q) appartient à D . Il y a donc bijection entre les diviseurs des entiers $\leq n$ et les points à coordonnées entières de D_n. Ce nombre de points est donc

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = n\overline{d}(n)\,.$$



1.2. Soit (p,q) un point à coordonnées *entières* de D_n ; on a donc $p,q \geq 1$ et le carré $[p-1,p]\times[q-1,q]$ est inclus dans D_n sauf si $p=1$; on a donc l'inclusion $\bigcup_{p=1}^{n}\bigcup_{q=1}^{n}[p-1,p]\times[q-1,q] \subseteq D_n \bigcup_{p=1}^{\infty}[0,1]\times[0,n]$, d'où, en prenant les aires des deux membres,

$$d(1) + d(2) + ... + d(n) \leq \text{aire}(D_n) + n = \int_1^n \frac{n}{x}\,dx + n\,.$$

Si $(x,y) \in D_n$, on pose $p = E(x)$ et $q = E(y)$; alors $p \geq 1$ et $q \geq 0$ et $(x,y) \in [p,p+1]\times[q,q+1]$, donc $D_n \subseteq \bigcup_{p=1}^{n}\bigcup_{q=1}^{n}[p,p+1]\times[q,q+1]$ et $(p,q) \in D_n$ si $q \geq 1$. Les n carrés $[p,p+1]\times[0,1]$ ont pour aire n, d'où, comme précédemment,

$$\text{aire}(D_n) = \int_1^n \frac{n}{x}\,dx \leq d(1) + d(2) + \cdots + d(n) + n\,.$$

Il en résulte, en divisant par n, que $-1 \leq \overline{d}(n) - \ln n \leq 1$.

2.1. Si l'entier y vérifie $0 < y \leq \frac{n}{k}$, on a $1 \leq y \leq E(\frac{n}{k})\cdot$ Le nombre de points de l'intersection de la droite d'abscisse k avec D_n est donc $E(\frac{n}{k})\cdot$ On a donc $n\overline{d}(n) = \sum_{k=1}^{n} E(\frac{n}{k})\cdot$ Or $\frac{n}{k} - 1 < E(\frac{n}{k}) \leq \frac{n}{k}$, donc

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) - 1 < \overline{d}(n) \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big)$$

ou encore $u_n - 1 < \overline{d}(n) - \ln n \leq u_n$.

2.2. On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma$ et que (u_n) est décroissante (I.1.2.2.). On a donc

$$\gamma - 1 \leq u_n - 1 < \overline{d}(n) - \ln n \qquad \text{et} \qquad 0 < u - \gamma \leq \varepsilon$$

à partir d'un certain rang N, ce qui démontre l'encadrement demandé.

3.1. $q \leq \sqrt{n}$ implique $q^2 \leq n$, donc Q appartient à D_n. Si (x, y) est un point à coordonnées entières telles que $x > q$ et $y > q$, alors $x \geq q + 1 > \sqrt{n}$ et, de même, $y > \sqrt{n}$, donc $xy > n$ et (x, y) n'appartient pas à D_n.

3.2. On a déjà établi $d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = \sum_{k=1}^{n} E(\frac{n}{k})\cdot$ On utilise la symétrie de D_n par rapport à la première bissectrice : on note A_n l'ensemble des points (x, y) de D_n tels que $1 \leq x \leq q < y$, B_n le symétrique, ensemble des points de D_n tels que $1 \leq y \leq q < x$ et C_n celui constitué des points de D_n tels que $1 \leq x,\ y \leq q$. Ces trois ensembles sont disjoints et constituent, d'après 3.1., une partition de D_n ; il en résulte que si $\#(A_n)$ est le nombre d'éléments de A_n, $\#(B_n) = \#(A_n)$, donc $\#(D_n) = 2\#(A_n) + \#(C_n)$. Ce dernier ensemble compte q^2 éléments tandis que $\#(B_n) = \sum_{k=1}^{q} E(\frac{n}{k})\cdot$ Il en résulte que

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = 2\sum_{k=1}^{q} E(\frac{n}{k}) - q^2\,.$$

3.3. Le premier encadrement résulte immédiatement de la définition de la partie entière :

$$\frac{n}{k} - 1 < E(\frac{n}{k}) \leq \frac{n}{k}\cdot$$

On tire alors de l'égalité du 3.2.

$$2\sum_{k=1}^{q} E(\frac{1}{k}) - \frac{q^2}{n} - 2\frac{q}{n} \leq \overline{d}(n) \leq 2\sum_{k=1}^{q} E(\frac{1}{k}) - \frac{q^2}{n} \qquad \text{d'où}$$

$$2u_q - \frac{q^2}{n} + \ln(\frac{q^2}{n}) - 2\frac{q}{n} \leq \overline{d}(n) - \ln n \leq 2u_q - \frac{q^2}{n} + \ln(\frac{q^2}{n})$$

3.4. La relation $u - u^2 \leq \ln(1 + u)$ pour $u \geq -\frac{1}{2}$ est facile à démontrer par une étude de variations de fonction.

On a évidemment $q^2 \leq n$, donc $\ln(\frac{q^2}{n}) \leq 0$. D'autre part, $\ln(\frac{q^2}{n}) = 2\ln(\frac{q}{\sqrt{n}})$; or $q > \sqrt{n} - 1$, donc $\frac{q}{\sqrt{n}} > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec $-\frac{1}{\sqrt{n}} \geq -\frac{1}{2}$ si $n \geq 4$. Comme la fonction ln est croissante, on a

$$\ln(\frac{q^2}{n}) \geq 2\ln(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq -\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}$$

d'où, pour $n \geq 4$,

$$-\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} \leq \ln(\frac{q^2}{n}) \leq 0\,.$$

De $\sqrt{n} - 1 < q \leq \sqrt{n}$ on tire

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{\sqrt{n}-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{n}-1}\Big) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}$$

car $2\sqrt{n}(\sqrt{n}-1) \geq n$ dès que $n \geq 4$.
On a aussi

$$\frac{1}{q+1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\Big) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\cdot$$

On vérifie *à la main* que les inégalités précédentes restent valables si $n = 1$, 2 ou 3.

3.5. On tire alors de l'encadrement du 3.3, compte-tenu de I.3.5.,

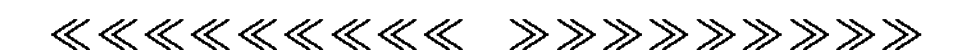
$$\overline{d}(n) - \ln n \leq 2\gamma + \frac{1}{q} - \frac{q^2}{n} \leq 2\gamma + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} - 1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} = (2\gamma - 1) + \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{d}(n) - \ln n &\geq 2\gamma + \frac{1}{q+1} - \frac{q^2}{n} + \ln(\frac{q^2}{n}) - 2\frac{q}{n}\\ &\geq 2\gamma + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} - 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} = (2\gamma - 1) - \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{3}{n}\,.\end{aligned}$$

On a donc en définitive, pour tout entier naturel n,

$$-\frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{3}{n} \leq \overline{d}(n) - \ln n - (2\gamma - 1) \leq \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\cdot$$



ÉNONCÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1995

I. Une observation empirique.

Dans le papyrus de Rhind datant environ de 1800 avant J.-C., le scribe Ahmès indique que l'aire du cercle est égale à l'aire du carré dont le côté est le diamètre du cercle diminué de 1/9.

1. Quelle fraction le scribe Ahmès propose-t-il comme approximation de π ?

   Quelle est l'erreur commise ?

2. Les Égyptiens ne connaissaient pas la numération décimale de position. Ils utilisaient les entiers et leurs inverses. On cherche la meilleure approximation de $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$ qui puisse s'écrire sous la forme $a \pm \dfrac{1}{b}$ où a et b sont des entiers naturels. Montrer que celle-ci a été obtenue par Ahmès.

II. Quelques préliminaires.

1. *Étude de la fonction* Arc tg x.

   On considère la fonction $u \longmapsto \operatorname{tg} u$ avec $u \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Cette fonction est continue, strictement croissante et $\operatorname{tg} u \longrightarrow \pm\infty$ quand $u \longrightarrow \pm\dfrac{\pi}{2}$. Il en résulte que, quel que soit x réel, il existe un unique nombre $u \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\operatorname{tg} u = x$.

   On pose $\operatorname{Arc\,tg} x$ la solution de l'équation en u : $\operatorname{tg} u = x$.

   On a donc : $\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} x) = x$.

   a. Donner les valeurs de $\operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\operatorname{Arc\,tg} 1$, $\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{3}$.

   b. On sait que la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arc\,tg} x$, $x \in \mathbb{R}$, est dérivable. Calculer sa dérivée.

   c. Montrer que $\operatorname{Arc\,tg} x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

   d. Montrer que, quel que soit t réel et n entier, on peut écrire :

   $$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

   En déduire que :

   $$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   e. Montrer que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ $(x > 0)$.

   On sait que si $t \longmapsto f(t)$ est une fonction paire, alors $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction impaire. En déduire que :

   $$\left|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

f. On pose $S_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Déduire des questions précédentes que quel que soit x, $|x| \leqslant 1$,

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \operatorname{Arc\,tg} x.$$

2. *Étude d'une fraction rationnelle.*

a. Montrer que $\frac{t^4}{1+t^2} = t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}$.

b. Montrer que i et $-i$ sont racines du polynôme $(1-t)^4 + 4$.
En déduire l'existence d'un polynôme P tel que :

$$(1-t)^4 + 4 = (t^2+1)\,P(t).$$

Déterminer P.

c. Déduire de ce qui précède que :

$$\frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} = t^2(1-t)^4 - (1-t)^4 + t^2 - 4t + 5 - \frac{4}{1+t^2}.$$

3. *Une égalité bien commode.*

On admettra, sans démonstration, le résultat suivant bien connu de ceux qui ont fait du calcul des probabilités :

$$\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta \, dt = \frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}.$$

α et β sont des entiers positifs ou nuls.

(*N.B. :* la démonstration est simple, il suffit de se ramener à α ou β égal à 1 à l'aide d'intégrations par partie.)

III. Un encadrement de $\frac{22}{7} - \pi$.

Par des méthodes purement géométriques mettant en jeu les polygones réguliers à 6, 12, 24, 48, 96 côtés, Archimède démontre la double inégalité suivante : $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$.

Ainsi pour lui, $0 < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{497}$. On va essayer, par des méthodes analytiques, de trouver un encadrement de $\frac{22}{7} - \pi$.

1. On considère la fonction $r(t) = t(1-t)$, $t \in [0, 1]$.

Montrer que $0 \leqslant r(t) \leqslant \frac{1}{4}$ quel que soit $t \in [0, 1]$.

2. Soient f, g, h les fonctions définies par :

$$f(t) = \frac{t^4(1-t)^4}{2} \qquad g(t) = \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} \qquad h(t) = \frac{t^2(1-t)^2}{16}.$$

Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$f(t) \leqslant g(t) \leqslant h(t).$$

3. Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^1 f(t)\,dt$, $\int_0^1 g(t)\,dt$, $\int_0^1 h(t)\,dt$.

   On pourra utiliser les résultats du II.2 et du II.3.

4. En déduire un encadrement de $\frac{22}{7} - \pi$.

   Quel est le nombre de décimales exactes de π fournies par l'approximation $\frac{22}{7}$?

IV. La formule de John Machin.

1. On se propose d'établir la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{5} - \text{Arc tg } \frac{1}{239}.$$

   On rappelle que l'on a : $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$.

   a. Calculer $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. Vérifier que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)$.

   b. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$ ($\alpha = \text{Arc tg } \frac{1}{5}$).

   Montrer que $\frac{\pi}{16} < \alpha < \frac{\pi}{8}$.

   c. Calculer $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$, $\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire la formule de John Machin.

2. On reprend les notations et données du II.1.*e* et *f* :

$$\text{Arc tg } x = S_n(x) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

   a. Montrer que $S_{2p+1}(x) < \text{Arc tg } x < S_{2p}(x)$ pour tout x tel que $0 < x \leqslant 1$.

   b. Montrer que $S_{2p}(x)$ est une suite décroissante et $S_{2p+1}(x)$ une suite croissante quand x est tel que $0 < x \leqslant 1$.

3. La méthode d'approximation de la question précédente permet de donner une valeur approchée de $\text{Arc tg } x$ pour $0 < x \leqslant 1$. On peut en tirer des valeurs approchées de $4 \text{ Arc tg } \frac{1}{5}$ et $\text{Arc tg } \frac{1}{239}$ à $0{,}5 \cdot 10^{-d}$ près.

   Montrer qu'à partir du rang $n_0 \geqslant \dfrac{d}{2 \log_{10} 5}$, les valeurs $4\,S_n\left(\frac{1}{5}\right)$, $n \geqslant n_0$, approchent $4 \text{ Arc tg } \frac{1}{5}$ à $0{,}5 \cdot 10^{-d}$ près et de même qu'à partir du rang $n_1 \geqslant \dfrac{d}{2 \log_{10} 239}$, les valeurs $S_n\left(\frac{1}{239}\right)$ approchent $\text{Arc tg } \frac{1}{239}$ à $0{,}5 \cdot 10^{-d}$ près. En déduire une condition suffisante pour obtenir une valeur approchée de π à 10^{-d} près.

4. Donner, en utilisant la formule précédente, un développement décimal de π avec 12 décimales exactes. On présentera la suite des calculs dans un tableau. Une attention particulière sera portée aux valeurs approchées décimales de chaque terme de la somme.

V. Utilisation de la méthode de Holme et Papadimitriou.

A. *Des formules célèbres.*

On va démontrer par des méthodes élémentaires que :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{où} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Rappeler la formule de Moivre relative à l'expression $(\cos\theta + i \sin\theta)^p$ et la formule donnant le développement du binôme de Newton : $(a + b)^p$. En déduire que :

$$\sin(2n+1)\theta = \sin^{2n+1}\theta \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} (\operatorname{cotg}^2\theta)^{n-j}.$$

2. On considère le polynôme $P_n(X)$ de degré n donné par :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} X^{n-j}.$$

Montrer que $P_n(X)$ admet pour racines les nombres réels :

$$\alpha_1 \dots \alpha_n \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

3. On se place dans l'ensemble des complexes.

Le polynôme $Q(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$ admet n racines $x_1, x_2, \dots x_n$.

On sait que :

$$Q(X) = a_0 (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n).$$

a. En déduire par identification que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sum_{i<j}\sum x_i x_j = \frac{a_2}{a_0}.$$

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2 \sum_{i<j}\sum x_i x_j$.

En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ en fonction de a_0, a_1, a_2.

c. On applique les résultats précédents au polynôme P_n.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg}^4 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}.$$

4. On sait que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\sin\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta$.

En déduire que $\operatorname{cotg}^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \operatorname{cotg}^2\theta$

$$\operatorname{cotg}^4\theta < \frac{1}{\theta^4} < 1 + 2\operatorname{cotg}^2\theta + \operatorname{cotg}^4\theta.$$

5. Démontrer que :

$$\frac{\pi^2}{3}\,\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3}\,\frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}.$$

En déduire que $\zeta(2) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Démontrer de même que :

$$\frac{\pi^4}{45}\,\frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{(2n+1)^4} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} \leqslant \frac{\pi^4}{45}\,\frac{n(2n-1)(4n^2+10n+21)}{(2n+1)^4}.$$

En déduire que $\zeta(4) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

7. On veut chercher une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à partir du calcul de la somme $A_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. On pose :

$$R_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2}.$$

a. Montrer que $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$ puis que $\int_{n+1}^{N+1}\frac{dx}{x^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^N \frac{dx}{x^2}$

n entier strictement positif.

b. En déduire que :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}$$

et que :

$$0 \leqslant \frac{\pi^2}{6} - A_n - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}.$$

c. Trouver une valeur n_0 à partir de laquelle $A_{n_0} + \frac{1}{n_0+1}$ est une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-4} près.

B. *Accélération de la convergence.*

On va décomposer $\frac{1}{n^2}$ en une somme de termes dont tous, sauf le terme complémentaire, sont termes généraux de séries télescopiques.

1. On considère les nombres $a_n^k = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)}$, n et k sont des entiers, il y a $k+1$ termes au dénominateur.

   a. Soit k entier donné, trouver les nombres α et β tels que quel que soit n entier :

$$a_n^k = \alpha\, a_n^{k-1} - \beta\, a_{n+1}^{k-1}.$$

   b. Montrer que $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^k = \frac{1}{k\,k!}$.

2. On veut écrire pour tout n entier :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + \frac{c}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + d_n$$

avec $n^4 d_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

   a. Montrer que a, b, c sont donnés par :

$$a = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1},$$

$$b = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{a}{n(n+1)}\right] n(n+1)(n+2),$$

$$c = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{a}{n(n+1)} - \frac{b}{n(n+1)(n+2)}\right] n(n+1)(n+2)(n+3).$$

   b. Calculer a, b, c et démontrer que :

$$d_n = \frac{6}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

3. Déduire de ce qui précède que :

$$\frac{\pi^2}{6} = a + \frac{b}{4} + \frac{c}{18} + \sum_{n=1}^{N} d_n + \sum_{N+1}^{\infty} d_n.$$

(Où on pose $\sum_{N+1}^{\infty} d_n = \lim_{m \to \infty} \sum_{N+1}^{m} d_n$).

4. On veut trouver à partir de l'expression précédente une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$. Pour cela il nous faut encadrer le terme $\sum_{N+1}^{\infty} d_n$ par des valeurs connues.

a. Montrer que pour $x \geqslant 3$ on a :

$$(x+1)^5 \leqslant x^2(x+1)(x+2)(x+3) \leqslant (x+2)^5$$

et que $\displaystyle\int_{N+1}^{m+1} \frac{6\,dx}{(x+2)^5} \leqslant \sum_{N+1}^{m} d_n \leqslant \int_{N}^{m} \frac{6\,dx}{(x+1)^5}$.

En déduire que $\displaystyle\frac{3}{2(N+3)^4} < \sum_{N+1}^{\infty} d_n < \frac{3}{2(N+1)^4}$.

b. On prend comme valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ la quantité :

$$B_N = a + \frac{b}{4} + \frac{c}{18} + \sum_{n=1}^{N} d_n + \frac{3}{2(N+3)^4}.$$

Calculer l'erreur de méthode pour $N = 7$.

c. Chercher une relation de récurrence entre d_n et d_{n+1} et l'utiliser pour calculer les d_n pour $n \leqslant 7$. On pourra écrire un programme qui sera reproduit sur la feuille et qui fonctionnera sur votre calculette.

d. Calculer les termes de B_7 avec une précision de $\frac{1}{2}10^{-6}$.

Déduire de ce qui précède un encadrement de $\frac{\pi^2}{6}$.

Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

Cl. Piquet
11.12.04

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1995

I. Une observation empirique

1. Le carré proposé par le scribe Ahmès a pour côté $2R(1-\frac{1}{9})$ où R est le rayon du cercle examiné. L'aire de ce carré est donc $(2\times\frac{8}{9}R)^2 = \frac{256}{81}R^2$, ce qui donne, pour approximation de π, la fraction $\frac{256}{81}$. On obtient ainsi une valeur par excès à 2×10^{-2} près.

2. Soit $a \pm \frac{1}{b}$ la fraction *égyptienne* qui approche le mieux possible $\sqrt{\frac{\pi}{4}} = 0,886\ldots$, alors l'entier a appartient à l'intervalle $[-0,21\ldots,\ 1,8\ldots]$ et vaut donc 0 ou 1. Si $a=0$ alors $b = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,128\ldots$ donc $b=1$, ce qui donne 1 pour approximation. Si $a=1$, alors b est négatif et $\frac{1}{b} = 1-\sqrt{\frac{\pi}{4}}$, donc $b = \frac{2}{2-\sqrt{\pi}} = 8,789\ldots$ donc $b = 8$ ou 9, d'où les deux fractions possibles : $\frac{7}{8}$ ou $\frac{8}{9}\cdot$ On vérifie que la seconde approximation est meilleure que la première, ce qui donne pour $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ la représentation suivante sous forme de *fraction égyptienne* : $1-\frac{1}{9}$, soit, pour π, l'approximation rationnelle $\frac{256}{81}\cdot$

II. Quelques préliminaires

1.a. On sait que

$$\operatorname{Arc}\tan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \operatorname{Arc}\tan 1 = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \operatorname{Arc}\tan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\cdot$$

1.b. On a, pour $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $x = \tan(\operatorname{Arc}\tan x)$, donc, par le théorème de dérivation des fonctions composées, sachant que la dérivée de la fonction tangente est $1+\tan^2$,

$$1 = \Big(1+\tan^2\big(\operatorname{Arc}\tan(x)\big)\Big)\operatorname{Arc}\tan'(x)$$

d'où

$$\big(\operatorname{Arc}\tan\big)'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

1.c. Résulte du théorème fondamental du calcul intégral (en effet, la fonction $(1+t^2)^{-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$).

1.d. Cette égalité très classique provient de l'écriture de la somme des n premiers termes de la progression géométrique de premier terme 1 et de raison $-t^2$.

1.e. La fonction que l'on intègre est positive et majorée par t^{3n+2} car $1+t^2 \geq 1$. Il en résulte, pour $x \geq 0$, l'encadrement proposé. Si $x > 0$, les inégalités sont strictes, car on intègre sur un intervalle de longueur non nulle une fonction *continue* positive qui ne s'annule qu'en 0, et parce que $1 - \dfrac{1}{1+t^2}$ est, elle aussi, *continue* et strictement positive sur $]0, x]$. L'extension au cas d'un réel x quelconque mais non nul est immédiate et donne :

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

1.f. On a, pour $|x| \leq 1$,

$$\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

donc

$$|\operatorname{Arc}\tan x - S_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}$$

d'où le résultat demandé.

2.a. La vérification est immédiate.

2.b. On a $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$, donc $(1 \pm i)^4 + 4 = 0$; le polynôme $(1-t)^4 + 4 = 0$ est donc divisible par $(t-i)(t+i) = t^2+1$ et le quotient P de cette division est un polynôme de degré 2. On trouve

$$P(t) = t^2 - 4t + 5\,.$$

2.c. L'égalité demandée est un peu fastidieuse à établir (et, à vrai dire, sans intérêt pour la suite). On écrit

$$t^4 = t^2(1+t^2) - (1+t^2) + 1$$

d'où

$$\frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} = t^2(1-t)^4 - (1-t)^4 + P(t) - \frac{4}{1+t^2}$$

et il suffit d'expliciter $P(t)$ pour obtenir le résultat.

III. Un encadrement de $\frac{22}{7} - \pi$

1. Ultra-classique ; résulte des variations de r ou encore de l'égalité $\dfrac{1}{4} - r(t) = (t - \dfrac{1}{2})^2$.

2. On a, si $t \in [0,1]$, $1 \leq 1+t^2 \leq 2$ donc $f(t) \leq g(t)$ et $g(t) \leq r^4(t) \leq \dfrac{r^2(t)}{16}$ d'où l'encadrement demandé.

3. On utilise II.3. (qui n'est pas indispensable) et surtout II.2.

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \frac{1}{2}\frac{(4!)^2}{9!} = \frac{1}{1260} \qquad \int_0^1 h(t)\, dt = \frac{1}{16}\frac{(2!)^2}{5!} = \frac{1}{480}$$

et
$$\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{2!4!}{7!} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 2 + 5 - \pi = \frac{22}{7} - \pi$$

4. On en tire l'encadrement
$$\frac{1}{1260} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{480}$$
ce qui donne, pour l'approximation de π par $\frac{22}{7}$, deux décimales exactes.

A vrai dire, l'encadrement précédent donne pour π un résultat un peu plus fin, à savoir
$$3,140\,773\,810 < \pi < 3,142\,063\,492$$
mais le nombre de décimales exactes reste le même.

IV. La formule de John Machin

1.a. Comme $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$, le réel positif $\tan\frac{\pi}{8}$ est racine de l'équation du second degré $x^2+2x-1=0$ donc
$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1\,.$$
De même, $\tan\frac{\pi}{16}$ est la racine positive de l'équation $(\sqrt{2}-1)x^2+2x-(\sqrt{2}-1)=0$ qui s'écrit aussi $x^2+2(\sqrt{2}+1)x-1=0$ d'où la valeur donnée dans l'énoncé.

1.b. La fonction tan étant strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, l'encadrement proposé est équivalent à
$$\sqrt{4+2\sqrt{2}} - (\sqrt{2}+1) < \frac{1}{5} < \sqrt{2}-1$$
ou, en prenant les inverses,
$$\sqrt{2}+1 < 5 < \sqrt{4+2\sqrt{2}} + (\sqrt{2}+1)\,.$$
La première inégalité est équivalente à $\sqrt{2} < 4$ qui est évidente ; la seconde équivaut à $4-\sqrt{2} < \sqrt{4+2\sqrt{2}}$, soit, en élevant au carré, à $14 < 10\sqrt{2}$ ou, enfin, à $49 < 50$ qui est bien vérifiée.

1.c. On a
$$\tan 2\alpha = \frac{2/5}{1-1/5^2} = \frac{5}{12} \qquad \text{donc} \qquad \tan 4\alpha = \frac{5/6}{1-5^2/12^2} = \frac{120}{119}$$
donc
$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119}-1}{\frac{120}{119}+1} = \frac{1}{239}\,.$$

On a donc $4\alpha = \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{239}$, c'est-à-dire la formule de John Machin.

2.a. L'intégrale de l'égalité du 2. étant évidemment positive si $x > 0$, $S_n(x) - \operatorname{Arc}\tan x$ a le signe de $(-1)^n$, d'où l'encadrement demandé.

2.b. La relation précédente donne

$$S_{2p} - S_{2p+2} = \int_0^x \frac{t^{4p+2}(1-t^2)}{1+t^2}\, dt\,.$$

La fonction sous le signe $\int$ est continue sur $[0,x]$ et strictement positive si $0 < x < 1$. Il en résulte que $S_{2p} > S_{2p+2}$ si $0 < x \leq 1$, donc que la suite $(S_{2p})_p$ est croissante. La même démonstration montre que $(S_{2p+1})_p$ est décroissante.

3. On a

$$|4S_n(\frac{1}{5}) - 4\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{5}| \leq 4\int_0^{1/5} t^{2n+2}\, dt = 4\frac{5^{-(2n+3)}}{2n+3}$$

cette quantité étant elle-même majorée par $4\dfrac{5^{-(2n_\circ+3)}}{2n_\circ+3}$ si $n \geq n_\circ$. Si $n_\circ \geq \dfrac{d}{2\log_{10} 5}$, on a

$$2n_\circ + 3 \geq \frac{d}{\log_{10} 5} + 3 \qquad \text{donc} \qquad 5^{-(2n_\circ+3)} \leq 5^{-3}\times 5^{-d/\log_{10} 5} = 5^{-3}\times 10^{-d}$$

d'où

$$4\frac{5^{-(2n_\circ+3)}}{2n_\circ+3} \leq 4\frac{10^{-d}}{125(2n_\circ+3)} \leq 0{,}011\times 10^{-d} \leq 0{,}5\times 10^{-d}\,.$$

La majoration obtenue est de meilleure qualité que celle de l'énoncé. Elle permettra de tenir compte de la multiplication finale par 4 pour obtenir la précision de l'encadrement obtenu sur π et non pas $\pi/4$. De même,

$$|S_n(\frac{1}{239}) - \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{239}| \leq \int_0^{1/239} t^{2n+2}\, dt = \frac{239^{-(2n+3)}}{2n+3} \leq \frac{239^{-(2n_1+3)}}{2n_\circ+3} \quad \text{si} \quad n \geq n_1\,.$$

Si $n_1 \geq \dfrac{d}{2\log_{10} 239}$, on a

$$2n_1 + 3 \geq \frac{d}{\log_{10} 239} + 3 \qquad \text{donc} \qquad 239^{-(2n_1+3)} \leq 239^{-3}\times 239^{-d/\log_{10} 239} = 239^{-3}\times 10^{-d}$$

d'où

$$\frac{239^{-(2n_1+3)}}{2n_1+3} \leq \frac{10^{-d}}{239^3(2n_1+3)} \leq \frac{10^{-d}}{3\times 239^3} \leq 3\times 10^{-8}\times 10^{-d} \leq 0{,}5\times 10^{-d}\,.$$

Comme précédemment, la précision obtenue est supérieure à celle indiquée par l'énoncé.

4. On veut calculer π avec 12 décimales exactes. Si l'on prend $d = 12$, on aura $n_0 = 9$ et $n_1 = 3$; alors $4S_9(\frac{1}{5})$ donnera une valeur approchée par *défaut* de $4\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{5}$ à $1{,}1\times 10^{-14}$ près, tandis que $S_3(\frac{1}{239})$ donnera une valeur approchée par *excès* de $\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{239}$ à 3×10^{-18} près. On aura donc

$$4S_9(\frac{1}{5}) < 4\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{5} < 4S_9(\frac{1}{5}) + 1{,}1\times 10^{-14}$$

$$S_3(\frac{1}{239}) < \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{239} < S_3(\frac{1}{239}) + 3\times 10^{-18}$$

d'où

$$4S_9(\frac{1}{5}) - S_3(\frac{1}{239}) - 3\times 10^{-18} < \frac{\pi}{4} < 4S_9(\frac{1}{5}) - S_3(\frac{1}{239}) + 1{,}1\times 10^{-14}\,.$$

Bien entendu, le calcul de chacune des sommes S_n ci-dessus doit être conduit avec une précision dépassant 10^{-12}. L'utilisation d'une calculette standard semble poser problème car le nombre de chiffres affichés (et supposés exacts) ne dépasse pas 10. Il semblerait donc exclu de mener le calcul à bien, sauf à l'effectuer "à la main". Toutefois, les termes intervenant dans chacune des sommes S_9 et S_3 décroissent très vite et le nombre de décimales données par la calculette est, compte tenu de la multiplication par 10^{-k} avec k très vite important, suffisant. Le calcul de $4S_9(\frac{1}{5})$ faisant intervenir 9 termes, chacun sera calculé à 10^{-15} près ; on prendra, pour simplifier, la même précision pour le calcul de $S_3(\frac{1}{239})$.

On donne en détail les éléments du calcul :

$$\text{Calcul de } 4S_9(\frac{1}{5}) = \sum_{k=0}^{9}(-1)^k a_k \qquad a_k = 4/\big((2k+1)5^{2k+1}\big)$$

k	a_k	k	a_k
0	0,800 000 000 000 000	1	0,010 666 666 666 667
2	0,000 256 000 000 000	3	0,000 007 314 285 714
4	0,000 000 227 555 556	5	0,000 000 007 447 273
6	0,000 000 000 252 062	7	0,000 000 000 008 738
8	0,000 000 000 000 308	9	0,000 000 000 000 011
$\sum a_k$	0,800 256 227 807 926	$\sum a_k$	0,010 673 988 408 403

d'où

$$4S_9(\frac{1}{5}) = 0,789\,582\,239\,399\,523$$

$$\text{Calcul de } S_3(\frac{1}{239}) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k b_k \qquad b_k = 1/\big((2k+1)239^{2k+1}\big)$$

k	b_k	k	b_k
0	0,004 184 100 418 410	1	0,000 000 024 416 592
2	0,000 000 000 000 257		
$\sum b_k$	0,004 184 100 418 667	$\sum b_k$	0,000 000 024 416 592

d'où

$$S_3(\frac{1}{239}) = 0,004\,184\,076\,002\,075$$

On a donc

$$\frac{\pi}{4} = 0,785\,398\,163\,397\,448 \qquad \text{soit} \qquad \pi = 3,141\,592\,653\,589\,792$$

Les deux dernières décimales ne sont pas certaines ; on peut affirmer que

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,8 \quad \text{à} \quad 10^{-13} \text{ près}$$

et que π avec douze décimales exactes s'écrit

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589 \qquad (3,141\,592\,653\,590 \quad \text{avec arrondi}).$$

V. Utilisation de la méthode de Holme et Papadimitriou

A. Des formules célèbres

1. On sait que

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos p\theta + i\sin p\theta \quad \text{et que} \quad (a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k a^k b^{p-k}$$

Il en résulte que

$$\sin(2n+1)\theta = \mathfrak{Im}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1} = \mathfrak{Im}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^k \cos^k\theta \sin^{2n+1-k}\theta$$

Seuls les indices $k = 2j+1$ contribuent à la partie imaginaire. Il vient alors, en mettant $\sin^{2n+1}\theta$ en facteur, la formule demandée :

$$\sin(2n+1)\theta = \sin^{2n+1}\theta \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j+1} (\operatorname{cotan}^2\theta)^{n-j}\,.$$

2. On sait que la fonction cotan^2 met en bijection la demi-droite réelle $[0,+\infty[$ avec l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}]$. On pose $X = \operatorname{cotan}^2\theta$ où $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}]$. D'après la relation précédente, on a

$$P_n(\operatorname{cotan}^2\theta) = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}\,.$$

Il en résulte que $P_n(X) = 0$ si $X \in \{\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}; k = 1, 2, \ldots, n\}$. Ceci donne n racines distinctes au polynôme P_n de degré n ; on les a donc toutes, ce qui démontre le résultat donné dans l'énoncé.

3.a. Les relations proposées sont absolument évidentes et classiques.

3.b. La première égalité se vérifie par simple lecture. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}\,.$$

3.c. Pour le polynôme P_n, les coefficients a_0, a_1 et a_2 valent respectivement $2n+1$, $-n(2n+1)(2n-1)/3$ et $n(n-1)(2n+1)(2n-1)(2n-3)/30$. On en tire aisément les deux égalités demandées :

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^4\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^4\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{45}\big(5n(2n-1) - 3(n-1)(2n-3)\big) = \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}\,.$$

4. Résulte du théorème des accroissements finis et de l'encadrement bien connu $\cos\theta < 1 < 1+\tan^2\theta$. Les deux encadrements qui suivent sont évidents.

5. On a donc, compte-tenu des questions 3.c et 4. ,

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{n(2n+2)}{3} \quad (n \geq 1)$$

d'où

$$\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}\,.$$

Les membres extrêmes de l'encadrement précédent convergent tous deux vers $\frac{\pi^2}{6}$ lorsque $n \to \infty$, donc

$$\zeta(2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

6. Comme précédemment on a

$$\frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^4}{k^4\pi^4} < n + 2\frac{n(2n-1)}{3} + \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}$$

mais la majoration donnée dans l'énoncé est fausse (pour $n = 1$). Ceci est sans conséquence sur le résultat final ; en effet

$$n + 2\frac{n(2n-1)}{3} + \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45} = n + \frac{n(2n-1)}{45}(4n^2+10n+21)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\pi^4}{45} \cdot \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{(2n+1)^4} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} \leq \frac{\pi^4}{45} \cdot \frac{8n(n^3+2n^2+4n+3)}{(2n+1)^4}\,.$$

Comme dans la question précédente, il vient

$$\zeta(4) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

7.a. Le premier encadrement résulte de la décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x^2$, le second s'en déduisant par la relation de Chasles sur les intégrales.

7.b. Le calcul des intégrales précédentes est trivial, ainsi que le passage à la limite $N \to \infty$; on obtient l'encadrement donné pour R_n. On a donc

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n = \frac{\pi^2}{6} - A_n \leq \frac{1}{n}$$

d'où

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - A_n - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

7.c. On a évidemment $n(n+1) > 10^4$ si $n = 100$, mais $99 \times 100 < 10^4$, donc la première valeur $n_\circ$ pour laquelle $A_n + \dfrac{1}{n+1}$ est une valeur approchée (par défaut) de $\dfrac{\pi^2}{6}$ est $n_\circ = 100$.

B. Accélération de la convergence

1.a. On aura, pour tout entier n,

$$a_n^k = \alpha a_n^{k-1} + \beta a_{n+1}^{k-1} \quad \text{si et seulement si} \quad 1 = \alpha(n+k) - \beta n\,.$$

Cette condition est réalisée si et seulement si $\alpha = \beta = 1/k$.

1.b. Alors $k a_n^k = a_n^{k-1} - a_{n+1}^{k-1}$ donc

$$\sum_{n=1}^{N} k a_n^k = a_1^{k-1} - a_{N+1}^{k-1}\,.$$

Comme $\lim\limits_{N\to\infty} a_{N+1}^{k-1} = 0$, on obtient

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^k = \frac{1}{k} a_1^{k-1} = \frac{1}{k\,k!}\,.$$

2.a. et b. Si l'on a

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + \frac{c}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + d_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to\infty} n^4 d_n = 0\,,$$

on a nécessairement, en multipliant par $n(n+1)$, $\dfrac{n}{n+1} = a + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n})$, donc $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. On retranche alors $1/n(n+1)$ de $1/n^2$ et l'on multiplie par $n(n+1)(n+2)$. Il vient

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{n^2(n+1)} = b + \mathrm{o}(\frac{1}{n})$$

donc $b = 1$. On recommence la même procédure pour obtenir le coefficient c :

$$\frac{2(n+3)}{n} = c + n(n+1)(n+2)(n+3)d_n \qquad \text{d'où} \qquad c = 2 \quad \text{et} \quad d_n = \frac{6}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}\,.$$

3. On a donc, avec les notations de l'énoncé (qui ne sont pas très heureuses ici) :

$$\frac{1}{n^2} = a\,a_n^1 + b\,a_n^2 + c\,a_n^3 + d_n$$

donc, compte-tenu du résultat de la question 1.b. ,

$$\frac{\pi^2}{6} = a + \frac{b}{4} + \frac{c}{18} + \sum_{n=1}^{N} d_n + \sum_{N+1}^{\infty} d_n\,,$$

soit, en explicitant a, b et c ,

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{18} + \sum_{n=1}^{N} d_n + \sum_{N+1}^{\infty} d_n = \frac{49}{36} + \sum_{n=1}^{N} d_n + \sum_{N+1}^{\infty} d_n\,.$$

4.a. La première majoration revient à vérifier que

$$(x+1)^4 \leq x^2(x+2)(x+3) = x^4 + 5x^3 + 6x^2$$

soit

$$x^3 - 4x - 1 = x(x^2-4) - 1 \geq 0$$

ce qui est exact si $x \geq 3$ car alors $x(x^2-4) \geq 15$. La seconde majoration équivaut à

$$x^2(x+1)(x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 \leq (x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

qui est évidemment exact. Il en résulte, pour d_n, l'encadrement

$$\frac{6}{(n+2)^5} \leq d_n \leq \frac{6}{(n+1)^5}\,.$$

La fonction $x \mapsto 1/x^5$ étant décroissante, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{6}{(x+2)^5}\,dx \leq \frac{6}{(n+2)^5} \quad \text{et} \quad \frac{6}{(n+1)^5} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{6}{(x+2)^5}\,dx\,.$$

Ceci donne

$$\int_n^{n+1} \frac{6}{(x+2)^5}\,dx \leq d_n \leq \int_{n-1}^{n} \frac{6}{(x+2)^5}\,dx$$

d'où l'encadrement demandé en sommant en n de $N+1$ à m.

En explicitant le calcul, on obtient

$$\frac{3}{2(N+3)^4} - \frac{3}{2(m+3)^4} \leq \sum_{N+1}^{m} d_n \leq \frac{3}{2(N+1)^4} - \frac{3}{2(m+1)^4}\,.$$

Si l'on fait tendre m vers l'infini, on obtient un encadrement légèrement plus faible que celui demandé par l'énoncé (mais bien suffisant pour la suite) :

$$\frac{3}{2(N+3)^4} \leq \sum_{N+1}^{\infty} d_n \leq \frac{3}{2(N+1)^4}\,.$$

Pour une raison inexplicable, l'énoncé demande un encadrement strict qui est évidemment plus délicat à établir étant donné les différents passages à la limite effectués. Pour démontrer que la première inégalité est stricte, on peut déjà minorer d_n par $\dfrac{6}{(n+2)^5}$ et montrer que

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{6}{(n+2)^5} - \frac{3}{2(N+3)^4} > 0\,.$$

Or l'expression précédente s'écrit aussi

$$\sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{6}{(n+2)^5} - \int_n^{n+1} \frac{6}{(x+2)^5}\,dx \right);$$

La série précédente a tous ses termes strictement positifs, car

$$\frac{6}{(n+2)^5} - \int_n^{n+1} \frac{6}{(x+2)^5}\,dx = \int_n^{n+1} \left(\frac{6}{(n+2)^5} - \frac{6}{(x+2)^5} \right) dx > 0$$

puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue positive nulle seulement en n. Il en résulte que la somme de la série considérée est strictement positive, ce qui démontre le résultat. On opère de même pour l'autre inégalité.

4.b. L'encadrement précédent indique que la valeur B_N retenue est une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ par défaut et que l'erreur commise est majorée par $\frac{3}{2(N+1)^4} - \frac{3}{2(N+3)^4}\cdot$ On obtient, pour $N = 7$, une erreur d'environ $2,2 \times 10^{-4}$, performance assez quelconque.

4.c. On a $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n^2}{(n+1)(n+4)}$ ce qui permet de calculer aisément les premières valeurs de d_n (on note que ce sont des inverses d'entiers). On obtient :

$$d_1 = \frac{1}{4}\ ,\quad d_2 = \frac{1}{40}\ ,\quad d_3 = \frac{1}{180}\ ,\quad d_4 = \frac{1}{560}\ ,\quad d_5 = \frac{1}{1400}\ ,\quad d_6 = \frac{1}{3024}\ ,\quad d_7 = \frac{1}{5880}\cdot$$

L'écriture d'un programme de calcul des nombres d_n dépend de la calculette dont on dispose et du langage de programmation utilisable par cette dernière. Si l'on dispose de quatre cases mémoires, on peut réserver $[d]$ pour le nombre d_n, $[s]$ pour la somme des n premiers d_n, $[n]$ pour le compteur n et $[n4]$ pour conserver $n + 4$.

Dans ces conditions, on peut opérer comme suit :

$[d] = 0,25$	valeur initiale de d_n
$[s] = 0,25$	valeur initiale de s
$[n] = 1$	valeur initiale de n
$[n4] = 5$	valeur initiale de $n+4$
: BIS	Etiquette pour boucler
PRINT($[n], [d], [s]$)	affiche, dans l'ordre les valeurs de n, d_n et s
PRINT('On continue ? (O/N)')	test d'arrêt
READ touche	lecture d'une touche (à adapter selon la machine)
IF touche<>'O' THEN GOTO FIN	sortie si l'on ne presse pas 'O'
$[d] = [d] * [n]$	multiplication par n
$[d] = [d] * [n]$	multiplication par n
$[d] = [d]/[n4]$	division par $n+4$
INC $[n]$	augmente n de 1
INC $[n4]$	augmente $n+4$ de 1
$[d] = [d]/[n]$	divise d par $n+1$
$[s] = [s] + [d]$	nouvelle valeur de s
GOTO BIS	on boucle
: FIN	sortie

On peut évidemment, pour le même prix, faire ajouter en sortie 49/36 et $1,5 \times 10^{-4}$ et faire afficher la valeur de B_n ainsi obtenue. On obtient ainsi $\sum_{n=1}^{7} d_n \simeq 0,283\,556$.

4.d. On a donc $B_7 = \frac{49}{36} + \sum_1^7 d_n + 1,5 \times 10^{-4}$, ce qui donne, pour $\frac{\pi^2}{6}$, l'approximation par défaut $1,644\,817\,4$. L'approximation par excès associée vaut $1,645\,033\,6$, d'où l'encadrement (assez médiocre)

$$1,644\,817 < \frac{\pi^2}{6} < 1,645\,034\,.$$

Correction de D.-J. MERCIER

I.1 $\pi \frac{d^2}{4} \simeq \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 \Rightarrow \pi \simeq 4 \cdot \frac{8^2}{9^2} = \frac{256}{81}$

L'erreur commise est $\frac{256}{81} - \pi \simeq 0{,}0189$

I.2 Il faut prouver que $1 - \frac{1}{9}$ est la meilleure approximation de $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ de la forme $\xi = a + \frac{1}{b}$ où $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

- Si $a = 0$, $\xi = \frac{1}{b}$. Si $b = \pm 1$, $\xi = \pm 1$ et l'approximation est moins bonne. Si $|b| \geq 2$, $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et l'approximation est encore moins bonne que celle de $1 - \frac{1}{9} \simeq 0{,}888$, la valeur exacte étant

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} = 0{,}886\ldots$$

- Si $a \geq 2$, $a + \frac{1}{b} \geq 2 + \frac{1}{b} \geq 1$ pour tout $b \in \mathbb{Z}^*$, et l'approximation est moins bonne.

- Si $a = 1$, $\xi = 1 + \frac{1}{b} = \varphi(b)$. φ est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$, dont on peut tracer le graphe. On constate :

$$\varphi(-9) \simeq 0{,}888 > \sqrt{\frac{\pi}{4}} > \varphi(-8) \simeq 0{,}875$$

II.1.a $\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{Arctan} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

II.1.b Si $x \in \mathbb{R}$, notons $y = \operatorname{Arctan} x$. On a :

$$(\operatorname{Arctan})'(x) = \frac{1}{(\tan)'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

II.1.c La question précédente montre que Arctan est une primitive de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^x = \operatorname{Arctan} x$$

II.1.d Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: si $n=0$, $\frac{1}{1+t^2} = 1 - \frac{t^2}{1+t^2}$ est vrai. Au rang n :

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \cdot t^{2n+2}\left(1 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)$$

$$= 1 - t^2 + \dots + (-1)^{n+1} t^{2(n+1)} + (-1)^{n+2} \frac{t^{2(n+1)+2}}{1+t^2}$$

et la propriété est prouvée au rang $n+1$.

<u>Autre solution</u> : on utilise l'identité remarquable

$$(1 - t + t^2 + \dots + (-1)^n t^n)(1+t) = 1 + (-1)^n \; t^{n+1}$$

que l'on divise par $1+t$ (...)

* Il suffit d'intégrer l'égalité ci-dessus sur $[0,x]$ pour obtenir la seconde formule de cette question.

II.1.e $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ est positif si $t \geq 0$, donc $0 \leq \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

D'autre part $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc si $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^x t^{2n+2}\,dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

• Posons $f(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$. f est impaire et l'on a :

$$\forall x \geq 0 \qquad 0 \leq f(x) \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \qquad (1)$$

Si $x < 0$, $-x > 0$ et (1) entraîne : $0 \leq f(-x) \leq \frac{(-x)^{2n+3}}{2n+3}$, soit :

$$\forall x \leq 0 \qquad 0 \leq -f(x) \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \qquad (2)$$

(1) et (2) montrent que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

II.1.f

D'après II.1.d : $\operatorname{Arctan} x - S_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

D'après II.1.e : $|\operatorname{Arctan} x - S_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$

Si $|x| \leq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \operatorname{Arctan} x$

II.2.a trivial

II.2.b On trouve

$$(1-t)^4 + 4 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 5 = (t^2+1)\,P(t)$$

avec $P(t) = t^2 - 4t + 5$

II.2.c

$$\frac{t^4}{1+t^2}(1-t)^4 = \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)(1-t)^4$$

$$= (t^2-1)(1-t)^4 + \frac{1}{1+t^2}(1-t)^4$$

$$= (t^2-1)(1-t)^4 + \frac{1}{1+t^2}\left[(t^2+1)P(t) - 4\right]$$

$$= t^2(1-t)^4 - (1-t)^4 + t^2 - 4t + 5 - \frac{4}{1+t^2}$$

II.3

Posons $I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\,dt$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Si $\beta > 0$, par intégration par parties :

$$I_{\alpha,\beta} = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1-t)^\beta\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\beta(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

$$= \frac{\beta}{\alpha+1} I_{\alpha+1,\beta-1} = \frac{\beta(\beta-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} I_{\alpha+2,\beta-2} = \cdots = \frac{\beta(\beta-1)\ldots 1}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\beta)} I_{\alpha+\beta,0}$$

Comme $I_{\alpha+\beta,0} = \dfrac{1}{\alpha+\beta+1}$, on obtient effectivement

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$$

III.1 $r'(t) = -2t+1$ de sorte que l'on ait le tableau de variations

t	0		$1/2$		1
r'		$+$		$-$	
r	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

soit $0 \leq r(t) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $t \in [0,1]$

III.2 Pour tout $t \in [0,1]$,

$$2 \geq 1+t^2 \Rightarrow f(t) = \frac{t^4(1-t)^4}{2} \leq g(t) = \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2}$$

et en tenant compte de III.1 :

$$t(1-t) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow t^2(1-t)^2 \leq \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{t^2(1-t^2)}{1+t^2} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow g(t) \leq h(t)$$

III.3

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2} I_{4,4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4!\,.\,4!}{9!} = \frac{1}{1260}$$

$$\int_0^1 g(t)\,dt = I_{2,4} - I_{0,4} + \int_0^1 t^2 - 4t + 5 - \frac{4}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{3\times5\times7} - \frac{1}{5} + \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 5t\right]_0^1 - 4\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3\times5\times7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - \pi$$

$$= \frac{1 - 21 + 35 + 9\times5\times7}{3\times5\times7} - \pi$$

$$= \frac{22}{7} - \pi$$

$$\int_0^1 h(t)\,dt = \frac{1}{16} I_{2,2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{480}$$

III.4 Les 2 questions précédentes entraînent

$$\frac{1}{1260} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{480}$$

$$0{,}00079 \qquad\qquad 0{,}00208$$

Il y aura 2 décimales exactes dans l'approximation de π donnée par $\frac{22}{7}$.

IV.1.a

* Posons $\tan\frac{\pi}{8} = x$. On a : $\tan\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{2x}{1-x^2}$

d'où $x^2 + 2x - 1 = 0$. La seule racine positive de cette équation du second degré est $\tan\frac{\pi}{8}$, à savoir :

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1}$$

* Posons $\tan\frac{\pi}{16} = y$. On résout : $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{2y}{1-y^2}$, d'où :

$$(\sqrt{2}-1)\,y^2 + 2y - (\sqrt{2}-1) = 0$$

$$\Delta' = 1 + (\sqrt{2}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$$

$\tan\frac{\pi}{16}$ est positif, donc

$$\tan\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{4-2\sqrt{2}} - 1)(\sqrt{2}+1)$$

$$= \sqrt{4-2\sqrt{2}}\,.(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}+1)$$

et l'on vérifie que $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}+1) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ en élevant les 2 membres au carré. Finalement :

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{16} = \sqrt{4+2\sqrt{2}} - (\sqrt{2}+1)}$$

IV.1.b La fonction tangente étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\frac{\pi}{16} < \alpha < \frac{\pi}{8}$ revient à montrer que

$$\tan\frac{\pi}{16} = \sqrt{4+2\sqrt{2}} - (\sqrt{2}+1) < \tan\alpha = \frac{1}{5} < \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$$

que l'on vérifie facilement à la calculatrice.

IV.1.c

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2}{5\left(1-\frac{1}{25}\right)} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2.\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{10\times 12}{144-25} = \frac{120}{119}$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha . \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

donc $\boxed{\text{Arctan}\,\frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4}}$ (1)

(En effet, $4\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puisque d'après l'encadrement du IV.1.b, $0 = 4\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < 4.\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$)

(1) entraine immédiatement

$$\boxed{\text{Arctan}\,\frac{1}{239} = 4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}}$$

ie la formule de John Machin

IV.2.a Il suffit de voir que $\text{Arctan}\, x - S_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$ est positif si n est impair, négatif dans le cas contraire.

IV.2.b

$$S_{2(p+1)}(x) - S_{2p}(x) = (-1)^{2p+2} \frac{x^{2(2p+2)+1}}{2(2p+2)+1} + (-1)^{2p+1} \frac{x^{2(2p+1)+1}}{2(2p+1)+1}$$

$$= \frac{x^{4p+5}}{4p+5} - \frac{x^{4p+3}}{4p+3}$$

$$= x^{4p+3} \left(\frac{x^2}{4p+5} - \frac{1}{4p+3} \right)$$

Si $x \in]0,1]$, $x^2 \leq 1$ donc $\frac{x^2}{4p+5} \leq \frac{1}{4p+3}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, de sorte que $S_{2(p+1)}(x) - S_{2p}(x) \leq 0$. La suite $(S_{2p}(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On montrerait de la même façon la croissance de $(S_{2p+1}(x))_{p\in\mathbb{N}}$.

IV.3

- De $4 S_{2p+1}\left(\frac{1}{5}\right) < 4 \,\text{Arctan}\, \frac{1}{5} < 4 S_{2p+2}\left(\frac{1}{5}\right) \leq 4 S_{2p}\left(\frac{1}{5}\right)$ on tire :

$$\begin{cases} 0 \leq 4 S_{2p}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} < 4\left(S_{2p}\left(\frac{1}{5}\right) - S_{2p+1}\left(\frac{1}{5}\right)\right) \quad 4\, \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2(2p+1)+1}}{2(2p+1)+1} \\ \text{et} \\ 0 \leq 4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - 4 S_{2p+1}\left(\frac{1}{5}\right) < 4\left(S_{2p+2}\left(\frac{1}{5}\right) - S_{2p+1}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = 4\, \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2(2p+2)+1}}{2(2p+2)+1} \end{cases}$$

soit dans tous les cas l'encadrement :

$$\left| 4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - 4 S_n\left(\frac{1}{5}\right) \right| < 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1} \qquad (1)$$

$$< \frac{4}{(2n+3)\, 5^{2n+3}}$$

On aura $\left| 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - 4 S_n\left(\frac{1}{5}\right) \right| < 0{,}5 . 10^{-d}$ dès que l'on aura :

$$\frac{4}{(2n+3)\, 5^{2n+3}} \leq 0{,}5 . 10^{-d}$$

ie $$8 . 10^{d} \leq (2n+3) . 5^{2n+3}$$

Cette dernière inégalité est assurée dès que :

$$8 . 10^{d} \leq 5^{2n+3}$$

qui, elle-même, sera vraie dès que

$$10^{d} \leq 5^{2n} \qquad (\text{puisque } 8 \leq 5^3)$$

Cette dernière condition équivaut à

$$n \geq \frac{d}{2 \log_{10} 5}$$

comme prévu.

Ccl : $$n \geq \frac{d}{2 \log_{10} 5} \Rightarrow \left| 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - 4 S_n\left(\frac{1}{5}\right) \right| < 0{,}5 . 10^{-d}$$

- La preuve de l'implication :

$$n \geq \frac{d}{2 \log_{10} 239} \Rightarrow \left| \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} - S_n\left(\frac{1}{239}\right) \right| < 0{,}5 . 10^{-d}$$

est identique, avec pour point de départ la majoration (1) écrite avec $\frac{1}{239}$ à la place de $\frac{1}{5}$.

- ~~On aura $\left| 4 S_n\left(\frac{1}{5}\right) - S_n\left(\frac{1}{239}\right) - \frac{\pi}{4} \right| < 2 \times 0{,}5 \times 10^{-d} = 10^{-d}$ dès que $n \geq \operatorname{Sup}(n_0, n_1) = n_0 \doteqdot \frac{d}{2 \log_{10} 5} \simeq 0{,}715 . d$.~~

~~$| \leq 4 \times 10^{-d}$~~

• On a :

$$\begin{cases} n_0 \geqslant \dfrac{d}{2\log_{10} 5} \Rightarrow \left|4\,\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - 4\,S_{n_0}\left(\frac{1}{5}\right)\right| < 0{,}5.10^{-d} \\ n_1 \geqslant \dfrac{d}{2\log_{10} 239} \Rightarrow \left|\text{Arctan}\,\frac{1}{239} - S_n\left(\frac{1}{239}\right)\right| < 0{,}5.10^{-d} \end{cases}$$

donc pour ces choix de n_0 et n_1 :

$$\left|4\,S_{n_0}\left(\frac{1}{5}\right) - S_{n_1}\left(\frac{1}{239}\right) - \frac{\pi}{4}\right| < 10^{-d}$$

soit $\left|16\,S_{n_0}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\,S_{n_1}\left(\frac{1}{239}\right) - \pi\right| < 4.10^{-d} < 10^{-d+1}$

(C) **Conclusion :**

$$n_0 \geqslant \frac{d'+1}{2\log_{10} 5} \text{ et } n_1 \geqslant \frac{d'+1}{2\log_{10} 239} \Rightarrow \left|16\,S_{n_0}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\,S_{n_1}\left(\frac{1}{239}\right) - \pi\right| < 10^{-d'}$$

IV.4 Prenons $d' = 12$, $n_0 = 10$ et $n_1 = 3$ pour appliquer (C) ci-dessus.
Une approximation de π à 10^{-12} près sera

$$\xi = 16\,S_{10}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\,S_3\left(\frac{1}{239}\right)$$

que l'on peut calculer en utilisant la définition :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Voici un programme en basic permettant le calcul de $S_n(x)$:

```
5.  S=0
10  INPUT X,N
20  FOR K=0 TO N
30  S=S+(-1)^K*X^(2*K+1)/(2*K+1)
40  NEXT K
50  PRINT S
60  END
```

On trouve $S_{10}\left(\frac{1}{5}\right) \simeq 0{,}1973955598$

$S_3\left(\frac{1}{239}\right) \simeq 0{,}004184076001$

puis $\pi \simeq 3{,}1415926528$

Tout dépendra de la calculatrice que l'on a pour déterminer ces <u>12</u> décimales ! On peut aussi programmer les opérations $+, -, \times, \div$ de façon à ce que la calculatrice obtiennent une douzaine de décimales justes, en groupant les décimales par paquets ... mais cela n'est pas faisable en temps limité et sort du cadre de ce problème.

V.A.1

$$\cos(2n+1)\theta + i\sin(2n+1)\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} \cos^{(2n+1)-k}\theta \,.\, i^k \sin^k\theta$$

permet d'obtenir, en égalant les parties imaginaires :

$$\sin(2n+1)\theta = \sum_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j+1} \cos^{(2n+1)-(2j+1)}\theta \,.\, (-1)^j \,.\, \sin^{2j+1}\theta$$

$$= \sin^{2n+1}\theta \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} (\cotan^2\theta)^{n-j}$$

V.A.2 On calcule et l'on applique V.A.1 :

$$P_n(\alpha_k) = \frac{\sin (2n+1)\frac{\pi}{2n+1}}{\sin^{2n+1}\frac{k\pi}{2n+1}} = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

$P_n(X)$ est un polynôme de degré n dont on connaît donc les n racines. Ce sont les α_k $(1 \leq k \leq n)$

V.A.3.a

$$Q(X) = a_0 (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$$
$$= a_0 \left(X^n - \left(\sum x_i\right) X^{n-1} + \left(\sum_{i<j} x_i x_j\right) X^{n-2} - \cdots + (-1)^n x_1 \cdots x_n \right)$$

d'où par identification :

$$\sum_i x_i = -\frac{a_1}{a_0} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i<j} x_i x_j = \frac{a_2}{a_0}$$

V.A.3.b C'est le développement bien connu

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j$$

qui peut se prouver par récurrence. On en tire :

$$\sum x_i^2 = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0}$$

V.A.3.c

- D'après ce qui précède :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = -\frac{a_1}{a_0} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

puisqu'ici $\begin{cases} a_0 = C_{2n+1}^1 = 2n+1 \\ a_1 = -C_{2n+1}^3 = -\dfrac{(2n+1).2n(2n-1)}{3!} = -\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3} \end{cases}$

- On a aussi, puisque $a_2 = C_{2n+1}^5$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^n \cotan^4 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0} = \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - 2 . \frac{C_{2n+1}^5}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{45} n(2n-1)(4n^2 + 10n - 9)$$

V.A.4

$\sin\theta$ étant strictement positif si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \implies \sin^2\theta < \theta^2 < \tan^2\theta$$

$$\implies \frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\implies \cotan^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2\theta \qquad (*)$$

d'où les dernières inégalités en élevant $(*)$ au carré.

V.A.5 V.A.3.c et V.A.4 entraînent :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}}_{= \frac{n(2n-1)}{3}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)}_{= n + \frac{n(2n-1)}{3}}$$

d'où

$$\frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}$$

et en passant à la limite pour $n \to +\infty$,

$$\boxed{\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

V.A.6 De même, V.A.3.c et les 2èmes relations de V.A.4 entraînent :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \cotan^4 \frac{k\pi}{2n+1}}_{= \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^4}{k^4\pi^4} < \sum_{k=1}^{n}\left(1 + 2\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} + \cotan^4 \frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

d'où, après simplification, les inégalités demandées. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\boxed{\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}}$

V.A.7.a

$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\forall x \in [k, k+1] \qquad \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

et il suffit d'intégrer sur $[k, k+1]$ pour obtenir :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\, dx \leq \frac{1}{k^2}$$

qui entraîne, par sommation :

$$\sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^N \frac{dx}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \int_{n+1}^{N+1} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

donc

$$\boxed{\int_{n+1}^{N+1} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{dx}{x^2}} \qquad (1)$$

V.A.7.b

(1) devient $$-\frac{1}{N+1} + \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq -\frac{1}{N} + \frac{1}{n}$$

et si $N \to +\infty$:

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}}$$

Comme $R_n = \frac{\pi^2}{6} - A_n$, cela entraîne :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - A_n - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

- $A_{n_0} + \frac{1}{n_0+1}$ sera une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-4} près dès

que $\frac{1}{n_0(n_0+1)} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow 10^4 \leq n_0(n_0+1) \Leftarrow 10^4 \leq n_0^2 \Leftrightarrow \boxed{n_0 \geq 100}$

V.B.1.a

Cherchons α, β tels que

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \alpha \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)} - \beta \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$$

$$= \frac{\alpha(n+k) - \beta n}{n(n+1)\dots(n+k)}$$

ie $\quad (\alpha-\beta)n + \alpha k = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On trouve $\alpha = \beta = \frac{1}{k}$.

V.B.1.b

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^k = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^{k-1} - a_{n+1}^{k-1} \right) = \frac{1}{k} \left(a_1^{k-1} - a_{N+1}^{k-1} \right)$$

et comme $\lim_{N \to +\infty} a_{N+1}^{k-1} = 0$, k étant fixé, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k = \frac{1}{k} a_1^{k-1} = \frac{1}{k.k!}$$

V.B.2.a

On veut écrire :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + \frac{c}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad (2)$$

En multipliant les 2 membres de (2) par $n(n+1)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$a = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

On recommence ainsi en multipliant successivement les 2 membres de (2) par $n(n+1)(n+2)$, puis par $n(n+1)(n+2)(n+3)$ pour obtenir les formules demandées.

V.B.2.b

$a = 1$

$$b = \lim_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) n(n+1)(n+2) = \lim_{+\infty} \frac{n+2}{n} = 1$$

$$c = \lim_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{2}{n^2(n+1)(n+2)} \times n(n+1)(n+2)(n+3) = 2$$

et donc :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + d_n$$

Le calcul direct de d_n donne :

$$d_n = \frac{6}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$$

V.B.3 En sommant la relation de V.B.2 :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = a \sum_{n\geq 1} a_n^1 + b \sum_{n\geq 1} a_n^2 + c \sum_{n\geq 1} a_n^3 + \sum_{n\geq 1} d_n$$

Compte tenu de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n\geq 1} a_n^k = \frac{1}{k.k!}$, on trouve :

$$\frac{\pi^2}{6} = a + \frac{b}{4} + \frac{c}{18} + \sum_{n\geq 1} d_n$$

V.B.4.a

• La première inégalité provient de :

$$\forall x \geq 3 \qquad (x+1)^4 \leq x^2(x+2)(x+3)$$

qui équivaut successivement à :

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \leq x^4 + 5x^3 + 6x^2$$

$$0 \leq x^3 - 4x - 1 \qquad (3)$$

Posons $\varphi(x) = x^3 - 4x - 1$. $\varphi'(x) = 3x^2 - 4$ s'annule en $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, et φ est strictement croissante sur $[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty[$; comme $\frac{2}{\sqrt{3}} < 3$, on aura :

$$\forall x \geq 3 \qquad \varphi(x) \geq \varphi(3) = 27 - 12 - 1 = 14 > 0$$

et (3) est démontré.

• La seconde inégalité s'écrit :

$$\forall x \geq 3 \qquad x^2(x+1)(x+3) \leq (x+2)^4$$

qui équivaut à :

$$\forall x \geq 3 \qquad 0 \leq 4x^3 + 21x^2 + 32x + 16$$

qui est trivial.

• En raisonnant comme en V.A.7.a on trouve :

$$\int_{N+1}^{m+1} \frac{6\,dx}{(x+2)^5} \leq \sum_{N+1}^{m} d_n \leq \int_{N}^{m} \frac{6\,dx}{(x+1)^5}$$

$$\left[\frac{-6}{4(x+2)^4}\right]_{N+1}^{m+1} \leq \sum_{N+1}^{m} d_n \leq \left[\frac{-6}{4(x+1)^4}\right]_{N}^{m}$$

et si $m \to +\infty$,

$$\frac{3}{2(N+3)^4} \leq \sum_{N+1}^{\infty} d_n \leq \frac{3}{2(N+1)^4}$$

V.B.4.b

L'erreur de méthode sera $\sum_{N+1}^{\infty} d_n - \frac{3}{2(N+3)^4}$, majorée par

$$M \doteq \frac{3}{2(N+1)^4} - \frac{3}{2(N+3)^4}$$

d'après la question précédente.

Si $N=7$, on trouve $M = \frac{3}{2.8^4} - \frac{3}{2.10^4} \simeq 2{,}16.10^{-4}$

V.B.4.c

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n^2}{(n+1)(n+4)}$$

$$d_1 = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = \frac{1}{2\times 5} . d_1 = \frac{1}{40}$$

$$d_3 = \frac{4}{3\times 6} . d_2 = \frac{1}{180}$$

$$d_4 = \frac{9}{4\times 7} . d_3 = \frac{1}{560}$$

$$d_5 = \frac{16}{5\times 8} . d_4 = \frac{1}{1400}$$

$$d_6 = \frac{25}{6\times 9} . d_5 = \frac{1}{3024}$$

$$d_7 = \frac{36}{7\times 10} . d_6 = \frac{1}{5880}$$

Programme BASIC :

```
10  D=1/4
20  INPUT N
30  FOR K=1 TO N
40  D=(K↑2/((K+1)*(K+4)))*D
50  PRINT K+1,D
60  NEXT K
70  END
```

Le programme donne :

$d_2 \simeq 0{,}025$

$d_3 \simeq 5{,}55555.10^{-3}$

$d_4 \simeq 1{,}78571.10^{-3}$

$d_5 \simeq 7{,}14285.10^{-4}$

$d_6 \simeq 3{,}30687.10^{-4}$

$d_7 \simeq 1{,}70068.10^{-4}$

IV.B.4.d

$$B_7 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40} + \frac{1}{180} + \frac{1}{560} + \frac{1}{1400} + \frac{1}{3024} + \frac{1}{5880} + \frac{3}{2 \times 10^4}$$

On trouve avec la calculatrice, en modifiant légèrement le programme p17 :

$B_7 \simeq 1,644817423$

et l'encadrement est :

$$0 < \frac{\pi^2}{6} - B_N < \frac{3}{2(N+1)^4} - \frac{3}{2(N+3)^4}$$

pour $N = 7$, soit

$$0 < \frac{\pi^2}{6} - B_7 < \frac{3}{2 \cdot 8^4} - \frac{3}{2 \cdot 10^4} \simeq 2,16 \cdot 10^{-4}$$

$$1,644817423 \simeq B_7 < \frac{\pi^2}{6} < 1,645033423$$

(NB : Valeur de $\frac{\pi^2}{6}$ donnée par la calculatrice : $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,644934067$)

FIN

CAPES interne de Mathématiques
session 1995
deuxième composition

(épreuve annulée)

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag30e]

SESSION DE 1995

concours interne de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

> *L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*
>
> *Documents interdits.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des figures interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'objet de ce problème est d'étudier, dans le plan, quelques familles finies ou infinies de cercles tangents entre eux et tangents à des droites ou à des cercles donnés.

La première partie traite de cercles tangents entre eux et tangents à deux droites données.

La deuxième partie étudie une famille de cercles, dits cercles de Ford, tangents entre eux et tangents à un cercle et à une droite donnée.

La troisième partie permet d'établir le résultat dit de « l'alternative de Steiner » relative à des familles de cercles tangents entre eux et tangents à deux cercles donnés.

Dans tout le problème on se place dans un plan affine euclidien.

Notations.

Le cercle de centre O et de rayon r sera noté $\mathscr{C}(O, r)$ ou $\mathscr{C}$ s'il n'y a pas de confusion possible.

La distance de deux points A et B sera notée AB.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

CERCLES TANGENTS À DEUX DROITES

A. Quelques résultats élémentaires.

1. On donne dans le plan deux droites distinctes d_1 et d_2, et un point I.

   Donner une construction du ou des cercles tangents aux deux droites et passant par I. On distinguera les cas suivants :

   a. Les droites d_1 et d_2 sont parallèles ;

   b. Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A et le point I est sur l'une de ces deux droites ;

   c. Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A et le point I n'est pas sur l'une de ces deux droites.

   Dans chaque cas, on discutera l'existence et le nombre de solutions selon les positions relatives de d_1, d_2 et I.

2. On donne un cercle $\mathscr{C}(O, r)$ et deux droites d_1 et d_2 tangentes à ce cercle. On se propose de montrer qu'il existe des cercles distincts et chacun tangent à la fois à d_1, d_2 et $\mathscr{C}(O, r)$.

   a. Les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

   Montrer qu'il existe deux cercles $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ tangents à la fois à d_1, d_2 et $\mathscr{C}(O, r)$. On note O' et O'' les centres de $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$. Caractériser les translations t' et t'' qui transforment respectivement $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}''$.

   b. Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A.

   On note $\mathscr{S}$ le secteur du plan intersection :
   - du demi-plan fermé de frontière d_1 contenant le point O,
   - et
   - du demi-plan fermé de frontière d_2 contenant le point O.

   On désigne par $\mathscr{C}'(O', r')$ et $\mathscr{C}''(O'', r'')$ les cercles tangents à d_1, d_2 et $\mathscr{C}(O, r)$ contenus dans le secteur $\mathscr{S}$.

   Calculer les longueurs $O'A$, $O''A$, r', r'' en fonction de AO et de r.

   Caractériser les homothéties h' et h'' qui transforment respectivement $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}''$.

   On exprimera le rapport λ' de h' et celui λ'' de h'' en fonction des nombres AO et r.

B. Suites de cercles tangents entre eux et tangents à deux droites.

1. On considère deux droites parallèles d_1 et d_2 et un cercle $\mathscr{C}_0(O_0, r_0)$ tangent à d_1 et d_2.

   On construit alors la famille de cercles :

   $$\ldots, \mathscr{C}_{-n}, \mathscr{C}_{-n+1}, \ldots, \mathscr{C}_{-2}, \mathscr{C}_{-1}, \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots, \mathscr{C}_{n-1}, \mathscr{C}_n, \ldots$$

   tels que pour tout entier relatif k, $\mathscr{C}_{k+1}$ soit tangent à d_1, d_2 et $\mathscr{C}_k$, et $\mathscr{C}_{k+1} \neq \mathscr{C}_{k-1}$.

   On appelle $\mathscr{F}$ la configuration formée des droites d_1, d_2 et de tous les cercles $\mathscr{C}_k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

   a. Quelle est l'image de $\mathscr{F}$ par l'une ou l'autre des translations t' et t'' de la question I.A.2.*a.* définies à partir du cercle $\mathscr{C}_0$?

   b. Quels sont les éléments de symétrie de $\mathscr{F}$?

2. On considère un cercle $\mathscr{C}_0(O_0, r_0)$ et deux droites d_1 et d_2 sécantes en A et tangentes à $\mathscr{C}_0$ vérifiant les conditions : $r_0 = 6$ et $AO_0 = 10$.

On construit alors la famille de cercles :

$\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots, \mathscr{C}_{n-1}, \mathscr{C}_n, \ldots$ ($\mathscr{C}_n$ est de centre O_n et de rayon r_n)

tels que pour tout entier naturel k, $\mathscr{C}_{k+1}$ soit tangent à d_1, d_2 et $\mathscr{C}_k$, et $r_{k+1} < r_k$.

Soit un entier $a \geqslant 1$, on appelle $\mathscr{F}_a$ la configuration formée des droites d_1, d_2 et des cercles $\mathscr{C}_k$, $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant a$.

a. Quelle est l'image de $\mathscr{F}_a$ par l'une ou l'autre des homothéties h' et h'' de la question I.A.2.*b.* définies à partir de $\mathscr{C}_0$? En déduire r_{k+1} en fonction de r_k et AO_{k+1} en fonction de AO_k.

Quelle configuration $\overline{\mathscr{F}}$ faudrait-il définir pour que $\overline{\mathscr{F}}$ soit globalement invariante par h' et h'' ?

b. On appelle $\mathscr{A}_k$ la mesure de l'aire du disque délimité par le cercle $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{A}'_k$ la mesure de l'aire du trapèze isocèle circonscrit à $\mathscr{C}_k$ et délimité par les droites d_1 et d_2, la tangente commune à $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ et l'autre tangente à $\mathscr{C}_k$ (si $k \geqslant 1$ c'est l'autre tangente commune à $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k-1}$). Déterminer le rapport $\dfrac{\mathscr{A}_k}{\mathscr{A}'_k}$.

c. On pose $S_n = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1 + \ldots + \mathscr{A}_n$ et $S'_n = \mathscr{A}'_0 + \mathscr{A}'_1 + \ldots + \mathscr{A}'_n$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$, en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Remarque : Le passage par le trapèze n'est pas nécessaire pour étudier la convergence de la suite S_n.

PARTIE II

LES CERCLES DE FORD

1. On considère un cercle $\mathscr{C}(F, p)$ et une droite d tangente à ce cercle. Montrer que l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathscr{C}$ et à d contient une parabole que l'on déterminera.

2. On munit le plan euclidien d'un repère orthonormé. Soit F le point de coordonnées (O, p) et un cercle $\mathscr{C}_0(O_0, r_0)$ de centre O_0 de coordonnées (a_0, b_0) avec $a_0 > 0$, tangent extérieurement au cercle $\mathscr{C}(F, p)$ et à l'axe des abscisses.

a. Montrer qu'il existe un cercle $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ et un seul tel que $\mathscr{C}_1$ soit tangent extérieurement à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_0$, tangent à l'axe des abscisses et que l'abscisse a_1 de son centre O_1 soit positive et inférieure à a_0.

Déterminer a_1 et r_1 en fonction de a_0 et p.

b. On considère alors la suite des cercles $\mathscr{C}_k(O_k, r_k)$, $k \in \mathbb{N}$, tangents extérieurement à $\mathscr{C}$ et à l'axe des abscisses tels que pour tout entier k :

$\mathscr{C}_{k+1}$ est tangent extérieurement à $\mathscr{C}_k$ et $0 < a_{k+1} < a_k$ (où a_k est l'abscisse du centre O_k).

Montrer alors que les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. Déterminer leurs limites.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

CERCLES TANGENTS ENTRE EUX ET TANGENTS À DEUX CERCLES DONNÉS

A. Cercles tangents entre eux et tangents à deux cercles concentriques.

Soit $\mathscr{C}(O, \rho)$ et $\mathscr{C}'(O', \rho')$ deux cercles concentriques avec $\rho < \rho'$.

On considère la suite de cercles $\mathscr{C}_k(M_k, r)$, $k \in \mathbb{N}$, tous tangents à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et tels que :
pour tout entier k, $\mathscr{C}_{k+1}$ est tangent à $\mathscr{C}_k$;
pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathscr{C}_{k+1} \neq \mathscr{C}_{k-1}$.

1. Montrer que les centres M_k appartiennent à une ligne polygonale régulière inscrite dans le cercle $\mathscr{C}''\left(O, \dfrac{\rho + \rho'}{2}\right)$ et que $r = \dfrac{\rho' - \rho}{2}$.

   En déduire que pour tout entier k : $\sin \dfrac{\widehat{M_k O M_{k+1}}}{2} = \dfrac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ où $\lambda = \dfrac{\rho'}{\rho}$.

2. On s'intéresse maintenant au cas où la suite des cercles $\mathscr{C}_k$ se « referme en un tour », c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \geqslant 3$ tel que pour tout $0 < k < n$:

   $\mathscr{C}_k \neq \mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}_0$ et deux cercles $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k'}$ ne sont jamais sécants $(0 \leqslant k < n ;\ 0 \leqslant k' < n ;\ k \neq k')$.

   Montrer qu'il en est ainsi si et seulement si : $\sin \dfrac{\pi}{n} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$.

   En déduire que l'on a alors $\lambda = \left(\dfrac{1}{\cos \dfrac{\pi}{n}} + \tan \dfrac{\pi}{n}\right)^2$.

   Déterminer λ pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$.

B. Quelques éléments sur une transformation : l'inversion.

1. *Puissance d'un point par rapport à un cercle.*

   Soit un cercle $\mathscr{C}(O, r)$ et un point P. On considère une droite d passant par P et coupant le cercle en deux points A et B. On appelle B′ le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à B.

   a. Montrer que : $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PB'} = \overline{PA} \times \overline{PB}$.

   b. Montrer que : $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PB'} = PO^2 - r^2$.

   c. En déduire que le produit $\overline{PA} \times \overline{PB}$ est indépendant de la position de la droite d.
   Ce produit est appelé puissance de P par rapport au cercle $\mathscr{C}$. On le note p.

   d. Montrer que si P est extérieur au cercle $\mathscr{C}$ et la droite d tangente en T à $\mathscr{C}$ alors $p = PT^2$.

2. Soit un point Ω du plan et $\mathscr{P}^*$ le plan privé du point Ω. On définit sur $\mathscr{P}^*$ la transformation $\mathscr{T}$ définie par :

$M' = \mathscr{T}(M)$ si et seulement si Ω, M et M' sont alignés et $\overline{\Omega M} \times \overline{\Omega M'} = k$, k constante donnée non nulle.

On dit alors que $\mathscr{T}$ est l'inversion de centre Ω et de puissance k. L'inversion $\mathscr{T}$ est une transformation involutive. ($\mathscr{T} \circ \mathscr{T}$ est l'identité.)

a. On considère deux inversions $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ de même centre Ω et de puissances respectives k_1 et k_2.

Soit $\boldsymbol{h}$ la restriction à $\mathscr{P}^*$ de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{k_2}{k_1}$.

Montrer que $\mathscr{T}_2 \circ \mathscr{T}_1 = \boldsymbol{h}$.

b. En déduire que $\mathscr{T}_2 = \boldsymbol{h} \circ \mathscr{T}_1$.

c. On considère une inversion de centre Ω et de puissance k, on la note $\mathscr{T}(\Omega, k)$.

- Soit $\mathscr{C}(O, r)$ un cercle ne passant pas par Ω et p la puissance de Ω par rapport à ce cercle. Montrer que $\mathscr{C}(O, r)$ est globalement invariant par l'inversion $\mathscr{T}(\Omega, p)$ de centre Ω et de puissance p.

- Soit $\boldsymbol{h}\left(\Omega, \dfrac{k}{p}\right)$ la restriction à $\mathscr{P}^*$ de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{k}{p}$. Montrer que l'image de $\mathscr{C}$ par l'inversion $\mathscr{T}(\Omega, k)$ est le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par $\boldsymbol{h}\left(\Omega, \dfrac{k}{p}\right)$.

- Soit O'_1 le centre de $\mathscr{C}'$. Exprimer $\overline{\Omega O'_1}$ en fonction de $\overline{\Omega O}$, k et p. Vérifier que O'_1 n'est pas le transformé de O par $\mathscr{T}(\Omega, k)$.

d. On considère maintenant un cercle $\mathscr{C}$ (O, r) passant par Ω. Soit A le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à Ω et A' l'image de A par $\mathscr{T}$ (Ω, k). On considère la droite Δ passant par A' et perpendiculaire à (ΩA). Soit d une droite quelconque passant par Ω et coupant $\mathscr{C}$ en M et Δ en M'. On considère le cercle de diamètre [A M'], montrer qu'il passe par M et A'.

Calculer de deux façons différentes la puissance de Ω par rapport à ce cercle. En déduire que Δ est l'image de $\mathscr{C}$ privé de Ω.

C. L'alternative de Steiner.

On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ (O_1, r_1) et $\mathscr{C}_2$ (O_2, r_2) tels que $\mathscr{C}_1$ soit intérieur à $\mathscr{C}_2$ avec $O_1 \neq O_2$.

1\. *a.* Montrer qu'il existe un point I unique de la droite $(O_1 O_2)$ tel que sa puissance par rapport à $\mathscr{C}_1$ soit égale à sa puissance par rapport à $\mathscr{C}_2$. Montrer que I est extérieur à $\mathscr{C}_2$.

b. Soit T_1 (respectivement T_2) le point de contact de l'une des tangentes issues de I à $\mathscr{C}_1$ (respectivement $\mathscr{C}_2$). Montrer que $IT_1 = IT_2$.

On appelle U et V les points de la droite $(O_1 O_2)$, de milieu I, tels que $IU = IV = IT_1$. On désigne par U celui des deux points qui est intérieur à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On veut montrer que l'inversion $\mathscr{T}(V, VU^2)$ de centre V et de puissance VU^2 transforme les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en deux cercles concentriques de centre U.

(i) Montrer que $\overline{O_jV} \cdot \overline{O_jU} = R_j^2$ $(j \in \{1, 2\})$, en déduire que $\overline{VO_j} \cdot \overline{VU}$ est égal à la puissance de V par rapport à $\mathscr{C}_j$

(ii) Conclure en utilisant le résultat démontré en III.B.2.c.

Tournez la page S.V.P.

2. On admet que toute inversion conserve les contacts, c'est-à-dire que deux cercles tangents sont transformés en deux cercles tangents par une inversion de centre n'appartenant pas à ces cercles.

On considère alors, de la même manière qu'en III.A., une suite de cercles Γ_k tous tangents à la fois aux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, et tangents entre eux deux à deux.

Déduire de III.A. et III.B. que l'alternative est la suivante : ou bien la suite $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se « referme » en n coups et en un tour (cf. III.A.2.) et il en sera de même pour toute autre suite de même nature construite à partir d'un cercle quelconque $\Gamma'_0 \neq \Gamma_0$, ou bien elle ne se « referme pas » et aucune autre suite de tels cercles ne pourra se « refermer ».

CAPES interne 1995 de Mathématiques deuxième composition

(épreuve annulée)

solution proposée par Dany-Jack Mercier

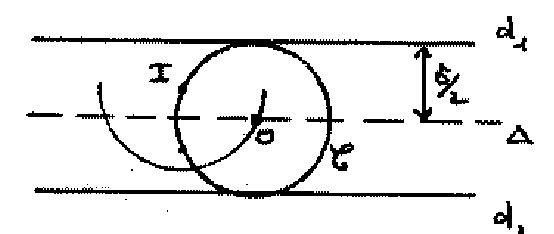
IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag30s] v1.00

Solution développée

I.A.1.a



(fig 1)

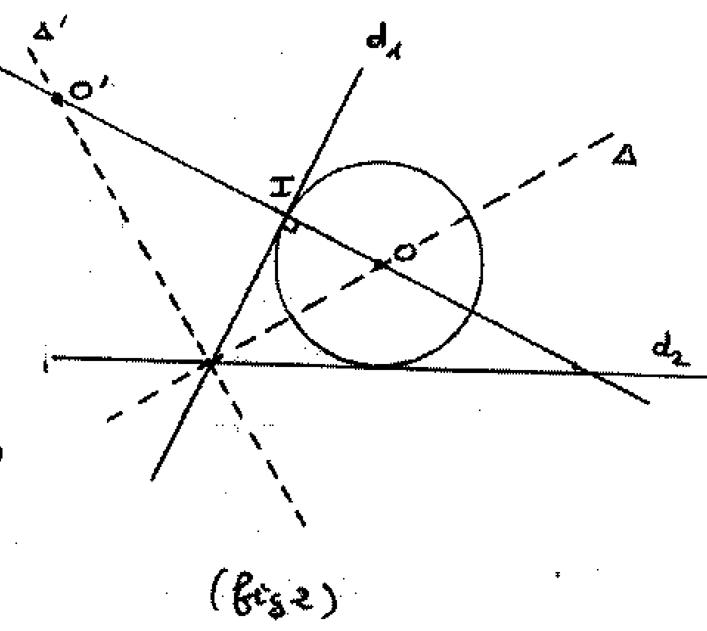
- Si δ est la distance de d_1 à d_2 et si $\mathcal{C}$ répond à la question, son centre O appartient à la droite Δ formée des points équidistants de d_1 et d_2, et $O \in \mathcal{C}(I, \frac{\delta}{2})$.
- Réc., les solutions sont les cercles $\mathcal{C}(O, \frac{\delta}{2})$ tels que $O \in \mathcal{C}(I, \frac{\delta}{2})$.
- Il existera des solutions ssi $d(I, \Delta) \leq \frac{\delta}{2}$.
  Si $d(I,\Delta) < \frac{\delta}{2}$, il y a 2 solutions
  Si $d(I,\Delta) = \frac{\delta}{2}$, ie si $I \in d_1 \cup d_2$, il n'y en a qu'une

I.A.1.b

Supposons $I \in d_1$.

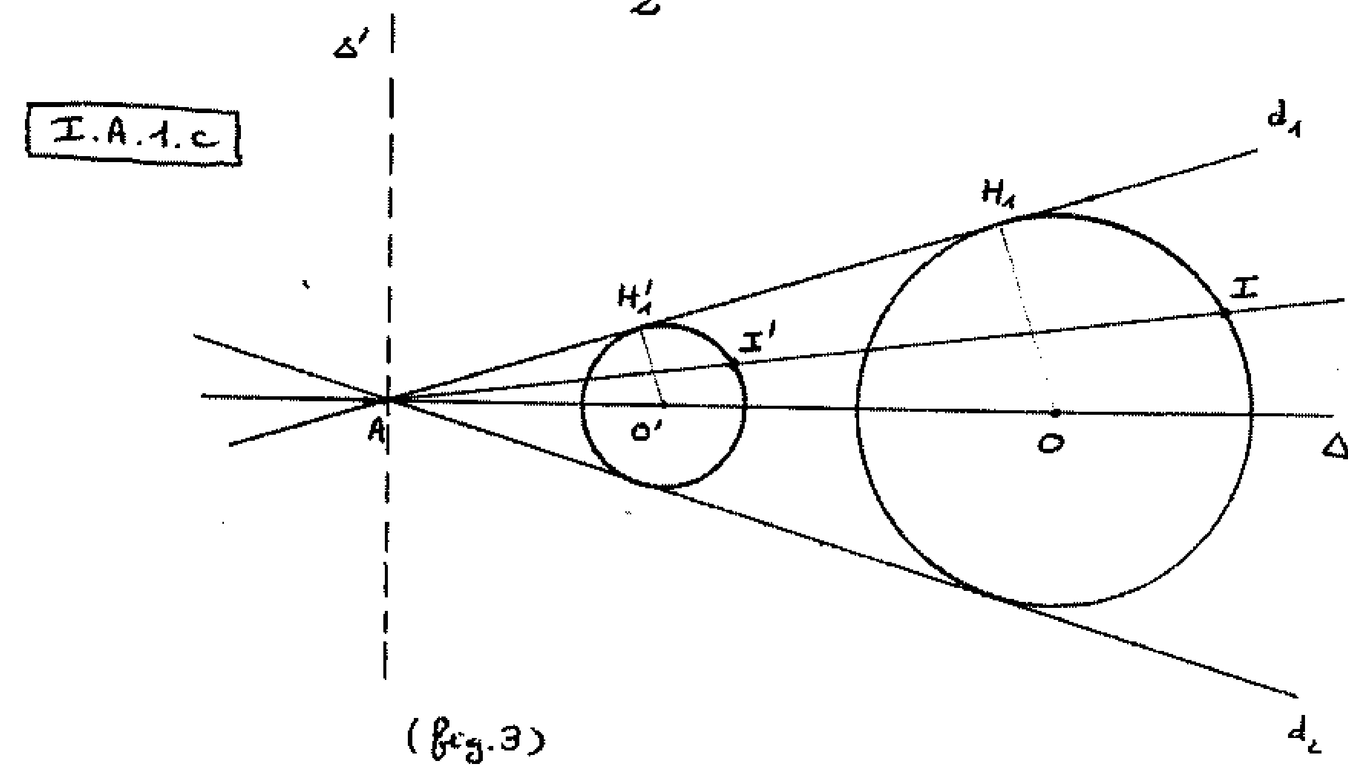
- Notons Δ et Δ' les bissectrices du couple de droites (d_1, d_2).
  Si $\mathcal{C}$ est solution, son centre O appartient à $\Delta \cup \Delta'$ et à la perpendiculaire à d_1 en I.

- Réc., si $O \in \Delta \cup \Delta'$ et si $(OI) \perp d_1$, alors il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ de centre O solution.



(fig 2)

- Il existera toujours 2 solutions, car la perpendiculaire à d_1 en I coupe Δ (resp. Δ') en un point (sinon $(OI) \parallel \Delta \Rightarrow d_1 \parallel \Delta'$ absurde).

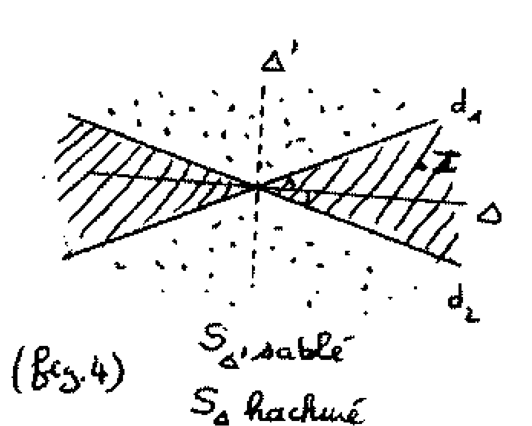


(fig. 3)

Notons encore Δ et Δ' les bissectrices de (d_1, d_2).

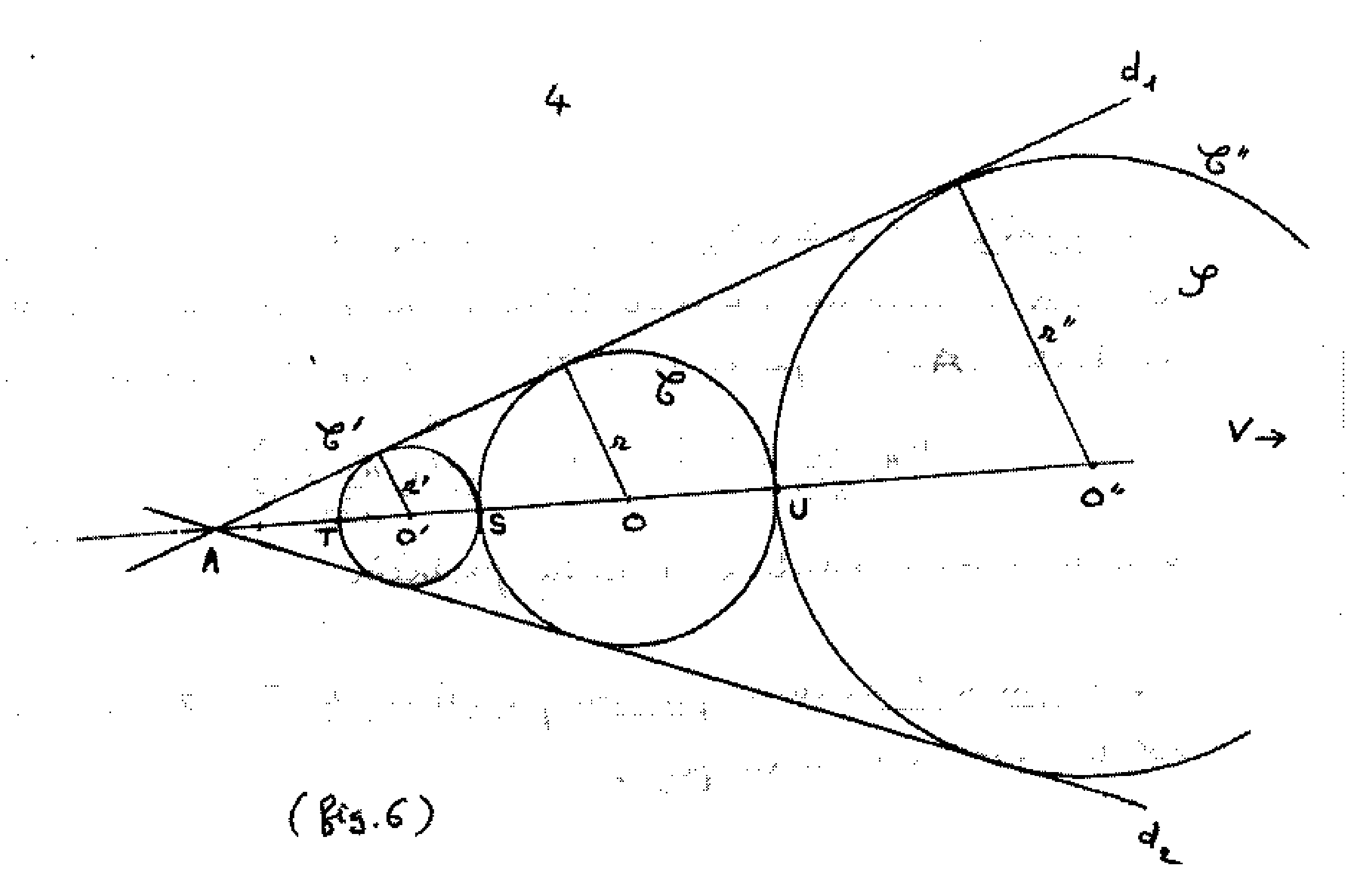
• Analyse :

1) d_1, d_2 partagent le plan en 2 secteurs S_Δ et $S_{\Delta'}$ représentés ci-contre.
Supposons $I \in S_\Delta$. Si $\mathcal{C}$ est solution, son centre O appartient à $\Delta \cup \Delta'$. En fait $O \notin \Delta'$, car tout cercle $\mathcal{C}$ de centre $O \in \Delta'$ tangent à d_1 et d_2 sera inclus dans $S_{\Delta'}$ et ne pourra donc pas passer par I.



(fig. 4) $S_{\Delta'}$ sablé
S_Δ haché

2) On a donc nécessairement $O \in S_\Delta$. Choisissons un point O' sur Δ. L'homothétie $h_{A,k}$ de centre A et de rapport $k = \frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}}$ transforme le cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, OI)$ solution en un cercle $\mathcal{C}'$ de centre $O' \in \Delta$, tangent à d_1 et d_2, et passant par le point $I' = h_{A,k}(I)$.
Ainsi $\mathcal{C} = h_{A,\frac{1}{k}}(\mathcal{C}')$, $h_{A,\frac{1}{k}}(I') = I$ et $\frac{1}{k} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AI'}}$.



(fig. 6)

De même pour $\mathcal{C}''$:

$$\begin{cases} \dfrac{r''}{r} = \dfrac{AO''}{AO} \\[2ex] h''(U) = V \Leftrightarrow \dfrac{AV}{AU} = \dfrac{r''}{r} \Rightarrow \dfrac{AO''+r''}{AO''-r''} = \dfrac{r''}{r} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} r'' = \dfrac{OA+r}{OA-r} \cdot r \\[2ex] OA'' = \dfrac{OA+r}{OA-r} \cdot OA \end{cases}}$$

$$\bullet\ \boxed{\begin{cases} \lambda' = \dfrac{OA-r}{OA+r} \\[2ex] \lambda'' = \dfrac{OA+r}{OA-r} \end{cases}}$$

__NB__ : Il existe 2 homothéties transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, à savoir $h_{A,\frac{r'}{r}}$ et $h_{S,-\frac{r'}{r}}$. On a choisi arbitrairement la première pour que $\mathcal{C}'$ se déduise de $\mathcal{C}$ en faisant intervenir le point A. De même, on a choisi $h'' = h_{A,\frac{r''}{r}}$ et laissé $h_{U,-\frac{r''}{r}}$ de côté.

• <u>Synthèse</u> : Soit $I \in S_\Delta$ non situé sur $d_1 \cup d_2$. Choisissons un point O' sur Δ et construisons le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' et tangent à d_1 et d_2. La droite (AI) coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en I' et I'', et les cercles

$$h_{A, \frac{\overline{AI}}{\overline{AI'}}}(\mathcal{C}') \quad \text{et} \quad h_{A, \frac{\overline{AI}}{\overline{AI''}}}(\mathcal{C}')$$

sont les 2 seules solutions de notre problème.

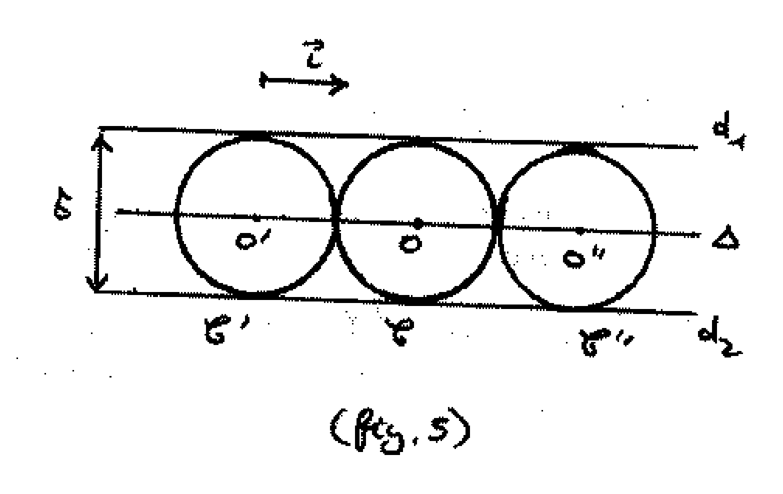
• <u>Il y aura 2 solutions pour chaque choix de I</u>. L'une de ces solution est visible à la fig. 3.

I.A.2.a

Notations de la figure 5 :

$\delta = \text{dist}(d_1, d_2)$

$\vec{\imath}$ = vecteur directeur de Δ, droite des points équidistants de d_1 et d_2



(fig. 5)

On constate que $\mathcal{C}' = t_{-\delta\vec{\imath}}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C}'' = t_{\delta\vec{\imath}}(\mathcal{C})$.

I.A.2.b

Les cercles de la fig. 6 sont homothétiques et :

$$h' = h_{A, \frac{r'}{r}} \qquad\qquad h'' = h_{A, \frac{r''}{r}}$$

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{r'}{r} = \dfrac{AO'}{AO} \\ h'(S) = T \Rightarrow \dfrac{AT}{AS} = \dfrac{r'}{r} \Rightarrow \dfrac{AO' - r'}{AO' + r'} = \dfrac{r'}{r} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} r' = \dfrac{OA - r}{OA + r} \cdot r \\ AO' = \dfrac{OA - r}{OA + r} \cdot OA \end{cases}}$$

• $h'(\mathcal{C}_k) = \mathcal{C}_{k+1}$ entraîne

$$\boxed{r_{k+1} = \frac{1}{4} r_k \quad \text{et} \quad AO_{k+1} = \frac{1}{4} AO_k}$$

• La configuration $\mathcal{F}' \doteq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_k \cup d_1 \cup d_2$ sera évidemment globalement invariante par h' et h'', en posant :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_- \quad \mathcal{C}_{k-1} = h''(\mathcal{C}_k)$$

I.B.2.b

Comme dans la fig. 7, notons $\mathcal{T}_k = M_k L_k L_{k+1} M_{k+1}$ le trapèze circonscrit à $\mathcal{C}_k$. L'homothétie h' transforme $\mathcal{C}_k$ en $\mathcal{C}_{k+1}$, et $[M_k L_k]$ en $[M_{k+1} L_{k+1}]$ de sorte que :

$$h'^k(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_k \qquad\qquad h'^k(\mathcal{T}_0) = \mathcal{T}_k$$

Le rapport de h' étant $\frac{1}{4}$, on en déduit :

$$\mathcal{A}_k = \frac{1}{16^k} \mathcal{A}_0 \qquad\qquad \mathcal{A}'_k = \frac{1}{16^k} \mathcal{A}'_0$$

et tout revient à calculer $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}'_0$.

$\mathcal{A}_0 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$

$\mathcal{A}'_0 = \frac{1}{2}(M_0L_0 + M_1L_1) \cdot 2r_0 = 6(M_0L_0 + M_1L_1) = 6\left(M_0L_0 + \frac{M_0L_0}{4}\right)$

$= \frac{15}{2} M_0L_0$

Toujours avec les notations de la fig. 7 :

$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{100-36}} = \dfrac{3}{4} \\[2ex] \tan\alpha = \dfrac{M_0T_0}{AO_0 + r_0} = \dfrac{M_0T_0}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow M_0T_0 = 12 \Rightarrow M_0L_0 = 24$$

Finalement $\mathcal{A}'_0 = \frac{15}{2} \times 24 = 180 \text{ cm}^2$

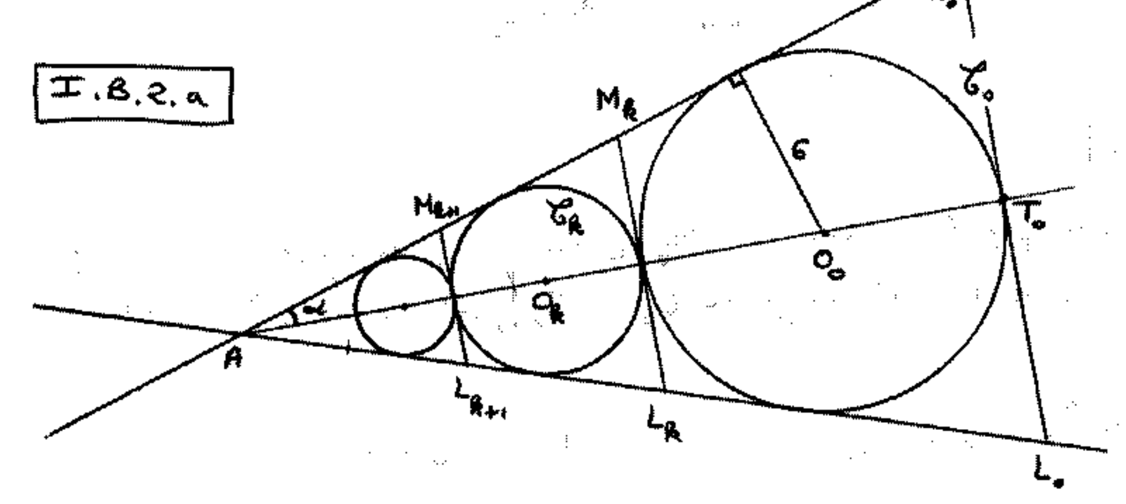
I.B.1.a

$\mathcal{F}$ est globalement invariante sous l'action de t' et de t''

I.B.1.b Les axes de symétrie de $\mathcal{F}$ sont

- la droite formée des points équidistants de d_1 et d_2
- les droites passant par le centre d'un des cercles $\mathcal{C}_k$ ou par les pts de tangence des cercles, et perpendiculaires à d_1.

I.B.2.a



(fig. 7)

$\mathcal{C}_1 = h'(\mathcal{C}_0)$ où $h' = h_{A,\lambda'}$.

Ici $\lambda' = \dfrac{10-6}{10+6} = \dfrac{1}{4}$, et $\mathcal{C}_{k+1} = h'(\mathcal{C}_k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (en effet, avec les notations de I.A.2.b, $h'(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_1$ et $h''(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_{-1}$, les rapports des homothéties h' et h'' étant λ' et $\lambda'' = \dfrac{1}{\lambda'}$. L'unique homothétie de centre A transformant $\mathcal{C}_{-1}$ en $\mathcal{C}_0$ sera donc $h''^{-1} = h'$. On déduit $h'(\mathcal{C}_{-1}) = \mathcal{C}_0$ et $h'(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_1$ et le résultat)

- On note $\mathcal{F}'_a = d_1 \cup d_2 \cup \left(\bigcup_{k \geq a} \mathcal{C}_k \right)$.

$$\left.\begin{array}{l} h'(d_1) = d_1 \\ h'(d_2) = d_2 \\ h'(\mathcal{C}_k) = \mathcal{C}_{k+1} \end{array}\right\} \Rightarrow h'(\mathcal{F}'_a) = d_1 \cup d_2 \cup \left(\bigcup_{k \geq a} \mathcal{C}_{k+1} \right) = \mathcal{F}'_{a+1}$$

- De même, $h''(\mathcal{C}_k) = \mathcal{C}_{k-1}$ entraînera $h''(\mathcal{F}'_a) = \mathcal{F}'_{a-1}$.

On obtient :

$$\frac{\mathcal{A}_k}{\mathcal{A}'_k} = \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}'_0} = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

$$\boxed{\frac{\mathcal{A}_k}{\mathcal{A}'_k} = \frac{\pi}{5}}$$

I.B.2.c

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}'_k = \mathcal{A}'_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k} = \mathcal{A}'_0 \cdot \frac{1 - \frac{1}{16^{n+1}}}{1 - \frac{1}{16}}$$

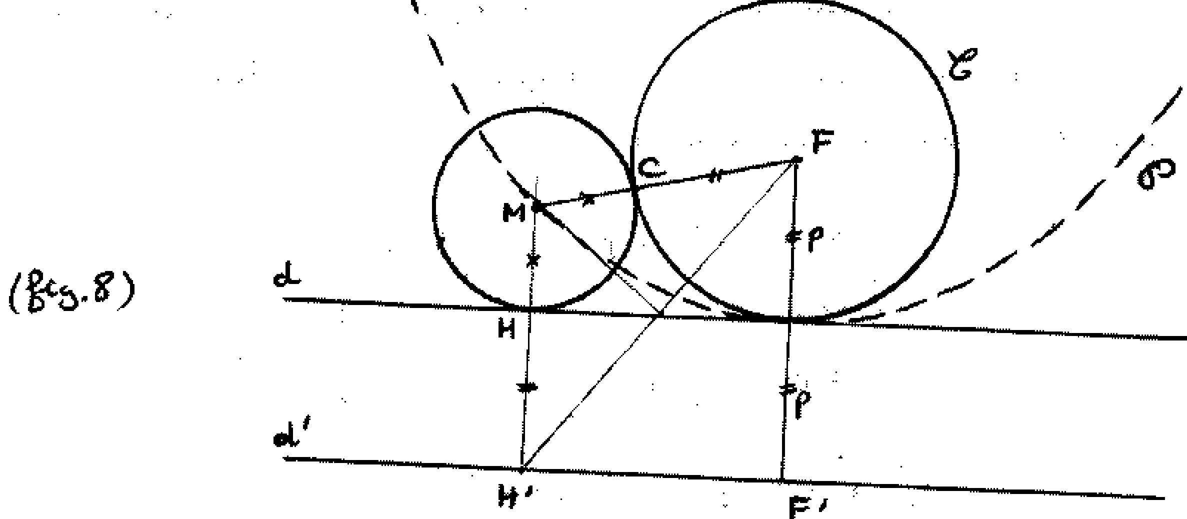
Comme $\mathcal{A}'_0 = 180$, on obtient :

$$S'_n = 192\left(1 - \frac{1}{16^{n+1}}\right)$$

soit $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S'_n = 192}$

De $\mathcal{A}_k = \frac{\pi}{5}\mathcal{A}'_k$ on tire $S_n = \frac{\pi}{5} S'_n$ d'où $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{192\pi}{5}}$

II.1



(fig. 8)

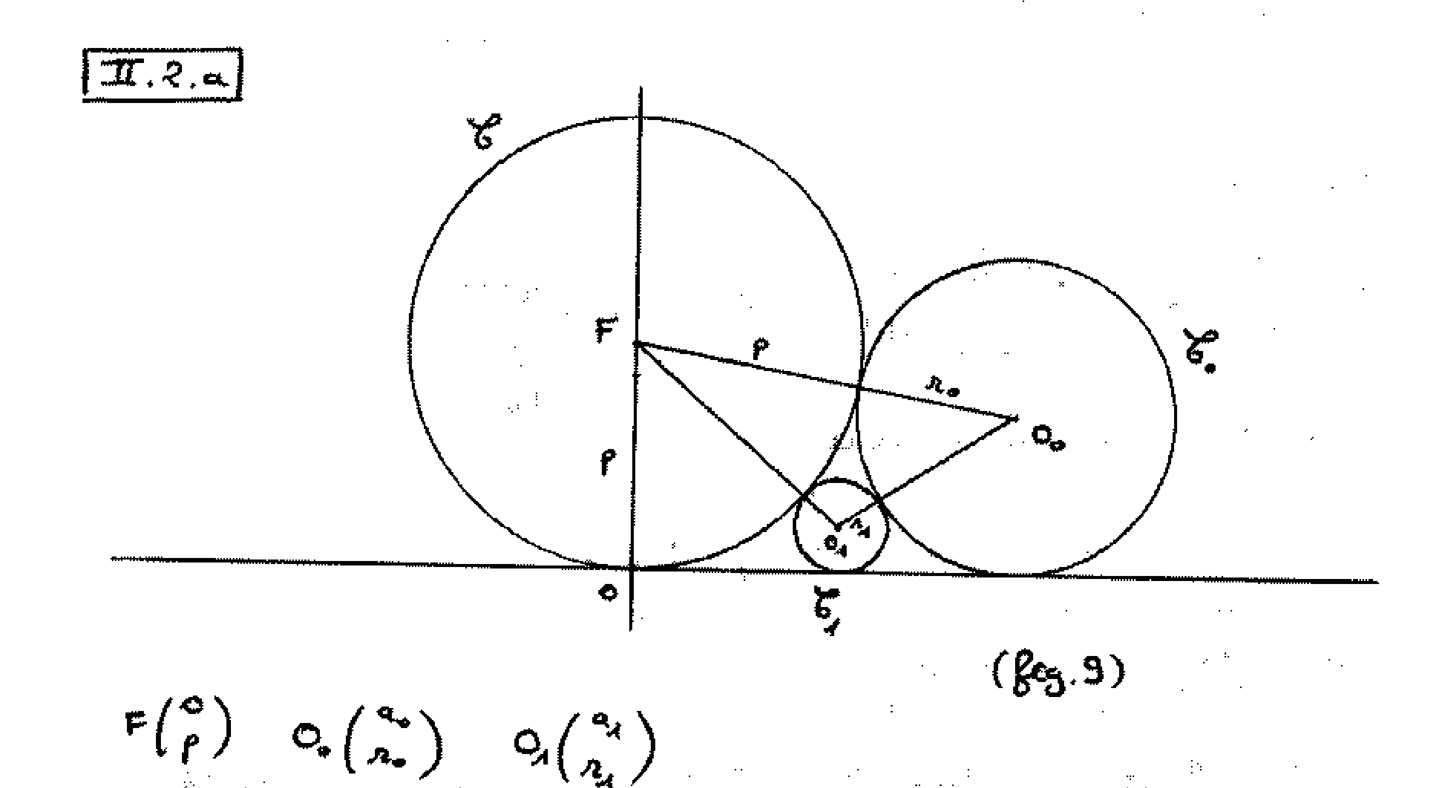
Traçons le symétrique F' de F / à d, puis la droite d' parallèle à d passant par F'. Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F et de directrice d'.
Si $M \in \mathcal{P}$, MH' = MF où H' est la projection orthogonale de M sur d'. Notons (cf fig. 8) H l'intersection de (MH') et d, C l'intersection de [MF] et $\mathcal{C}$.

$$MC = MF - CF = MH' - p = MH$$

Le cercle $\mathcal{C}(M, MC)$ contient donc C et H, et sera tangent à d en H

(car $(MH) \perp d$), et à $\mathcal{C}$ en C (car $C \in [MF]$).
La parabole $\mathcal{P}$ est toute entière incluse dans l'ensemble cherché.

II.2.a



(fig. 9)

$F\begin{pmatrix}0\\p\end{pmatrix}$ $O_0\begin{pmatrix}a_0\\r_0\end{pmatrix}$ $O_1\begin{pmatrix}a_1\\r_1\end{pmatrix}$

Le cercle $\mathcal{C}_1$ sera tangent à l'axe des abscisses si l'ordonnée de son centre est égale à son rayon r_1. Cela étant, $\mathcal{C}_1$ sera tangent à $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}$ si (1) et (2) sont satisfaites. (3) traduit que les cercles $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}$ sont tangents extérieurement :

$$\begin{cases} O_1F = r_1 + p & (1) \\ O_1O_0 = r_1 + r_0 & (2) \\ FO_0 = p + r_0 & (3) \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} a_1^2 + (r_1 - p)^2 = (r_1 + p)^2 \\ (a_1 - a_0)^2 + (r_1 - r_0)^2 = (r_1 + r_0)^2 \\ a_0^2 + (r_0 - p)^2 = (p + r_0)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 = 4pr_1 \Rightarrow r_1 = \dfrac{a_1^2}{4p} & (1') \\ a_0^2 + a_1^2 - 2a_0a_1 = 4r_0r_1 & (2') \\ a_0^2 = 4pr_0 \Rightarrow r_0 = \dfrac{a_0^2}{4p} & (3') \end{cases}$$

En reportant (1') et (3') dans (2') :

$$a_0^2 + a_1^2 - 2a_0a_1 = \frac{a_0^2 a_1^2}{4p^2}$$

$$(4p^2 - a_0^2)a_1^2 - 8p^2a_0a_1 + 4p^2a_0^2 = 0$$

En résolvant cette équation du second degré en a_1, on trouve :

$$a_1 = \frac{4p^2a_0 \pm 2pa_0^2}{4p^2 - a_0^2} = \begin{cases} \dfrac{2pa_0}{2p - a_0} \\ \dfrac{2pa_0}{2p + a_0} \end{cases}$$

Si $a_1 = \dfrac{2pa_0}{2p - a_0}$, alors la condition $0 < a_1 < a_0$ entraîne

$2p - a_0 > 0$ et $\dfrac{2pa_0}{2p - a_0} < a_0$, soit $2p < 2p - a_0$, soit $a_0 < 0$ ce qui est absurde. Donc la seule solution possible est

$$\boxed{a_1 = \frac{2p}{2p + a_0} \cdot a_0}$$

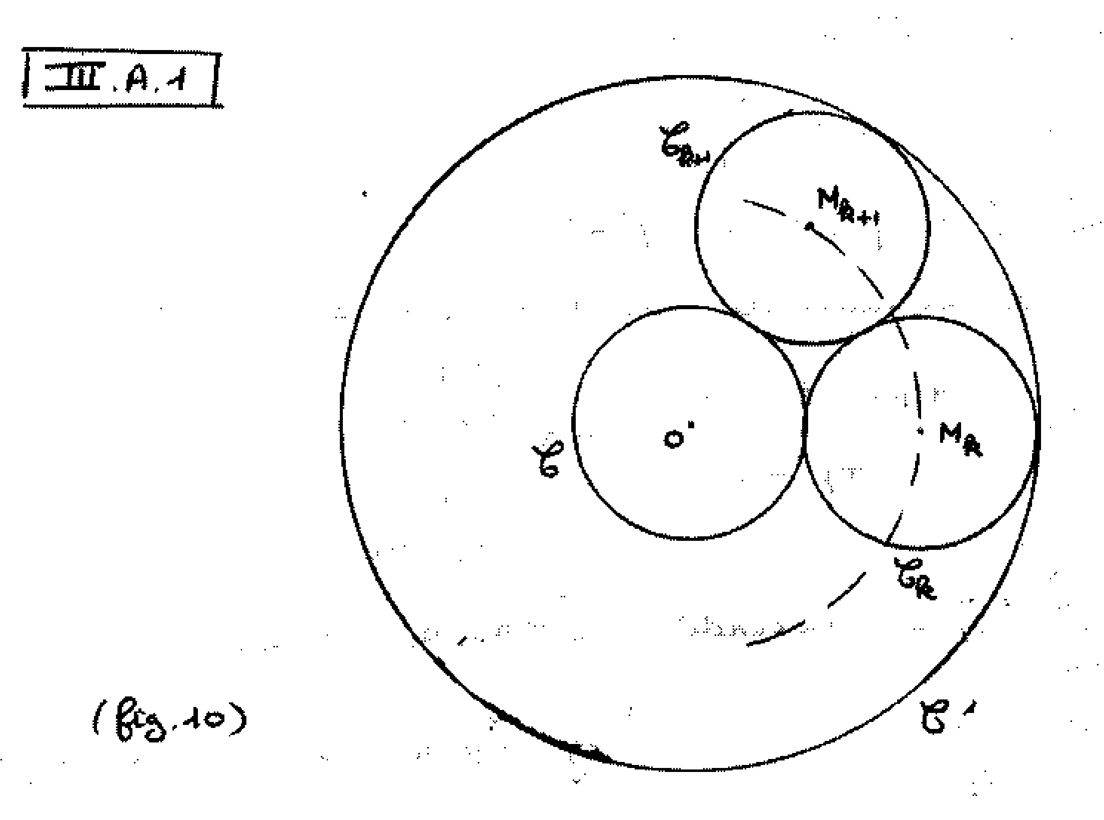
On vérifie que cette valeur de a_1 satisfait $0 < a_1 < a_0$.

D'autre part $r_1 = \dfrac{a_1^2}{4p} = \dfrac{pa_0^2}{(2p + a_0)^2}$

$$\boxed{r_1 = \frac{pa_0^2}{(2p + a_0)^2}}$$

II.2.b $a_{k+1} = \dfrac{2pa_k}{2p + a_k} = f(a_k)$ en posant $f(x) = \dfrac{2px}{2p + x}$. La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2px}{2p + x}$ est continue et vérifie $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. La suite (a_k) est décroissante (cf $0 < a_{k+1} < a_k$) et minorée par 0, donc converge vers un réel $\ell \geq 0$. En passant à la limite dans $f(a_k) = a_{k+1}$, on trouve $f(\ell) = \ell$, soit $\dfrac{2p\ell}{2p + \ell} = \ell$, soit $\ell = 0$. Ainsi $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$ et comme $r_k = \dfrac{a_k^2}{4p}$, $\lim_{k \to +\infty} r_k = 0$. □

III.A.1



(fig.10)

$\mathcal{C}_k$ est tangent extérieurement à $\mathcal{C}$ ssi $OM_k = \rho + r$.
$\mathcal{C}_k$ est intérieur à $\mathcal{C}'$ et tangent intérieurement à $\mathcal{C}'$ ssi $OM_k = \rho' - r$, de sorte que

$$r = \frac{\rho' - \rho}{2}$$

$OM_k = \rho + r = \frac{\rho + \rho'}{2}$ montre que $M_k \in \mathcal{C}''(O, \frac{\rho+\rho'}{2})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

De plus $\mathcal{C}_k$ est tangent à $\mathcal{C}_{k+1}$, donc $M_k M_{k+1} = 2r = \rho' - \rho$ sera indépendant de k et tous les points M_k appartiendront à une ligne polygonale régulière inscrite dans $\mathcal{C}''$.

Si I_k désigne le milieu de $[M_k M_{k+1}]$, le triangle $OM_k I_k$ est rectangle en I_k et :

$$\sin \frac{\widehat{M_k O M_{k+1}}}{2} = \sin \widehat{M_k O I_k} = \frac{I_k M_k}{OM_k} = \frac{\frac{\rho' - \rho}{2}}{\frac{\rho' + \rho}{2}} = \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho}$$

III.A.2

- Si les cercles $\mathcal{C}_k$ se "referment en un tour", $M_n = M_0$ entraîne

$$(\vec{OM_0}, \vec{OM_1}) + \dots + (\vec{OM_{n-1}}, \vec{OM_n}) = 0 \qquad [2\pi]$$

et comme $(\vec{OM_k}, \vec{OM_{k+1}}) = \alpha$ est indépendant de k,

$$\alpha n = k 2\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

En fait $k = \pm 1$ sinon il existerait $k, k' \in [0, n[$ tels que $\mathcal{C}_k$ intercepte $\mathcal{C}_{k'}$, et l'on peut même supposer $k = 1$ quitte à changer l'orientation du plan. On trouve :

$$\alpha n = 2\pi \implies \sin\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \qquad (*)$$

- Réc., si $(*)$ est vraie alors $n \neq 0$, $n \neq 1$ (car $\sin \pi = 0 \Rightarrow \rho' = \rho$ absurde) et $n \neq 2$ (sinon $\sin\frac{\pi}{2} = 1 = \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho}$ absurde), donc $n \geq 3$. $(*)$ entraîne aussi :

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{n} = \dfrac{\alpha}{2} & [2\pi] \\ \text{ou} \\ \dfrac{\pi}{n} = \pi - \dfrac{\alpha}{2} & [2\pi] \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $\frac{\pi}{n}$, $\frac{\alpha}{2}$ et $\pi - \frac{\alpha}{2}$ appartiennent à $[0, \pi]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{n} = \dfrac{\alpha}{2} & (1) \\ \text{ou} \\ \dfrac{\pi}{n} = \pi - \dfrac{\alpha}{2} & (2) \end{cases}$$

Si (2) a lieu, alors $n \geq 3$ entraîne $\pi - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} \leq \alpha$, ce qui est absurde. Donc (1) a toujours lieu, et $\alpha n = 2\pi$ s'écrit :

$$(\vec{OM_0}, \vec{OM_1}) + \dots + (\vec{OM_{n-1}}, \vec{OM_n}) = 0$$

d'où $M_n = M_0$. Les cercles se referment en un tour. CQFD

• $(\lambda+1)\sin\frac{\pi}{n} = \lambda - 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$

soit $$\lambda = \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} + \tan\frac{\pi}{n}\right)^2$$

• <u>Si n = 3</u>, $\lambda = (2+\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3}$

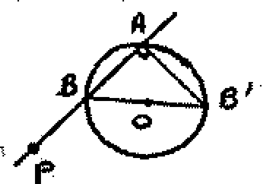
<u>Si n = 4</u>, $\lambda = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$

<u>Si n = 6</u>, $\lambda = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3$

III.B.1.a

A est sur le cercle de diamètre [BB'], donc le triangle ABB' est rectangle en A et :

$$\vec{PB}.\vec{PB'} = \vec{PB}.\vec{PA} = \overline{PB}.\overline{PA}$$



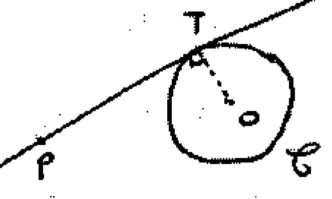
III.B.1.b

$$\vec{PB}.\vec{PB'} = (\vec{PO}+\vec{OB}).(\vec{PO}+\vec{OB'}) = PO^2 + \vec{PO}.(\vec{OB}+\vec{OB'}) + \vec{OB}.\vec{OB'}$$
$$= PO^2 - r^2 \quad \text{puisque } \vec{OB'} = -\vec{OB} \text{ et } \|\vec{OB}\| = r.$$

III.B.1.c

On vient de montrer que $\overline{PA}.\overline{PB} = PO^2 - r^2$ ne dépend que de P, de O et de r, ie de P et du cercle $\mathcal{C}$. Ce produit ne dépend pas du choix de la droite d.

III.B.1.d Le théorème de Pythagore permet d'écrire : $PT^2 = PO^2 - OT^2 = PO^2 - r^2 = p$



III.B.2.a Pour tout $M \in \mathcal{P}^*$:

$$s_1(M) = M_1 \iff \overline{\Omega M_1}.\overline{\Omega M} = k_1 \quad \text{et} \quad M_1 \in (\Omega M)$$
$$s_2(M_1) = M' \iff \overline{\Omega M'}.\overline{\Omega M_1} = k_2 \quad \text{et} \quad M' \in (\Omega M_1)$$

donc $\overline{\Omega M'}.\dfrac{k_1}{\overline{\Omega M}} = k_2 \Rightarrow \overline{\Omega M'} = \dfrac{k_2}{k_1}\overline{\Omega M}$

Comme Ω, M, M' sont alignés, on aura $\overrightarrow{\Omega M'} = \dfrac{k_2}{k_1}\overrightarrow{\Omega M}$ pour tout $M \in \mathcal{P}^*$, ce qui prouve que

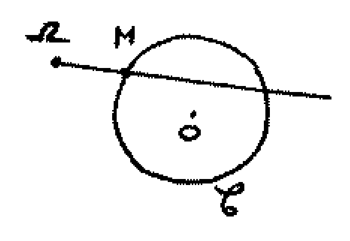
$$s_2 \circ s_1 = h$$

III.B.2.b

En composant à droite par s_1 et compte tenu de $s_1^2 = Id$, on trouve :

$$s_2 \circ s_1 = h \Longrightarrow s_2 = h \circ s_1$$

III.B.2.c



- Si $M \in \mathcal{C}$, $M' = s_{\Omega,p}(M)$ vérifie

$$M' \in (\Omega M) \quad \text{et} \quad \overline{\Omega M'}.\overline{\Omega M} = p$$

Soit B le point où la droite (ΩM) recoupe $\mathcal{C}$ (éventuellement confondu avec M). Par définition de p :

$$\overline{\Omega M}.\overline{\Omega B} = p$$

d'où $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega B} = \overline{\Omega M'}.\overline{\Omega M} \Rightarrow \overline{\Omega B} = \overline{\Omega M'} \Rightarrow B = M'$

Donc $M' \in \mathcal{C}$. On a prouvé :

$$s_{\Omega,p}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$$

Comme $s_{\Omega,p}$ est involutive, cette dernière inclusion entraîne

$$s_{\Omega,p}(s_{\Omega,p}(\mathcal{C})) = \mathcal{C} \subset s_{\Omega,p}(\mathcal{C})$$

et finalement $\boxed{s_{\Omega,p}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.}$

• D'après III.B.2.b, $\mathcal{I}_{\Omega,k} = h_{\Omega,\frac{k}{p}} \circ \mathcal{I}_{\Omega,p}$ donc

$$\mathcal{I}_{\Omega,k}(\mathcal{C}) = h_{\Omega,\frac{k}{p}}(\mathcal{I}_{\Omega,p}(\mathcal{C})) = h_{\Omega,\frac{k}{p}}(\mathcal{C})$$

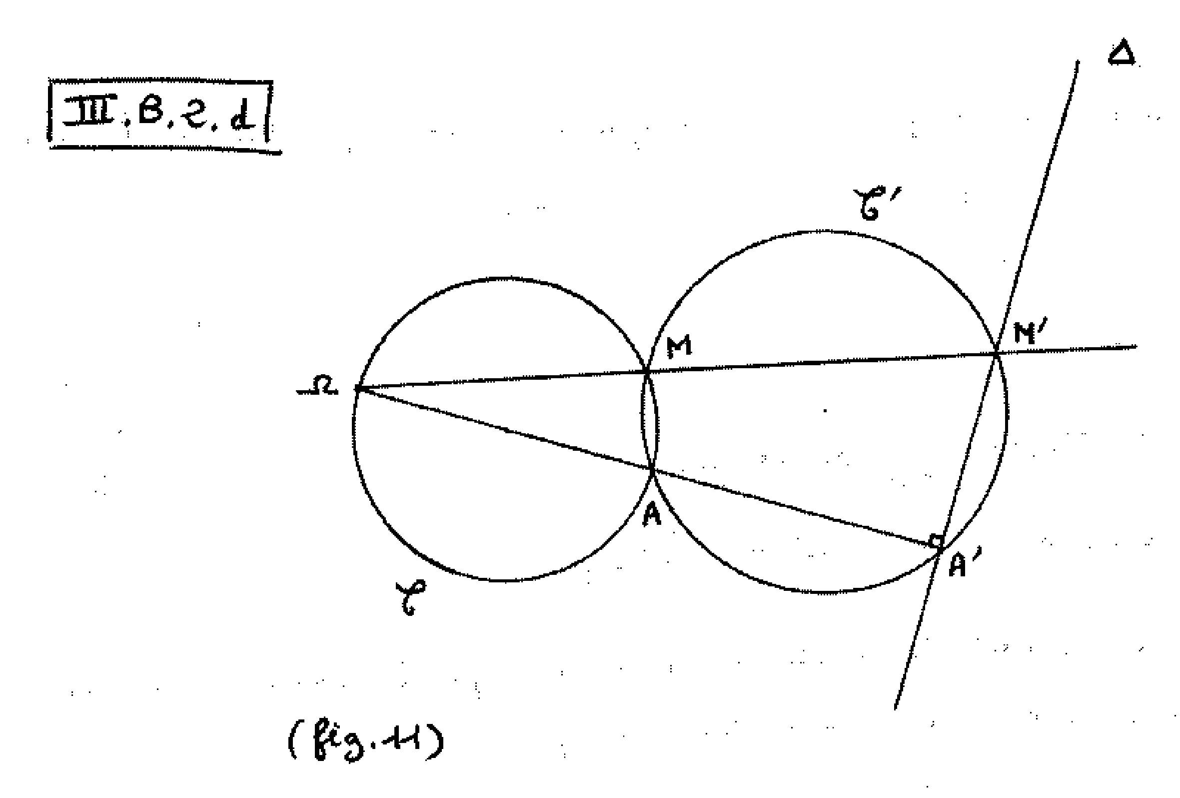
• $\overrightarrow{\Omega O'_1} = \frac{k}{p}\overrightarrow{\Omega O}$ donc $\overline{\Omega O'_1} = \frac{k}{p}\overline{\Omega O}$.

Si O'_1 était égal à $\mathcal{I}_{\Omega,k}(O)$, on aurait :

$\overline{\Omega O'_1}.\overline{\Omega O} = k \Rightarrow \frac{k}{p}\Omega O^2 = k \Rightarrow \Omega O^2 = p = \Omega O^2 - r^2 \Rightarrow r = 0$

ce qui est à rejeter.

III.B.2.d



(fig. 11)

• L'angle $\widehat{AA'M'}$ est droit, donc A' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[AM']$.
M est un point du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[A\Omega]$, donc l'angle $\widehat{\Omega MA}$, et par suite l'angle $\widehat{AMM'}$, est droit. On en déduit aussi $M \in \mathcal{C}'$.

• La puissance de Ω par rapport à $\mathcal{C}'$ est

$$\overline{\Omega M}.\overline{\Omega M'} = \overline{\Omega A}.\overline{\Omega A'} = k$$

de sorte que $M' = \mathcal{I}_{\Omega,k}(M)$. On montre ainsi que $\mathcal{I}_{\Omega,k}(\mathcal{C}) \subset \Delta$.

• Réciproquement, si $M' \in \Delta$, la droite $(\Omega M')$ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point M distinct de Ω (sinon M' appartiendrait au demi-plan fermé de frontière la perpendiculaire à (ΩA) passant par Ω. Mais Δ ne contient aucun point de ce demi-plan. Absurde)
D'après ce qui précède, $\mathcal{I}_{\Omega,k}(M) = M'$. Donc $\Delta \subset \mathcal{I}_{\Omega,k}(\mathcal{C})$.

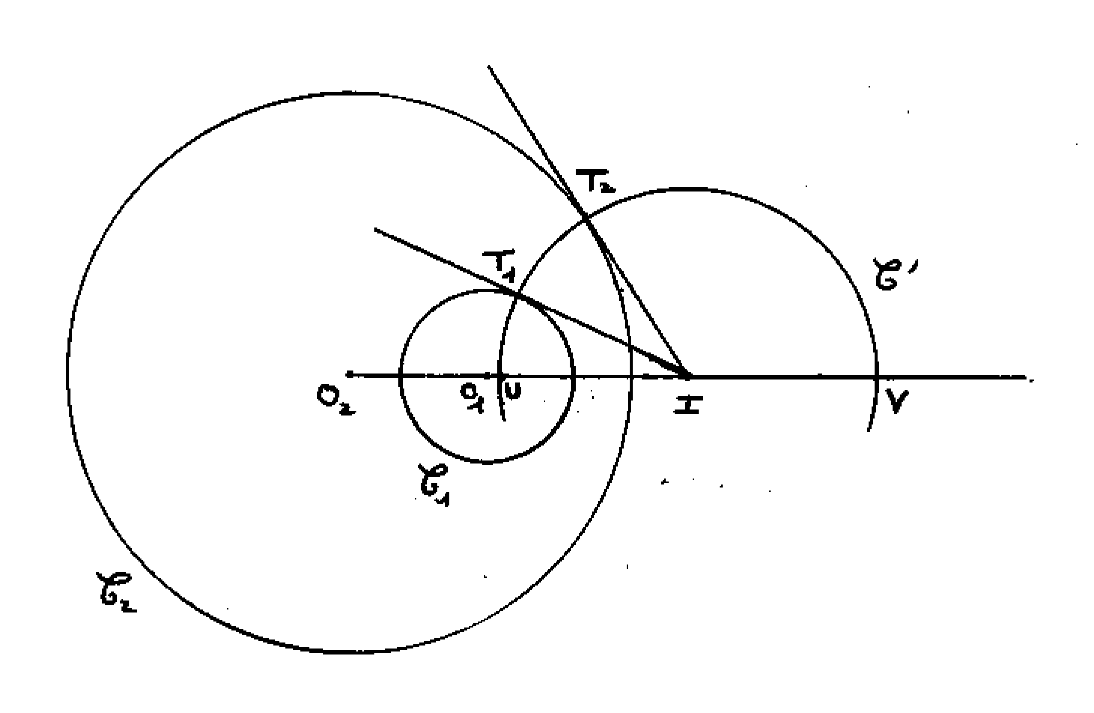
• <u>Conclusion</u> : $\mathcal{I}_{\Omega,k}(\mathcal{C}) = \Delta$

<u>NB</u> : 1) $\mathcal{I}_{\Omega,k}$ étant involutive, on déduit aussi $\mathcal{C} = \mathcal{I}_{\Omega,k}(\Delta)$

2) $\mathcal{I}_{\Omega,k}$ n'étant pas définie en Ω, $\mathcal{I}_{\Omega,k}(\mathcal{C}) = \mathcal{I}_{\Omega,k}(\mathcal{C} \setminus \{\Omega\})$.

On remarquera que $\mathcal{I}_{\Omega,k} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est une fonction, que $\mathcal{I}_{\Omega,k} : \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}$ est une application, et que $\mathcal{I}_{\Omega,k} : \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^*$ est une bijection.

III.C.1.a



(fig 12)

Dire que M a la même puissance par rapport à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ revient à écrire

$$MO_1^2 - r_1^2 = MO_2^2 - r_2^2$$

$$MO_2^2 - MO_1^2 = r_2^2 - r_1^2$$

On reconnaît une ligne de niveau de la fonction scalaire de Leibniz. En coupant en O_2, on trouve :

$$\overrightarrow{O_2M} \cdot \overrightarrow{O_2O_1} = \frac{r_2^2 - r_1^2 + O_2O_1^2}{2} \qquad (*)$$

Choisissons un repère unitaire sur la droite (O_2O_1), d'origine O_2 et tel que $\overline{O_2O_1} = c > 0$. Notons x l'abscisse d'un point de (O_2O_1) vérifiant $(*)$, on a :

$$x \cdot c = \frac{r_2^2 - r_1^2 + c^2}{2}$$

$$x = \frac{r_2^2 - r_1^2 + c^2}{2c}$$

donc I existe et est unique.

On vérifie que $i > r_2$, ce qui prouvera que I est extérieur à $\mathcal{C}_2$:

$$i > r_2 \iff r_2^2 - r_1^2 + c^2 > 2cr_2$$

$$\iff (r_2 - c)^2 > r_1^2$$

$$\iff r_2 - c > r_1$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque $\mathcal{C}_1$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}_2$.

III.C.1.b

- La puissance p de I par rapport à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étant la même, on a :

$$p = IT_1^2 = IT_2^2 \Longrightarrow IT_1 = IT_2$$

- (i) : Notons dorénavant $p(M, \mathcal{C})$ la puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$. On a, en désignant par $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre $[UV]$:

$$p(O_1, \mathcal{C}') = \overline{O_1V}.\overline{O_1U} = O_1T_1^2$$

(puisque (O_1T_1) est la tangente en T_1 à $\mathcal{C}'$, l'angle $\widehat{O_1T_1I}$ étant droit)

Ainsi :

$$\overline{O_1V}.\overline{O_1U} = r_1^2$$

et l'on peut écrire :

$$\overline{VO_1}.\overline{VU} = \overline{VO_1}.(\overline{VO_1} + \overline{O_1U}) = VO_1^2 - r_1^2 = p(V, \mathcal{C}_1)$$

Le cas où $j=2$ se montre de façon identique.

- (ii) : Appliquons III.B.2.c :

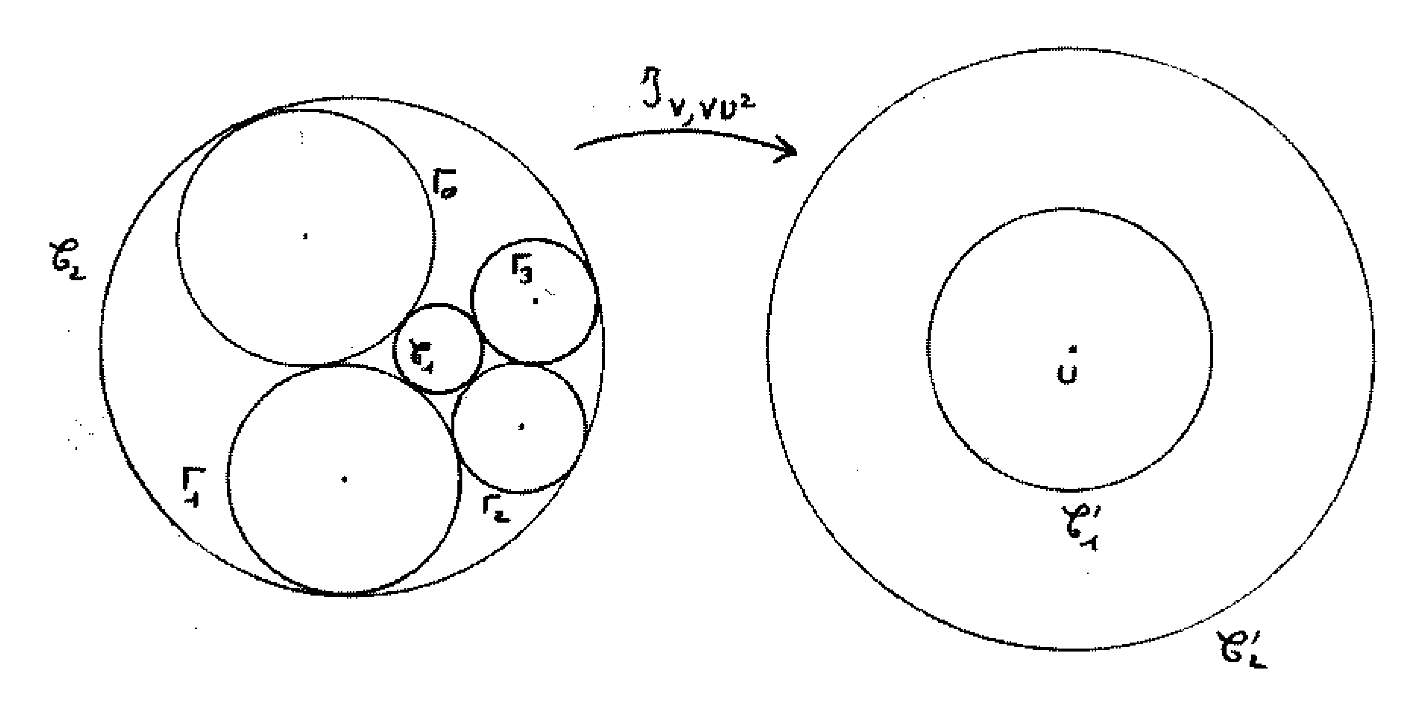
$$\begin{cases} \mathcal{I}_{V,VU^2}(\mathcal{C}_1) = h_{V,\frac{VU^2}{p(V,\mathcal{C}_1)}}(\mathcal{C}_1) = h_{V,\frac{VU^2}{\overline{VO_1}.\overline{VU}}}(\mathcal{C}_1) = h_{V,\frac{\overline{VU}}{\overline{VO_1}}}(\mathcal{C}_1) \\ \mathcal{I}_{V,VU^2}(\mathcal{C}_2) = h_{V,\frac{VU^2}{p(V,\mathcal{C}_2)}}(\mathcal{C}_2) = h_{V,\frac{VU^2}{\overline{VO_2}.\overline{VU}}}(\mathcal{C}_2) = h_{V,\frac{\overline{VU}}{\overline{VO_2}}}(\mathcal{C}_2) \end{cases}$$

Les images des cercles $\mathcal{C}_j$ par $\mathcal{I}_{V,VU^2}$ sont donc les cercles $h_{V,\frac{\overline{VU}}{\overline{VO_j}}}(\mathcal{C}_j)$ de centre $h_{V,\frac{\overline{VU}}{\overline{VO_j}}}(O_j) = U$. Ces cercles sont bien concentriques, de centre U.

III.C.2

L'inversion $\mathcal{I}_{V,VU^2}$ permet de passer de la situation où $\mathcal{C}_1$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}_2$ mais possède un centre différent de celui de $\mathcal{C}_2$, à la situation où les deux cercles sont concentriques. Cette dernière situation a été traitée en III.A.

Prenons les images des cercles Γ_k de la configuration de départ par $\mathcal{I}_{V,VU^2}$.



$\{\Gamma'_k\} = \{\mathcal{I}_{V,VU^2}(\Gamma_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est la configuration de cercles étudiée en III.A avec les cercles de départ $\{\mathcal{C}, \mathcal{C}'\} = \{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2\}$. On a vu que $\{\Gamma'_k\}$ se refermait en un tour ssi $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, ce qui permet de déduire l'alternative de Steiner :

- ou bien $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, $\{\Gamma'_k\}$ se referme en un tour et $\{\Gamma_k\}$ aussi
- ou bien $\sin\frac{\pi}{n} \neq \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, $\{\Gamma'_k\}$ ne se referme pas en un tour et $\{\Gamma_k\}$ non plus.

- Si l'on choisit un autre cercle pour débuter la configuration $\{\Gamma_k\}$, on ne change aucunement la valeur de $\sin \frac{\pi}{n}$, si bien que la configuration obtenue aura toujours la même propriété de se refermer (ou pas) en un tour.

I. LE NOMBRE D'OR

A. À propos de moyennes.

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a \leqslant b$.

On appelle « moyenne arithmétique de a et b » le nombre réel $m = \dfrac{a+b}{2}$. Le nombre réel $g = \sqrt{ab}$ est appelé « moyenne géométrique de a et b » et le nombre réel $h = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]}$ est appelé « moyenne harmonique de a et b ».

1. Dans chacun des deux exercices suivants intervient une des moyennes introduites ci-dessus. On précisera laquelle en justifiant la réponse.

   - Exercice 1.

     Déterminer le côté d'un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle donné.

   - Exercice 2.

     Un cycliste effectue la montée vers un col à une vitesse constante v_1. Dès son arrivée au col, il redescend par la même route à une vitesse constante v_2. Déterminer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet comprenant la montée et la descente. On rappelle la définition : cette vitesse est la vitesse qu'il aurait dû maintenir s'il avait effectué le même trajet, dans le même temps et à allure constante.

     Application numérique : $v_1 = 20$ km/h , $v_2 = 60$ km/h.

2. Montrer que : $a \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant b$.

3. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs est géométrique si et seulement si, pour tout $n \geqslant 1$, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et u_{n+1}.

B. Définition du nombre d'or.

1. On recherche dans cette question tous les triplets (a, b, c) de réels strictement positifs tels que $a + b = c$ et que b soit la moyenne géométrique de a et de c.

   (a, b, c) étant un tel triplet, on pose : $\Phi = \dfrac{b}{a}$.

   (i) Montrer que Φ vérifie : $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$.

   (ii) En déduire que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Φ est appelé le « **nombre d'or** »; on notera pour la suite que :

   $$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1\,.$$

   (iii) Déterminer alors tous les triplets recherchés.

2. On considère deux points A et B sur une droite euclidienne.

On cherche un point C du segment [AB] tel que :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}.$$

a. Montrer que si C existe, on a nécessairement $\frac{AB}{AC} = \Phi$.

b. En déduire l'existence et l'unicité de C.

II. APPROXIMATION DU NOMBRE D'OR

A. Suite de Fibonacci.

On appelle suite de Fibonacci la suite définie par :

(i) $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$;

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On note ψ le nombre $-\frac{1}{\Phi}$ où Φ est le nombre d'or.

1. Montrer que la suite $(F_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.

2. *a.* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2$.

   b. En déduire que $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^{n+1}$.

   c. Montrer que deux termes successifs de la suite de Fibonacci sont toujours premiers entre eux, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le seul diviseur commun dans $\mathbb{N}^*$ de F_n et F_{n+1} est 1.

3. *a.* Montrer que $\psi = 1 - \Phi$ et que $\psi^2 = 1 + \psi$.

   b. Démontrer qu'il existe deux réels uniques a et b tels que :
   $$F_0 = a\Phi^0 + b\psi^0 = a + b,$$
   $$F_1 = a\Phi^1 + b\psi^1 = a\Phi + b\psi.$$

   c. Montrer que $a = \frac{\Phi}{\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$.

   d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
   $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \psi^{n+1}) \text{ et que } F_n \to \infty \text{ quand } n \to \infty.$$

4. Soit p un entier fixé ; $p \geqslant 2$. On veut démontrer que $F_{p+n-1} < F_p F_n < F_{p+n}$.

   a. Montrer que ces inégalités sont vraies quand $n = 2$ et $n = 3$!

   b. Montrer qu'elles sont vraies pour tout entier n ; $n \geqslant 2$.

B. Suite convergeant vers Φ.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

1. Montrer que $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

2. Soit $f : [1\,;2] \to \mathbb{R}$, définie par : $x \to 1 + \frac{1}{x}$.

   Déterminer $k = \text{Max}\left\{ |f'(x)|\,;\ x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \right\}$.

3. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*:\ u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

4. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}:\ |u_n - \Phi| \leqslant k^n$.

5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
Préciser sa limite.
Retrouver ce résultat directement à l'aide de la question A.3.*d*.

6. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et montrer que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que ces deux suites sont adjacentes.

7. Illustrer graphiquement les résultats des questions 5 et 6 précédentes. (On tracera la courbe représentative de la fonction f et celle de la fonction « identité ».)

8. Des mathématiciens écrivent : $\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$

Cela s'appelle décomposition en fraction continue de Φ. Peut-on justifier cette écriture à l'aide des questions précédentes ?

C. **Expression de Φ comme somme d'une série.**

On considère la série de terme général $\dfrac{(-1)^i}{F_i F_{i+1}}$.

On note S_n la somme partielle de cette série : $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{F_i F_{i+1}}$.

1. Montrer que $\dfrac{(-1)^i}{F_i F_{i+1}} = u_{i+1} - u_i$.

2. En déduire que $S_n = u_{n+1} - 1$.

3. Préciser la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Comment expliqueriez-vous à un élève de Terminale scientifique l'expression suivante de Φ :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 \times 1} - \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} \dots + \frac{(-1)^i}{F_i F_{i+1}} + \dots ?$$

D. **Approximations rationnelles de Φ.**

On s'intéresse aux fractions $\dfrac{p}{q}$ irréductibles donnant une « bonne » approximation de Φ.

On dira que $\dfrac{p}{q}$ est une meilleure approximation de Φ que $\dfrac{p'}{q'}$ si

$$\left|\frac{p}{q} - \Phi\right| < \left|\frac{p'}{q'} - \Phi\right|.$$

1. *a.* Montrer que : $u_{n+1} = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ est une meilleure approximation de Φ que $u_n = \dfrac{F_{n-1}}{F_n}$.

b. Montrer que $\left|\dfrac{F_{n+1}}{F_n} - \Phi\right| < \dfrac{1}{F_n^2}$.

(On remarquera que $|u_{n+1} - u_n| = \dfrac{1}{F_n F_{n+1}}$.)

2. Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible comprise entre $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ et $u_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ strictement.

a. Montrer que : $\left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{F_n F_{n+1}}$.

b. On pose $m = | qF_{n+1} - pF_n |$, montrer que m est un entier naturel non nul et que $q > mF_{n+1} \geqslant F_{n+1}$.

3. Montrer que si $\frac{p}{q}$ réalise une meilleure approximation de Φ que $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, alors nécessairement $q > F_n$.

4. *Question difficile (et facultative) donnant un résultat plus précis qu'en 3.*

N étant un entier donné, il existe un entier n unique tel que $F_n \leqslant N < F_{n+1}$. On veut montrer la proposition :

« la meilleure approximation de Φ de dénominateur $q \leqslant N$ est $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ ». Pour cela on démontre d'abord le lemme : « Les seules solutions en nombre entier de l'équation $pF_{n-1} - qF_n = (-1)^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ sont du type $p = F_{n+1} + kF_n$, $q = F_n + kF_{n-1}$ ». On déduit de ce lemme et de la question 2.*b.* ci-dessus que si $\frac{p}{q}$ est entre $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ et $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ strictement, alors $q = F_{n+1}$ ou $q > 2F_n$, d'où la conclusion.

III. NOMBRES DE FIBONACCI

A. Étude de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \leqslant \Phi^n$.

2. On pose $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} F_n x^n$ où $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $|x| < \frac{1}{\Phi}$, $f_N(x)$ admet une limite $f(x)$ quand $N \to \infty$.

3. Montrer que $f_N(x)(x^2 + x - 1) = -1 + F_{n+1}x^{n+1} + F_n x^{n+2}$.

En déduire que pour tout x, $|x| < \frac{1}{\Phi}$, on a :

$$f(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

4. La série précédente est-elle convergente pour des valeurs de x telles que $|x| \geqslant \frac{1}{\Phi}$?

B. Étude de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que la quantité $g(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{F_n}{n!} x^n$ est définie quel que soit x réel.

2. Montrer que la fonction $x \to g(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$y'' - y' - y = 0 \qquad \text{avec} \qquad y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 1.$$

3. Résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire que quel que soit x réel on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n = \frac{1}{\Phi - \psi} (\Phi e^{\Phi x} - \psi e^{\psi x}).$$

Tournez la page S.V.P.

C. **Polynôme de degré n prenant $n + 2$ valeurs consécutives de la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**

On se propose de montrer qu'étant donné un entier naturel n quelconque, il existe un unique polynôme P_n, de degré n, tel que pour tout entier k, $n \leqslant k \leqslant 2n + 1$, on ait $P_n(k) = F_k$ et qu'en outre $P_n(2n + 2) = F_{2n+2} - 1$.

1. Montrer que, si un tel polynôme P_n existe, il est nécessairement unique.

2. Déterminer directement P_0 et P_1.

3. *a.* Étant donné un polynôme P quelconque appartenant à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n, on lui associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X+2) - P(X+1).$$

Montrer que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b. On considère alors l'application :

$$g : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow (Q, P(n)).$$

Montrer que g est une application linéaire bijective.

(On rappelle qu'une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie est bijective.)

c. Vérifier que $g(P_1) = (P_0, F_1)$.

4. Supposons alors construit le polynôme P_{n-1} correspondant à la propriété cherchée.
P_{n-1} est donc un polynôme de degré $n - 1$ tel que pour tout j, $n - 1 \leqslant j < 2n - 1$, on ait :

$P_{n-1}(j) = F_j$ et qu'en outre

$P_{n-1}(2n) = F_{2n} - 1$.

En utilisant la question 3 précédente, montrer l'existence du polynôme P_n vérifiant la propriété annoncée au début de cette partie C.

5. Déterminer P_2.

D. **Étude de l'anneau $\mathbb{Z}[\Phi]$.**

On appelle $\mathbb{Z}[\Phi]$ l'ensemble des nombres réels s'écrivant sous la forme $a + b\Phi$ où a et b sont des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z}[\Phi] = \{ a + b\Phi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\Phi]$ muni de l'addition et de la multiplication des nombres est un anneau.

2. On considère l'application $\nu : \mathbb{Z}[\Phi] \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$\nu(a + b\Phi) = a^2 - b^2 + ab.$$

a. Vérifier que $\nu(xy) = \nu(x)\,\nu(y)$ pour tous les x et y de $\mathbb{Z}[\Phi]$.

b. Montrer que si x admet dans $\mathbb{Z}[\Phi]$ un élément inverse pour la multiplication (noté x^{-1}) on a nécessairement $\nu(x) = 1$ ou $\nu(x) = -1$.

c. Réciproquement si un élément $a + b\Phi$ de $\mathbb{Z}[\Phi]$ vérifie $a^2 - b^2 + ab \in \{-1, +1\}$, montrer qu'il admet dans $\mathbb{Z}[\Phi]$ un inverse pour la multiplication et que, si cet inverse est noté $u + v\Phi$, les entiers relatifs u et v sont solutions du système :

$$\begin{cases} au + bv = 1 \\ bu + (a+b)v = 0. \end{cases}$$

3. *a.* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu(F_n + F_{n+1}\Phi) \in \{-1, +1\}$ et que si l'on note $G_n = (-1)^n F_n$, $\nu(G_{n+1} + G_n \Phi) \in \{-1, +1\}$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ les éléments $\varepsilon(F_n + F_{n+1}\Phi)$ et $\varepsilon(G_{n+1} - G_n \Phi)$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\Phi]$ pour la multiplication. On peut montrer que ce sont en fait les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\Phi]$ pour la multiplication.

4. Préciser les inverses de $F_n + F_{n+1}\Phi$ et de $F_{n+1} - F_n \Phi$.

Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

Cl. Piquet
11.12.04

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1996

I. LE NOMBRE D'OR

A. À propos de moyennes.

1.

· Soit un rectangle de côtés a et b ; son aire vaut $ab = g^2$, donc le carré cherché a pour côté $g = \sqrt{ab}$ = la moyenne géométrique des côtés a et b du rectangle donné.

· Soit v la vitesse moyenne cherchée, t_1 le temps mis par le cycliste pour monter au col et t_2 la durée de la descente ; on a, la distance parcourue étant toujours la même,

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 = \frac{1}{2} v(t_1 + t_2) \qquad \text{soit} \qquad \frac{t_1}{\frac{1}{v_1}} = \frac{t_2}{\frac{1}{v_2}} = \frac{t_1 + t_2}{\frac{2}{v}}$$

d'où $\frac{2}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$ ou encore $v = \dfrac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2})}$: la vitesse v cherchée est la moyenne harmonique des vitesses v_1 et v_2.

Si $v_1 = 20$ et $v_2 = 60$ (en km/h), il vient $\frac{2}{v} = \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{4}{60}$ d'où $v = 30$ km/h.

2. On a $2g = 2\sqrt{ab} \leq a + b = 2m$ d'où $g \leq m$; comme $a \leq b$, on a aussi $m \leq b$ et $a \leq g$ donc $a \leq g \leq m \leq b$. Si l'on pose $a = 1/b'$, $b = 1/a'$, on a $a' \leq b'$ et donc, avec des notations évidentes, $a' \leq g' \leq m' \leq b'$; or $g' = 1/g$ et $m' = 1/h$; prenant les inverses des termes de l'encadrement précédent, il vient $a \leq h \leq g \leq b$ d'où en définitive

$$a \leq h \leq g \leq m \leq b\,.$$

3. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs est géométrique si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que, pour tout n, $u_{n+1} = r u_n$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r = \frac{u_n}{u_{n-1}}$, ce qui implique $u_n = \sqrt{u_{n+1} u_{n-1}}$. Inversement, cette propriété implique que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n-1}}$ est une constante $r > 0$ indépendante de n, donc que $u_{n+1} = r u_n$: u_n est une suite géométrique.

B. Définition du nombre d'or.

1. (i) L'égalité $a + b = c$ donne, compte-tenu de $b = \Phi a = \sqrt{ac}$, $a + \Phi a = \frac{b^2}{a} = a\Phi^2$ d'où $1 + \Phi = \Phi^2$ soit $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}\cdot$

(ii) Φ est donc la racine positive de l'équation du second degré $s^2 - s - 1 = 0$, donc $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\cdot$

(iii) Les triplets (a, b, c) cherchés sont donc déterminés à un facteur positif près ; ce sont tous les triplets de la forme $(\lambda, \lambda\Phi, \lambda\Phi^2)$ où Φ est le nombre d'or et λ un réel positif quelconque.

2. a. On pose $CB = a$, $AC = b$ et $AB = c$. C appartenant au *segment* $[AB]$, on a $a+b=c$. La condition de l'énoncé se traduit par

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$$

c'est-à-dire par le fait que b est moyenne géométrique des nombres a et c. La question précédente donne alors $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{a} = \Phi$.

b. Φ étant un nombre réel > 1, l'existence de C en résulte (et sa construction éventuelle à la règle et au compas).

II. APPROXIMATIONS DU NOMBRE D'OR

A. Suite de Fibonacci.

1. Il est immédiat que F_n est, pour tout $n \geq 0$, un entier strictement positif (récurrence utilisant le fait que la somme de deux entiers strictement positifs est encore un entier strictement positif). Comme $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} > 0$, il en résulte la croissance stricte de $(F_n)_{n\geq 1}$.

2. a. $F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} = F_{n+2}^2 - F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) = F_{n+2}(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2$.

b. L'entier $F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3}$ change donc de signe lorsque n décroît de 1 ; comme $F_1^2 - F_0F_2 = -1$ et qu'il y a n changements de signe pour "remonter" au rang n, on a

$$F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^{n+1}\,.$$

c. Si p entier divise F_n et F_{n+1}, alors p divise aussi $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^{n+1}$, donc $p = 1$.

3. a. On a $\Psi = -\dfrac{1}{\Phi} = 1 - \Phi$ d'après I.B.1.ii. donc $\Psi^2 = \dfrac{1}{\Phi}(\Phi - 1) = 1 - \dfrac{1}{\Phi} = 1 + \Psi$.

b. On cherche deux réels a et b tels que

$$a + b = 1 \qquad a\Phi + b\Psi = 1\,.$$

Ce système linéaire équivaut à $a\Phi + b\Phi = \Phi \quad a\Phi + b\Psi = 1$, donc à $b(\Psi - \Phi) = \Psi$ et $a(\Phi - \Psi) = \Phi$, ce qui démontre l'existence et l'unicité des nombres a et b.

c. Comme $\Phi - \Psi = 2\Phi - 1 = \sqrt{5}$, on obtient

$$a = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} \qquad b = -\frac{\Psi}{\sqrt{5}}\,.$$

d. Il en résulte que l'égalité

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1})$$

est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la vraie jusqu'au rang n. Comme $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, on a, par addition,

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} + \Phi^n - \Psi^{n+1} - \Psi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2})$$

car $1 + \Phi = \Phi^2$ et $1 + \Psi = \Psi^2$. La relation de l'énoncé est donc vraie au rang $n+1$, donc pour tout $n \geq 0$ par récurrence.

Puisque $\Phi > 1$, $|\Psi| < 1$, et $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{\Psi}{\Phi})^n = 0$. Donc $F_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. On peut même préciser que $F_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Phi^{n+1}$ quand $n \to \infty$.

4. a. On a $F_2 = 2$, et $F_3 = 3$. Vérifier l' encadrement proposé pour $n = 2$, c'est vérifier que, pour $p \geq 2$, $F_{p+1} < 2F_p < F_{p+2}$; cet encadrement résulte de la croissance stricte de $(F_n)_n$, car il est équivalent à $F_{p-1} < F_p < F_{p+1}$. Pour $n = 3$, on a à vérifier que

$$F_{p+2} < 3F_p < F_{p+3} = F_{p+2} + F_{p+1} \quad \text{soit} \quad F_{p+1} < 2F_p < 2F_{p+1}$$

qui résulte de l'encadrement précédent.

b. Si l'encadrement de l'énoncé est exact pour deux entiers n et $n+1$ consécutifs, il suffit d'ajouter membre à membre les termes des deux encadrement pour obtenir l'encadrement au rang $n+2$. Ceci démontre que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

B. Suite convergeant vers Φ.

1. On divise la relation (ii) de définition de la suite de Fibonacci par $F_{n+1} > 0$ pour obtenir

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \cdot$$

2. f est dérivable et $|f'(x)| = 1/x^2$ est décroissante ; son maximum k vaut donc $k = |f'(\frac{3}{2})| = \frac{4}{9} \cdot$

3. f est monotone décroissante et continue, donc

$$f([\frac{3}{2}, 2]) = [f(2), f(\frac{3}{2})] = [\frac{3}{2}, \frac{5}{3}] \subset [\frac{3}{2}, 2] .$$

Comme $u_1 \in [\frac{3}{2}, 2]$, intervalle invariant par f, tous les termes d'indice $n \geq 1$ de la suite u_n appartiennent à $[\frac{3}{2}, 2]$.

4. Le théorème des accroissements finis donne

$$|u_{n+1} - \Phi| = |f(u_n) - f(\Phi)| \leq k|u_n - \Phi| \qquad (n \geq 1)$$

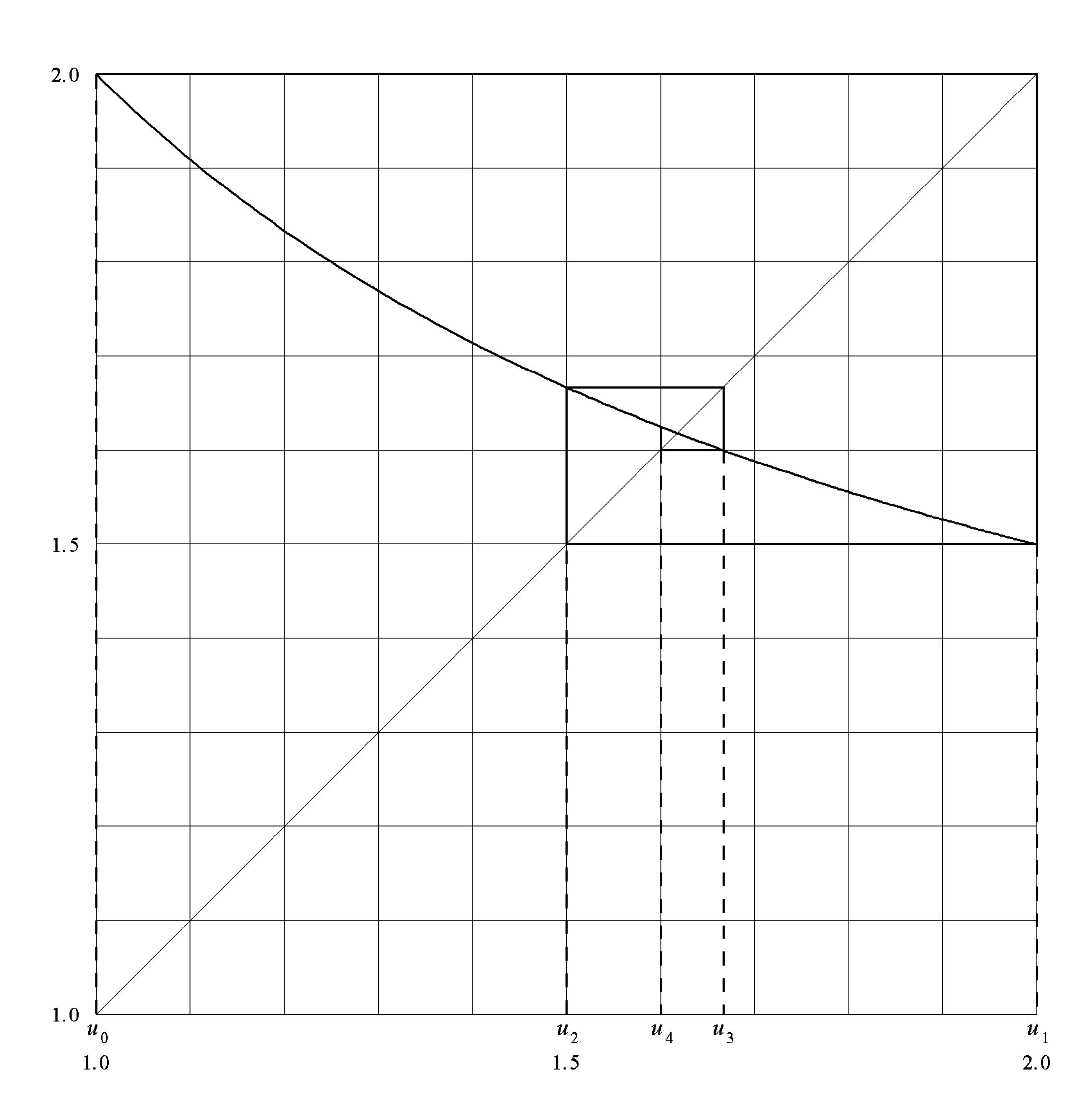
donc $|f(u_n) - f(\Phi)| \leq k^{n-1}|u_1 - \Phi|$. Or $|f(u_1) - \Phi| = 2 - \Phi < k$ (vérification triviale), d'où le résultat demandé.

5. Il en résulte évidemment que la suite $(u_n)_n$ converge vers Φ.

Cela résulte aussi de l'équivalence obtenue en A.3.d. $F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^{n+1}$ d'où il résulte $u_n \sim \Phi$.

6. On a $u_{n+2} = 2 - \frac{1}{u_n + 1} \cdot$ Comme f est monotone strictement décroissante, $f \circ f$ est monotone strictement croissante. Or $u_2 = \frac{3}{2} > u_0$, donc $u_4 = f \circ f(u_2) > f \circ f(u_0) = u_2$ et, par une récurrence triviale, $(u_{2n})_n$ est strictement croissante : $u_{2n+2} > u_{2n}$. Il en résulte, en prenant l'image de cette inégalité par f strictement décroissante, que $(u_{2n+1})_n$ est strictement décroissante. Ces deux suites étant des sous-suites de la suite $(u_n)_n$ qui converge vers Φ, ces deux suites convergent aussi vers Φ et sont donc adjacentes.

7.



8. On a

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u_{n-1}}} = \cdots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_1}}}}$$

avec n barres de fraction. Comme $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \Phi$, ceci explique l'écriture

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

C. Expression de Φ comme somme d'une série.

1. On a $u_{i+1} - u_i = \dfrac{F_{i+2}}{F_{i+1}} - \dfrac{F_{i+1}}{F_i} = \dfrac{(-1)^i}{F_i F_{i+1}}$ d'après A.2.b.

2. $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (u_{i+1} - u_i) = u_{n+1} - 1.$

3. Il en résulte que $\lim_{n\to\infty} S_n = \Phi - 1.$

4. L'écriture classique du texte n'est rien d'autre (par définition de la somme d'une série convergente) qu'une convention pour signifier

$$\Phi = 1 + \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{F_0F_1} - \frac{1}{F_1F_2} + \frac{1}{F_2F_3} \cdots + \frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}}\Big)\cdot$$

D. Approximations rationnelles de Φ.

On sait déjà (A.2.c.) que les fractions $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ sont toutes irréductibles.

1. a. On sait, f étant contractante ($k < 1$), que $|u_{n+1} - \Phi| < |u_n - \Phi|$, ce qui est le résultat demandé.

b. Les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ étant adjacentes et de limite Φ, on a

$$\Big|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \Phi\Big| = |u_n - \Phi| < |u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{F_nF_{n+1}} < \frac{1}{F_n^2} \qquad (n \geq 1)$$

car $(F_n)_n$ est strictement croissante pour $n \geq 1$.

2. a. On suppose n pair pour fixer les idées ; d'après II.B.6., on a $u_n < \Phi < u_{n+1}$, donc $u_n < \dfrac{p}{q} < u_{n+1}$, d'où

$$\Big|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{p}{q}\Big| < |u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{F_{n+1}F_n}\cdot$$

b. m est non nul, sinon p/q serait égal à u_n ; la question précédente donne $m = |qF_{n+1} - pF_n| < \dfrac{q}{F_{n+1}}$, donc $q > mF_{n+1} \geq F_{n+1}$.

3. On a $\big|\dfrac{p}{q} - \Phi\big| < \big|\dfrac{F_{n+1}}{F_n} - \Phi\big|$. On suppose encore n pair (le raisonnement avec n impair étant du même type). On a donc $\big|\dfrac{p}{q} - \Phi\big| < \big|u_n - \Phi\big| = \Phi - u_n$ d'où $\Phi - \dfrac{p}{q} < \Phi - u_n$, soit $u_n < \dfrac{p}{q}$. On a aussi $\big|\dfrac{p}{q} - \Phi\big| < \big|u_{n-1} - \Phi\big| = u_{n-1} - \Phi$ qui donne $\dfrac{p}{q} < u_{n-1}$; $\dfrac{p}{q}$ est donc strictement compris entre u_n et u_{n-1}, et la question précédente donne $q > F_n$.

4. On commence par démontrer le lemme. Il est clair que si (p, q) est une solution du problème posé, il en va de même de $(p + kF_n, q + kF_{n-1})$ et que (F_{n+1}, F_n) est une solution particulière (utiliser l'égalité du A.2.b.). Soit alors (p, q) une solution entière de l'équation ; on a

$$pF_{n-1} - qF_n = (-1)^{n-1} = -F_n^2 + F_{n-1}F_{n+1}$$

d'où $(p - F_{n+1})F_{n-1} = (q - F_n)F_n$. F_n étant premier avec F_{n+1}, le théorème de Gauss implique que F_n divise $(p - F_{n+1})$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p = F_{n+1} + kF_n \qquad \text{et donc} \qquad q = F_n + kF_{n-1}$$

ce qui démontre le lemme.

On examine maintenant p/q irréductible *strictement* compris entre $\dfrac{F_n}{F_{n-1}}$ et $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ et tel que $q \leq N$. On a donc

$$0 < \left|\frac{p}{q} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| < \left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \frac{1}{F_n F_{n-1}}$$

d'où, en multipliant par qF_{n-1}, (q et F_{n-1} sont non nuls)

$$0 < |pF_{n-1} - qF_n| < \frac{q}{F_n} \leq \frac{N}{F_n} < \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \leq 2$$

et comme $|pF_{n-1} - qF_n|$ est entier et appartient à $]0,2[$, il vient $|pF_{n-1} - qF_n| = 1$. Selon que n est pair ou impair, on a $u_n < p/q < u_{n-1}$ ou $u_n > p/q > u_{n-1}$ d'où facilement $pF_{n-1} - qF_n = (-1)^{n-1}$, ce qui permet d'appliquer le lemme :

$$p = F_{n+1} + kF_n \qquad\qquad q = F_n + kF_{n-1}\,.$$

$k = 0$ est exclu car $p/q \neq u_n$; de même, $k = -1$ donnerait $p/q = u_{n-2}$ qui est une moins bonne approximation que u_n. Si $k \leq -2$, on obtient $p \leq F_{n+1} - 2F_n = F_{n-1} - F_n \leq 0$ qui est exclu. On a donc soit $k = 1$, auquel cas $q = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$, soit $k \geq 2$ qui donne $q \geq F_n + 2F_{n-1}$ d'où $q - 2F_n \geq 2F_{n-1} - F_n = F_{n-1} - F_{n-2} > 0$ si $n \geq 2$. Si $n = 1$, $q = 1 + 2 = 3 > 2F_1$, donc $q - 2F_n > 0$ reste vrai aussi dans ce cas.

Comme $\dfrac{p}{q}$ est supposé être une meilleure approximation rationnelle de Φ de dénominateur $q \leq N$ et que, $(F_n)_{n\geq 1}$ étant strictement croissante avec $F_1 = 1$, il existe un unique entier n tel que $F_n \leq N < F_{n+1}$, nécessairement p/q est compris entre u_{n-1} et u_n, sinon l'un de ces deux rationnels serait une approximation de Φ de dénominateur $\leq N$ et de meilleure qualité que p/q. Donc, pour *toute* meilleure approximation rationnelle de Φ de dénominateur $q \leq N$, on a $q = F_{n+1}$ ou $q > 2F_n$ où n est déterminé par la condition $F_n \leq N < F_{n+1}$.

III. NOMBRES DE FIBONACCI

A. Étude de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$.

1. On a $F_0 = 1 = \Phi^0$, $F_1 = 1 < \Phi^1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et la propriété $F_n \leq \Phi^n$ est héréditaire puisque $\Phi^{n-1} + \Phi^n = \Phi^{n+1}$; ceci démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

2. La majoration précédente donne, avec l'inégalité triangulaire,

$$|f_N(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} |x\Phi|^n$$

qui est la somme partielle d'ordre N d'une série géométrique convergente si $|x| < 1/\Phi$. La série $\sum F_n x^n$ est alors *absolument* convergente, donc convergente puisque $\mathbb{R}$ est complet. La suite $(f_N)_N$ est donc convergente.

3. On calcule

$$\begin{aligned}(x^2+x-1)f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} F_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{N} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{N} F_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{N+2} F_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{N+1} F_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{N} F_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{N} (F_{n-2}+F_{n-1}-F_n) x^n + x - (1+x) + (F_N + F_{N-1} x^{N+1} + F_N x^{N+2} \\ &= -1 + F_{N+1} x^{N+1} + F_N x^{N+2}\end{aligned}$$

(on notera une faute de notation dans l'énoncé.)

Faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient, pour $|x| < 1/\Phi$

$$f(x) = -\frac{1}{x^2+x-1}\,.$$

4. Si $|x\Phi| \geq 1$, le terme général de la série examinée ne converge pas vers 0 puisque $|\Phi_n x^n| \sim \dfrac{\Phi}{\sqrt{5}}|x\Phi|^n$ quand $n \to +\infty$. La série est donc divergente. Il en résulte que le *rayon de convergence* de la série étudiée est égal à Φ.

B. Étude de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$.

1. Le terme général de cette série est, en valeur absolue, majoré par $(|x|\Phi)^n/n!$ qui est le terme général d'une série convergente. Le théorème de comparaison montre alors que $\sum \dfrac{F_n}{n!} x^n$ converge absolument pour tout x réel (et l'on a aussi $|g(x)| \leq \exp(|x|\Phi)$. La série entière définissant g converge donc pour tout x réel, si bien que le rayon de convergence de cette série est infini.

2. On peut donc dériver deux fois terme à terme cette série, ce qui donne

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n \qquad g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{n!} x^n \qquad g''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n+2}}{n!} x^n$$

d'où $g'' - g' - g = 0$, $g(0) = F_0 = 1$ et $g'(0) = F_1 = 1$. La fonction g est bien solution de l'équation différentielle $y'' - y' - y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. L'unicité résulte du théorème général sur les équations différentielles linéaires du second ordre, ou, mieux encore dans le cas présent, de la question suivante qui donne l'expression explicite de cette solution.

3. L'équation caractéristique de l'équation différentielle examinée est $s^2 - s - 1 = 0$ dont les racines sont Φ et Ψ. On pose $z = y' - \Psi y$; z est dérivable et

$$z' = y'' - \Psi y' = (1-\Psi)y' + y = -\frac{1}{\Psi}y' + y = -\frac{1}{\Psi}(y' - \Psi y) = \Phi z$$

d'où $\left(e^{-\Phi x} z\right)' = e^{-\Phi x}(z' - \Phi z) = 0$. On a donc $e^{-\Phi x} z = \mathrm{C}^{te} = z(0) = 1 - \Psi = \Phi$. Il vient alors $z = \Phi e^{\Phi x} = y' - \Psi y$ d'où

$$\left(e^{-\Psi x} y\right)' = e^{-\Psi x}(y' - \Psi y) = \Phi e^{(\Phi-\Psi)x}\,.$$

Comme $y(0) = 1$, on a

$$e^{-\Psi x} y = 1 + \frac{\Phi}{\Phi - \Psi}\left(e^{(\Phi-\Psi)x} - 1\right)$$

et en définitive

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n = \frac{1}{\Phi - \Psi} \left(\Phi e^{\Phi x} - \Psi e^{\Psi x} \right).$$

C. Polynôme de degré n prenant $n+2$ valeurs consécutives de la suite de Fibonacci.

1. Si Q_n est un polynôme de degré n vérifiant les mêmes conditions que P_n, le polynôme $P_n - Q_n$ est de degré au plus égal à n et possède $n+3$ zéros (les entiers $\{n, n+1, \ldots, 2n+2\}$; il est donc identiquement nul, ce qui démontre l'unicité de P_n.

2. P_0 est le polynôme constant tel que $P_0(0) = P_0(1) = 1$ et $P_0(2) = F_2 - 1 = 1$, donc $P_0 = 1$.
Si l'on écrit $P_1(x) = ax + b$, il vient

$$a + b = 1, \qquad 2a + b = 2, \qquad 3a + b = 3, \qquad 4a + b = 4$$

d'où $P_1(x) = x$.

3. a. Il est manifeste que Q est de degré au plus égal au degré de P diminué de 1, car le coefficient du terme de plus haut degré est invariant par translation. Donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b. La linéarité de g résulte de la linéarité des deux applications $P \mapsto Q$ et $P \mapsto P(n)$, qui est triviale. Le rappel de l'énoncé s'applique car $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}$ ont même dimension $n+1$; donc montrer que g est bijective est équivalent à montrer que g est injective, c'est-à-dire montrer que son noyau se réduit à $\{0\}$; soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(n) = 0$ et $P(X+2) = P(X+1)$. Ceci donne une infinité de zéros (les points $n+k$, $k \in \mathbb{Z}$) au polynôme P qui est donc nul. Donc $g(P) = 0$ implique $P = 0$, d'où l'injectivité et donc la surjectivité de g.

c. Comme $P_1(X+2) - P_1(X+1) = 1$ et $P_1(1) = 1$, on a bien $g(P_1) = (P_0, F_1)$.

4. On cherche P_n tel que

$$P_n(k) = F_k \qquad \text{si} \quad n \leq k \leq 2n+1 \qquad \text{et} \quad P_n(2n+2) = F_{2n+2} - 1\,.$$

Il en résulte que $g(P_n) = \big(Q, P_n(n)\big)$ où $Q(X) = P_n(X+2) - P_n(X+1)$. Or $P_n(n) = F_n$ et si $n-1 \leq j \leq 2n-1$, on a $n \leq j+1 \leq 2n$ et $n+1 \leq j+2 \leq 2n+1$, donc

$$Q(j) = P_n(j+2) - P_n(j+1) = F_{j+2} - F_{j+1} = F_j \qquad \text{et} \qquad Q(2n) = F_{2n+2} - F_{2n+1} - 1 = F_{2n} - 1$$

donc $Q = P_{n-1}$. Le polynôme P_n cherché n'est donc rien d'autre que $g^{-1}\big(P_{n-1}, F_n\big)$.

5. P_2 est un polynôme de degré 2 au plus, tel que $P_2(X+2) - P_2(X+1) = X$ et $P_2(2) = 2$ donc $P_2(1) = 2$ et $P_2(0) = P_2(1) + 1 = 3$ d'où (par interpolation de Lagrange)

$$P_2(X) = 3\frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} + 2\frac{X(X-2)}{(1-0)(1-2)} + 2\frac{X(X-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 6)\,.$$

D. Étude de l'anneau $\mathbb{Z}[\Phi]$.

1. La vérification est un peu fastidieuse. Aucun problème pour la structure de groupe additif ; en ce qui concerne la multiplication, l'explicitation étant utile dans la suite, on la donne ici

$$(a + b\Phi)(a' + b'\Phi) = \big((aa' + bb') + (ab' + ba' + bb')\Phi\big)\,.$$

On note que cette multiplication est commutative. La distibutivité à gauche (et donc aussi à droite) de la multiplication par rapport à l'addition se vérifie par simple lecture sur la relation précédente.

2. a. La vérification à la main est franchement laborieuse. On l'évite en remarquant que

$$\nu(a+b\Phi) = (a+b\Phi)(a+b\Psi)$$

elle se ramène à vérifier l'évidence suivante, où $x = a+b\Phi$ et $y = c+d\Phi$,

$$\big((a+b\Phi)(c+d\Phi)\big)\big((a+b\Psi)(c+d\Psi)\big) = \big((a+b\Phi)(a+b\Psi)\big)\big((c+d\Phi)(c+d\Psi)\big)$$

(on a évidemment utilisé l'égalité de la question 1 en remplaçant Φ par Ψ).

b. Si x^{-1} existe, on a $x\,x^{-1} = 1$ donc $\nu(x)\nu(x^{-1}) = \nu(1) = 1$, soit $v(x^{-1}) = \nu(x)^{-1}$. Comme $\nu(x)$ est un *entier* relatif et que le produit dans $\mathbb{Z}$ de deux entiers ne vaut 1 que si chacun d'eux est égal à ± 1, on a le résultat demandé.

c. Soit $x = (a+b\Phi)$ vérifiant $\nu(x) = \pm 1$. On veut montrer que x possède un inverse $u + v\Phi$; nécessairement

$$au + bv = 1 \qquad \text{et} \qquad bu + (a+b)v = 0$$

donc, si $\nu(x) = 1$, $a(a+b) - b^2 = 1$, alors $v = -b$, $u = a+b$; si $\nu(x) = -1$, alors $a(a+b)-b^2 = -1$, et $v = b$, $u = -(a+b)$. Dans les deux cas x possède un inverse.

3. a. On vérifie

$$\nu(F_n + F_{n+1}\Phi) = F_n^2 - F_{n+1}^2 + F_nF_{n+1} = F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$$

d'après II.A.2.b. De même, $\nu(G_{n+1} - G_n\Phi) = F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_nF_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

b. Le calcul précédent et la question 2) c. montrent que les éléments $\pm\,(F_n + F_{n+1}\Phi)$ et $\pm\,(G_{n+1} - G_n\Phi)$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\Phi]$ pour la multiplication.

On note ici que les éléments 1 et Φ qui sont inversibles (car $\Phi(\Phi - 1) = 1$) ne sont de la forme indiquée que si l'on accepte $n = -1$ avec $F_{-1} = 0$. Pour la démonstration de l'affirmation de l'énoncé, voir à la fin.

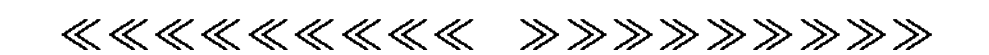
4. Le calcul du 2) c donne, pour inverse de $F_n + F_{n+1}\Phi$, $(-1)^n(F_{n+2} - F_{n+1}\Phi)$ et pour inverse de $F_{n+1} - F_n\Phi$, $(-1)^n(F_{n-2} + F_n\Phi)$ en convenant que $F_1 = 0$.

Démonstration de la propriété : *les éléments inversibles de* $\mathbb{Z}[\Phi]$ *sont les nombres* $\pm\Phi^n$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $x = (a+b\Phi)$ un élément inversible de $\mathbb{Z}[\Phi]$. Comme $\nu(\Phi) = -1$ on peut, en multipliant éventuellement x par Φ se ramener au cas où $\nu(x) = -1$. L'égalité $\nu(-x) = \nu(x)$ permet aussi de supposer $b \geq 0$, donc $b \geq 1$ car $b = 0$ est évidemment impossible car alors $\nu(x) = a^2 = -1$. On peut enfin aussi se ramener au cas où $a \geq 0$; en effet, comme $\nu(x) = -1$, on a $x^{-1} = -(a+b) + b\Phi$ et si $a < 0$, $-(a+b) > 0$ car $a(a+b) = b^2 - 1 \geq 0$. On a alors

$$a^2 + 1 = b(b-a) \qquad \text{avec} \qquad a \geq 0, \quad b \geq 1$$

donc $b \geq a$. Si $b = 1$, alors $a(a+1) = 0$, donc $x = -1 - \Phi = -\Phi^2$ ou $x = \Phi$. Sinon, on divise x par Φ^2, c'est-à-dire que l'on multiplie x par $\Phi^{-2} = 2 - \Phi$. On obtient $x_1 = a_1 + b_1\Phi = (2a-b) + (b-a)\Phi$ avec $\nu(x_1) = \nu(x) = -1$ et $b > b_1 \geq 0$. Si l'on n'a pas $x_1 = -\Phi^2$ ou $x_1 = \Phi$, on recommence cette procédure qui abaisse *strictement* l'entier $b \geq 1$ jusqu'à ce que $b = 1$, auquel cas on obtient $-\Phi^2$ ou Φ. Ceci démontre la propriété annoncée.



CAPES interne de Mathématiques
session 1996
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag36e]

Dans tout le problème on se place dans le plan euclidien $\mathscr{P}$, les droites parallèles entre elles sont toujours orientées par des axes de même sens.

I. BIRAPPORT

A. Birapport de quatre nombres.

1. *a*, *b*, *c*, *d* sont quatre nombres réels distincts, on appelle birapport de ces quatre nombres pris dans cet ordre le nombre noté (a, b, c, d) défini par :

$$(a, b, c, d) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c}.$$

a. Montrer que si $(a, b, c, d) = \lambda$, on a :

— par « permutation des derniers » $(a, b, d, c) = \dfrac{1}{\lambda}$.

— par « permutation des moyens » $(a, c, b, d) = 1 - \lambda$;

b. On peut vérifier facilement que le birapport ne change pas quand on permute deux des quatre nombres, pourvu que l'on permute également les deux autres (ce travail n'est pas demandé).

Calculer les birapports suivants :

$$(a, c, d, b),\ (a, d, b, c)\ (a, d, c, b) \text{ en fonction de } \lambda = (a, b, c, d).$$

2. *a*. Montrer que le birapport des quatre nombres (x_1, x_2, x_3, x_4) pris dans cet ordre est invariant par une transformation affine $(x \to \alpha x + \beta)$.

b. Montrer que le birapport de ces quatre nombres supposés non nuls est invariant par la transformation inverse $\left(x \to \dfrac{1}{x}\right)$.

c. En déduire que, sous réserve d'existence des opérations à faire, le birapport est invariant par une transformation homographique :

$$\left(x \to \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad \text{avec} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\right).$$

3. Réciproquement on cherche une transformation *f* laissant invariant le birapport. Soit *a*, *b*, *c* trois nombres distincts fixés ; a', b', c' leurs images par *f*. Soit *x* un nombre arbitraire *x* distinct de *a*, *b*, *c* et x' son image par *f* tel que :

$$(a', b', c', x') = (a, b, c, x).$$

Montrer que a', b', c', x' sont distincts et que *f* ne peut être qu'une transformation homographique.

B. Birapport de quatre points, de quatre droites.

1. On considère une droite (Δ) sur laquelle on a choisi une origine O et un vecteur unitaire $\vec{u}$. On appelle birapport de quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de (Δ) pris dans cet ordre le birapport de leurs abscisses. Il sera noté (M_1, M_2, M_3, M_4).

Montrer que $(M_1, M_2, M_3, M_4) = \dfrac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} : \dfrac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}}$.

Montrer que le birapport est indépendant du choix de O et de $\vec{u}$.

2. Soient quatre droites distinctes (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) concourantes en O, et (Δ) une droite quelconque ne passant pas par O coupant ces quatre droites aux points M_1, M_2, M_3, M_4 respectivement. Par M_2 on mène une parallèle (D'_1) à (D_1), qui coupe (D_3) en N_3 et (D_4) en N_4. Chaque droite est munie d'un repère.

a. Montrer que : $\dfrac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}} = \dfrac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_3}}$, $\dfrac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}} = \dfrac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_4}}$.

En déduire que $(M_1\,M_2\,M_3\,M_4) = \dfrac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}}$.

b. Soit (Δ') une autre droite ne passant pas par O, coupant (D_1) (D_2) (D_3) (D_4) respectivement en M'_1, M'_2, M'_3, M'_4.

Montrer que : $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)$.

Par définition, cette valeur commune est appelée birapport des quatre droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) prises dans cet ordre. Il est noté $((D_1), (D_2), (D_3), (D_4))$.

3. Étendre la définition du birapport au cas où les quatre droites sont parallèles.

4. Un faisceau de quatre droites concourantes ou parallèles est transformé par une isométrie. Que devient leur birapport ?

5. *Birapport de quatre points sur un cercle.* Soit (C) un cercle orienté, M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points distincts de (C), A un point quelconque de (C).

Montrer que le birapport des quatre droites (AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4) est indépendant de la position de A. Si A est confondu avec l'un des points M_i, la droite (AM_i) est remplacée par la tangente en M_i.

Par définition le birapport des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 pris dans cet ordre sur le cercle et noté (M_1, M_2, M_3, M_4) est le birapport des quatre droites (AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4).

C. **Division harmonique.**

On dit que quatre points alignés distincts A, B, C, D pris dans cet ordre forment une division harmonique si $(A, B, C, D) = -1$. D est dit conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

1. *a.* Montrer que si (A, B, C, D) est une division harmonique, il en est de même de la division (B, A, C, D).

b. (A, B, C, D) est une division harmonique, ω est le milieu de AB ; *a, b, c, d* les abscisses respectives de A, B, C, D sur la droite qui les porte, munie d'un repère. Montrer que :

(i) $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$;

(ii) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$;

(iii) $\omega A^2 = \omega B^2 = \overline{\omega C} \cdot \overline{\omega D}$.

(La démonstration des points (ii) et (iii) peut être facilitée par un choix judicieux de l'origine du repère sur la droite portant les points A, B, C, D).

c. Énoncer la réciproque de (iii). La démonstration faite à la question précédente de la propriété directe est-elle aussi une démonstration de la réciproque (avec quelques précautions de langage) ? Pourquoi ?

d. En déduire que si A et B sont deux points distincts de milieu ω, tout point de la droite (AB) distinct de A, B et ω admet un conjugué harmonique unique.

2. On appelle faisceau harmonique un ensemble ordonné de quatre droites concourantes ou parallèles de birapport -1.

a. Montrer, dans le cas où les droites sont concourantes, qu'une parallèle à l'un des rayons coupe les trois autres en trois points dont l'un est le milieu des deux autres.

b. Énoncer et démontrer la réciproque de la proposition précédente.

Pour démontrer cette propriété caractéristique du faisceau harmonique concourant, on aura intérêt à reprendre dans ce cas particulier la figure de la question I.B.2.

Tournez la page S.V.P.

3. *Pôle et polaire par rapport à deux droites.*

a. (D_1) et (D_2) sont deux droites concourantes en O, A un point du plan n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2). Une droite quelconque passant par A coupe (D_1) en M_1 et (D_2) en M_2. Montrer que le lieu de N conjugué harmonique de A par rapport à M_1 et M_2 est une droite (D), privée de trois points, passant par O. (D) est dite polaire de A par rapport à $((D_1), (D_2))$, A est dit pôle de (D) par rapport à $((D_1), (D_2))$.

b. Étendre la notion précédente au cas où les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

4. *Construction du conjugué harmonique.*

A, B, C sont trois points alignés distincts, I un point quelconque du plan non situé sur la droite portant A, B, C. Une droite passant par C, distincte de la précédente, coupe (IA) en M et (IB) en N. Les droites (MB) et (AN) sont concourantes en J (ou parallèles). Montrer que le conjugué harmonique D de C par rapport à A, B se trouve sur la droite (IJ) (ou sur la parallèle issue de I aux droites (MB) et (AN)).

On considérera la polaire de C par rapport aux droites (IA) et (IB) et celle de C par rapport aux droites (JA) et (JB).

II. UNE TRANSFORMATION DE LEBESGUE

A. Étude de la transformation.

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ une droite fixe (Δ) et deux points fixes F et f distincts et n'appartenant pas à (Δ).

Les droites (Δ) et (Ff) sont perpendiculaires en I. Soit $\tau_{F,f}$ la transformation de $\mathscr{P}\setminus(\Delta)$ dans $\mathscr{P}$ définie de la façon suivante.

Soit $m \in \mathscr{P}\setminus(\Delta)$, $m \neq F$:

(i) (Fm) coupe (Δ) en ω, l'homothétie variable h_m de centre ω qui transforme m en F, transforme f en M. On pose :

$$\tau_{F,f}(m) = M.$$

(ii) (Fm) est parallèle à (Δ). La parallèle issue de F à (fm) coupe la parallèle issue de f à (Δ) en M. On pose :

$$\tau_{F,f}(m) = M.$$

(iii) $$\tau_{F,f}(F) = f.$$

1. On considère un repère orthonormé direct de centre I, (IF) est la droite des abscisses et (Δ) la droite des ordonnées. Soient α et β les abscisses respectives de F et f. On note (x, y) les coordonnées d'un point m de $\mathscr{P}\setminus(\Delta)$ et (X, Y) celles de $M = \tau_{F,f}(m)$.

a. Montrer que la transformation $\tau_{F,f}$ admet comme équation :

$$\begin{cases} X = \dfrac{\alpha\beta}{x} \\ Y = \dfrac{-\alpha y}{x} \end{cases}$$

b. Montrer que $\tau_{F,f}$ est une bijection de $\mathscr{P}\setminus(\Delta)$ et que :

$$\tau_{F,f}^{-1} = \tau_{f,F}.$$

2. *Transformée d'une droite.*

a. Soit (d) une droite coupant (Δ) en p, m un point de (d) tel que (Fm) ne soit pas parallèle à (Δ). On pose $R = h_m(p)$.

(i) Justifier que (RF) est parallèle à (d) et en déduire que R est indépendant du choix de m sur (d).

(ii) Soit (D) la droite (RM). Montrer que (D) est parallèle à (pf).

(iii) Montrer que la transformée par $\tau_{F,f}$ de (d) privée du point p est la droite (D) privée du point R.

b. Soit (d) une droite parallèle à (Δ), montrer que sa transformée par $\tau_{F,f}$ est une droite (D) parallèle à (Δ).

3. Afin d'alléger l'expression, on parlera dans la suite de transformée d'une droite plutôt que de transformée d'une droite privée d'un point. Montrer les assertions suivantes :

a. Si deux droites (d) et (d_1) sont concourantes en un point p de (Δ), alors leurs transformées par $\tau_{F,f}$ sont deux droites parallèles.

b. Si deux droites (d) et (d_1) sont parallèles et concourantes avec (Δ), alors leurs transformées par $\tau_{F,f}$ sont concourantes en un point de (Δ).

c. Une droite (d) passant par f est transformée par $\tau_{F,f}$ en une droite passant par F et parallèle à (d).

4. *Conservation du birapport.*

m_1, m_2, m_3, m_4 sont quatre points distincts alignés de $\mathcal{P}\setminus(\Delta)$, M_1, M_2, M_3, M_4 leurs transformés par $\tau_{F,f}$. Montrer que $((fm_1), (fm_2), (fm_3), (fm_4)) = ((FM_1), (FM_2), (FM_3), (FM_4))$.

En déduire que $\tau_{F,f}$ conserve le birapport de quatre points alignés, le birapport de quatre droites concourantes ou parallèles.

B. Transformé d'un cercle particulier et propriétés des coniques.

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre f et de rayon R. On veut montrer que le transformé de $(\mathscr{C})$, à deux points près éventuellement, par $\tau_{F,f}$, est une conique de foyer F et de directrice (Δ).

1. *a.* Soit H le pied de la perpendiculaire issue de M à (Δ). (Comme en A : $M = \tau_{F,f}(m)$.)

Montrer que $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{fm}{fI}$.

b. En déduire que M appartient à la conique de foyer F de directrice (Δ) et d'excentricité $\dfrac{R}{|\beta|}$.

c. Déterminer la nature de la conique (ellipse, parabole, hyperbole) selon les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de (Δ). On justifiera les résultats obtenus.

d. Vérifier que toute conique de foyer F et de directrice (Δ) est image d'un cercle par une transformation $\tau_{F,f}$.

2. On admet que la transformation $\tau_{F,f}$ conserve les contacts (une courbe et sa tangente sont transformées en une courbe et sa tangente). Soient m un point de $(\mathscr{C})$, (t) la tangente à $(\mathscr{C})$ en m, (t) coupe (Δ) en p. (T) image de (t) par $\tau_{F,f}$ est tangente en M à la conique (Γ) image de $(\mathscr{C})$ par la même transformation.

Déduire des résultats précédents le théorème :

« La portion de tangente à une conique comprise entre le point de contact et une directrice est vue du foyer correspondant sous un angle droit. »

3. Soit p un point du plan extérieur au cercle $(\mathscr{C})$, m et n les points de contact des tangentes issues de p à $(\mathscr{C})$. On appelle M, N, P les transformées de m, n, p par $\tau_{F,f}$.

Démontrer, à partir des propriétés de cette transformation, le deuxième théorème de Poncelet :

« P étant un point extérieur à une conique (Γ) de foyer F, M et N les points de contact des tangentes issues de P à (Γ), la droite (PF) est bissectrice de l'angle de droites (FM, FN). »

Tournez la page S.V.P.

4. *Birapport de quatre points sur une conique.*

(Γ) est une conique de foyer F, de directrice (Δ) et d'excentricité e ; M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points distincts de (Γ). Trouver un cercle $(\mathscr{C})$ tel que (Γ) soit le transformé de $(\mathscr{C})$ par une transformation $\tau_{F,f}$. m_1, m_2, m_3, m_4 sont les antécédents de M_1, M_2, M_3, M_4 par $\tau_{F,f}$. On appelle birapport des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de (Γ) pris dans cet ordre, le birapport (m_1, m_2, m_3, m_4) sur le cercle $(\mathscr{C})$.

Montrer que cette définition est intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la transformation choisie.

5. Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre f et de rayon R coupe la droite (IF) en a et a'. On suppose ici que a et a' sont distincts de I. A et A' sont les transformées de a et a' par $\tau_{F,f}$. O est le milieu du segment [AA'].

   a. Montrer que la division (A, A', I, F) est harmonique.

   b. Montrer que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{OI}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{AI}}{\overline{FA}}$ (on pourra utiliser le résultat obtenu en (I.C.1.)).

   En déduire que $\dfrac{OF}{OA} = e$ excentricité de la conique (Γ) transformée de $(\mathscr{C})$ par $\tau_{F,f}$.

   c. On appelle $(\mathscr{C}_0)$ le cercle de diamètre [AA']. $(\mathscr{C}_0)$ est appelé cercle principal de (Γ), m est un point de $(\mathscr{C})$. On pose $M = \tau_{F,f}(m)$ et $m_0 = \tau_{F,0}^{-1}(M)$.

   Montrer que la conique (Γ) est transformée de $(\mathscr{C}_0)$ par $\tau_{F,0}$ ($(\mathscr{C}_0)$ est éventuellement amputé de ses points d'intersection avec (Δ)).

   d. La tangente en m_0 à $(\mathscr{C}_0)$ coupe (Δ) en q (m_0 distinct de A et A'). Montrer que la tangente (T) en M à (Γ) est parallèle à (Oq).

6. L'abscisse de F est α, celle de O est γ, R_0 est le rayon de $(\mathscr{C}_0)$, (x_0, y_0) sont les coordonnées d'un point m_0 de $(\mathscr{C}_0)$ distinct de A et A' et non situé sur (Δ), M est le point de (Γ) image de m_0 par $\tau_{F,0}$. Les autres notations sont celles des questions précédentes.

   a. Montrer que $R_0^2 = \gamma(\gamma - \alpha)$ et donner l'équation de $(\mathscr{C}_0)$.

   b. Établir que les droites (Oq) et (Fm_0) sont perpendiculaires.

   c. K est le point de concours des deux droites perpendiculaires (T) et (Fm_0). Chercher les coordonnées de K et montrer que K est sur le cercle $(\mathscr{C}_0)$. En déduire le théorème suivant :

   « Dans une conique à centre, le projeté d'un foyer sur une tangente à la conique est sur le cercle principal. »

7. On appelle N le point de (Γ) tel que $N = \tau_{F,0}(K)$ et F' le symétrique de F par rapport à O.

   a. Montrer que O est le milieu du segment [MN].

   En déduire que O est centre de symétrie de (Γ).

   b. Calculer en fonction de α, R_0, x_0 les longueurs FM et FN. (On simplifie notablement le calcul en considérant le point N comme transformé de K par $\tau_{F,0}$, tout comme M est transformé de m_0 par la même transformation.)

   c. Montrer que si : (i) $e = \dfrac{R_0}{|\gamma|} < 1$ on a :

   $$FM + F'M = 2R_0 ;$$

   (ii) $e = \dfrac{R_0}{|\gamma|} > 1$ on a :

   $$|FM - F'M| = 2R_0 .$$

   On retrouve la définition bifocale des coniques à centre.

CAPES interne
de Mathématiques
session 1996

seconde composition

Solution proposée par Dany-Jack Mercier

Site Web : Megamaths

[0] [ag36] v2.01 L'énoncé se trouve sur le site MégaMaths

Solution de la deuxième composition du CAPES interne 1996

I.A.1.a On calcule

$$(a,b,d,c)=\frac{a-d}{a-c}:\frac{b-d}{b-c}=\frac{1}{\frac{a-c}{a-d}:\frac{b-c}{b-d}}=\frac{1}{\lambda},$$

$$\begin{aligned}(a,c,b,d) &= \frac{a-b}{a-d}:\frac{c-b}{c-d}\\ &= 1-\left(1-\frac{a-b}{a-d}.\frac{c-d}{c-b}\right)=1-\frac{bc+ad-cd-ab}{(a-d)(c-b)}=1-\frac{(a-c)(d-b)}{(a-d)(c-b)}=1-\lambda.\end{aligned}$$

NB : On peut aussi "permuter les premiers" et obtenir $(b,a,d,c)=\frac{1}{\lambda}$.

I.A.1.b On utilise la première question :

$$(a,c,d,b)=\frac{1}{(a,c,b,d)}=\frac{1}{1-(a,b,c,d)}=\frac{1}{1-\lambda}.$$

$$(a,d,b,c)=1-(a,b,d,c)=1-\frac{1}{(a,b,c,d)}=1-\frac{1}{\lambda}.$$

$$(a,d,c,b)=\frac{1}{(a,d,b,c)}=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

I.A.2.a $l(x)=\alpha x+\beta$ vérifie $l(b)-l(a)=\alpha(b-a)$, donc

$$(l(x_1),l(x_2),l(x_3),l(x_4))=\frac{l(x_1)-l(x_3)}{l(x_1)-l(x_4)}:\frac{l(x_2)-l(x_3)}{l(x_2)-l(x_4)}=\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}:\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}=(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

après simplification par α.

I.A.2.b

$$\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4}\right)=\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_3}}{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_4}}:\frac{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_4}}=\frac{x_3-x_1}{x_4-x_1}:\frac{x_3-x_2}{x_4-x_2}=(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

I.A.2.c Toute homographie est la composée d'applications affines et d'une transformation inverse $\frac{1}{x}$. En effet :

$$h(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x+\delta)-\frac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta}{\gamma x+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{1}{\gamma}\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma x+\delta}.$$

L'invariance du birapport par une homographie découle alors des questions a) et b).

I.A.3 Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui conserve le birapport. Les réels a',b',c',x' seront distincts puisque $a'=b'$ entraîne $a=b$ (f étant injective), et c'est exclus par hypothèse. Le lemme ci-dessous montre qu'il existe une transformation homographique h qui transforme respectivement a,b,c en a',b',c'. Pour tout x distinct de a,b,c, on aura

$$(a,b,c,x)=\left(a',b',c',x'\right)$$

et aussi

$$(a,b,c,x)=\left(a',b',c',h(x)\right)$$

[0] [ag36] v2.00 Dany-Jack Mercier

puisque h conserve les birapports (1.A.2). D'où

$$\left(a',b',c',h(x)\right)=\left(a',b',c',x'\right)\Rightarrow \frac{a'-c'}{a'-h(x)}:\frac{b'-c'}{b'-h(x)}=\frac{a'-c'}{a'-x'}:\frac{b'-c'}{b'-x'}$$

ce qui entraîne

$$\frac{b'-h(x)}{a'-h(x)}=\frac{b'-x'}{a'-x'}$$

puis $h(x)=x'$. (En effet, si $k\neq 1$, ce qui est le cas ici, $\frac{b-x}{a-x}=k$ définit un et un seul réel, à savoir $x=\frac{b-ak}{1-k}$). Cette égalité étant vrai pour tout réel x, on déduit $f=h$.

Lemme : Si a,b,c et a',b',c' sont deux familles de réels distincts, il existe au moins une application homographique (non constante) h telle que $(h(a),h(b),h(c))=(a',b',c')$.

Preuve du lemme : Notons $h(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. La condition équivaut à

$$\begin{cases} a\alpha+\beta-aa'\gamma-a'\delta=0\\ b\alpha+\beta-bb'\gamma-b'\delta=0\\ c\alpha+\beta-cc'\gamma-c'\delta=0\end{cases}$$

soit à $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$ où $\overrightarrow{u}={}^t(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ et où $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ est l'application linéaire de matrice

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & -aa' & -a'\\ b & 1 & -bb' & -b'\\ c & 1 & -cc' & -c'\end{pmatrix}.$$

Comme $\dim\operatorname{Im} f\leq 3$, $\dim\operatorname{Ker} f=4-\dim\operatorname{Im} f\geq 1$ et il existera au moins un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ tel que $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$. La fonction h ne sera pas constante puisque $a'\neq b'$, et cela équivaut à $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. ■

I.B.1 Notons x_i (resp. x'_i) l'abscisse de M_i dans le repère unitaire $(O,\overrightarrow{u})$ (resp. $\left(O',\overrightarrow{u'}\right)$ de (Δ). Cela traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM_i}=x_i\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{O'M_i}=x'_i\overrightarrow{u'}$). Notons $\overrightarrow{u'}=\beta\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OO'}=\alpha\overrightarrow{u}$. Le changement de coordonnées s'obtient en écrivant

$$\overrightarrow{OM_i}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M_i}=\alpha\overrightarrow{u}+x'_i\beta\overrightarrow{u}\Leftrightarrow x_i=\alpha+x'_i\beta.$$

Cela étant, on a d'une part

$$\begin{aligned}(M_1,M_2,M_3,M_4)&=(x_1,x_2,x_3,x_4)\\ &=\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}:\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}=\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}}:\frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$(M_1,M_2,M_3,M_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4\right)$$

d'après l'invariance du birapport par une application affine.

I.B.2.a Les deux premières égalités sont données par le théorème de Thalès dans les triangles M_1M_3O et M_1M_4O (cf. fig.1). On déduit

$$(M_1,M_2,M_3,M_4)=\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}}:\frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}}=\frac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_3}}:\frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_1O}}=\frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}}.$$

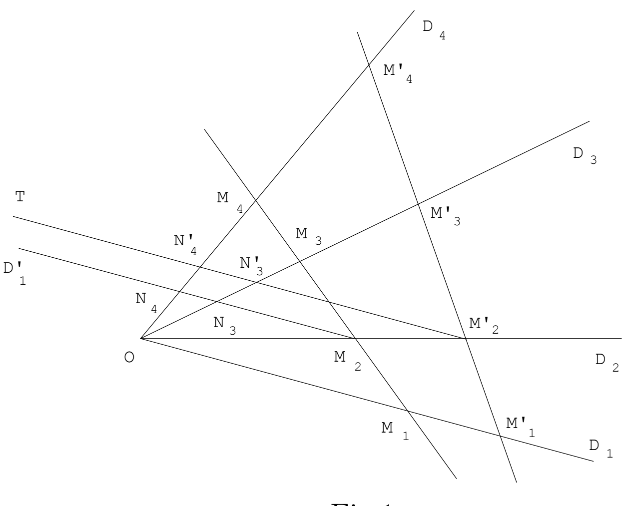


Fig.1

I.B.2.b Notons T la parallèle à D_1 passant par M'_2, et N'_3, N'_4 les points d'intersection respectifs de T et de D_3 et D_4. On a

$$\left(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4\right) = \frac{\overline{M'_2N'_4}}{\overline{M'_2N'_3}}.$$

Le théorème de Thalès appliqué avec les sécantes D_2, D_3, D_4 et les parallèles D'_1 et T donne :

$$\frac{\overline{M'_2N'_4}}{\overline{M_2N_4}} = \frac{\overline{M'_2O}}{\overline{M_2O}} = \frac{\overline{M'_2N'_3}}{\overline{M_2N_3}} \Rightarrow \frac{\overline{M'_2N'_4}}{\overline{M'_2N'_3}} = \frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}}$$
$$\Rightarrow \left(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4\right) = \left(M_1, M_2, M_3, M_4\right).$$

I.B.3 Le birapport de quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 parallèles est obtenu de la même façon : on trace une sécante Δ qui coupe D_1, D_2, D_3, D_4 resp. en M_1, M_2, M_3, M_4, et l'on pose, par définition,

$$\left(D_1, D_2, D_3, D_4\right) = \left(M_1, M_2, M_3, M_4\right).$$

Les parallélogrammes présents dans le dessin montrent que cette définition est indépendante du choix de la sécante Δ.

I.B.4 Si f est une isométrie, elle transforme une sécante Δ de D_1, D_2, D_3, D_4 en une sécante $f(\Delta)$ de $f(D_1)$, $f(D_2)$, $f(D_3)$, $f(D_4)$. C'est une application affine. Si l est la partie linéaire de f,

$$\overrightarrow{M_1M_3} = k\overrightarrow{M_1M_4} \quad \Rightarrow \quad l\left(\overrightarrow{M_1M_3}\right) = kl\left(\overrightarrow{M_1M_4}\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M'_1M'_3} = k\overrightarrow{M'_1M'_4}$$

où l'on prime les images par f. Ainsi pour tous points distincts M_1, M_3, M_4

$$\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} = \frac{\overline{M'_1M'_3}}{\overline{M'_1M'_4}}$$

et donc

$$\left(M_1, M_2, M_3, M_4\right) = \left(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4\right)$$

i.e.

$$\left(D_1, D_2, D_3, D_4\right) = \left(f\left(D_1\right), f\left(D_2\right), f\left(D_3\right), f\left(D_4\right)\right).$$

En conclusion le birapport est conservé par une isométrie affine. On remarque que ce sera encore le cas avec n'importe quelle bijection affine.

I.B.5

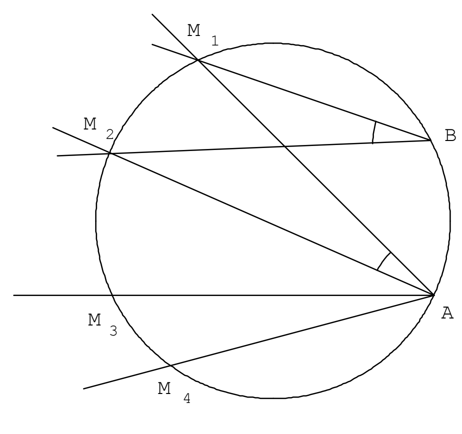


Fig.2

Soit A un point du cercle (C) distincts de M_1, M_2, M_3, M_4. Soit $B \in (C)$. Il existe une similitude directe s de centre M_1 telle que $s(A) = B$. Si $i \in \{2,3,4\}$, notons $M'_i = s(M_i)$. Par cocyclicité :

$$\left(\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{BM_i}\right) = \left(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_i}\right)\ [\pi]$$

où, par convention, (BM_i) désigne la tangente en B à (C) dès que $B = M_i$. La conservation des angles par une similitude directe permet d'écrire :

$$\left(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_i}\right) = \left(\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{BM'_i}\right)$$

et donc $\left(\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{BM_i}\right) = \left(\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{BM'_i}\right)$. On déduit $s((AM_i)) = (BM'_i) = (BM_i)$. Comme le birapport de quatre droites est invariant par une similitude (cf 1.B.4),

$$\begin{aligned} ((AM_1),(AM_2),(AM_3),(AM_4)) &= (s(AM_1), s(AM_2), s(AM_3), s(AM_4)) \\ &= ((BM_1),(BM_2),(BM_3),(BM_4)). \end{aligned}$$

En conclusion, le birapport des droites (AM_i) est indépendant du choix de A sur le cercle.

I.C.1.a D'après 1.A.1, par "permutation des premiers",

$$(B,A,C,D) = \frac{1}{(A,B,C,D)} = \frac{1}{-1} = -1$$

I.C.1.b On a

$$\begin{aligned} ((A,B,C,D) = -1) &\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \\ &\Leftrightarrow \frac{c-a}{d-a} = \frac{c-b}{b-d} \\ &\Leftrightarrow 2(ab+cd) = (a+b)(c+d). \qquad (i) \end{aligned}$$

• Pour montrer (ii), choisissons l'origine du repère en A. Alors $a = 0$ et (i) équivaut à $2cd = b(c+d)$, soit successivement à

$$\begin{aligned} \frac{2}{b} &= \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ \frac{2}{\overline{AB}} &= \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}. \end{aligned}$$

• Centrons notre repère en ω pour prouver (iii) :

$$(i) \;\Leftrightarrow\; 2\left(-a^2+cd\right)=0 \;\Leftrightarrow\; a^2=cd \;\Leftrightarrow\; \omega A^2=\overline{\omega C}.\overline{\omega D}$$

ce qui équivaut bien à $\omega A^2=\omega B^2=\overline{\omega C}.\overline{\omega D}$.

I.C.1.c Réciproque : "Si A,B,C,D sont quatre points alignés distincts, si ω désigne le milieu de $[AB]$ et si (iii) à lieu, alors (A,B,C,D) est une division harmonique".

La question précédente montre l'équivalence des deux propriétés, puisque la définition du birapport est indépendant du choix du repère unitaire sur la droite (AB). La précaution à prendre consiste à choisir dès le départ des points A,B,C,D distincts : ainsi (iii) est vrai avec $A=B=C=\omega$ et D quelconque sans que la division (A,B,C,D) soit harmonique. Si A,B,C,D sont distincts, C et D seront différent du milieu ω de $[AB]$ sinon (iii) entraîne $A=\omega=B$, absurde.

I.C.1.d Si C est un point de la droite (AB) distinct de A,B et ω, alors N est conjugué harmonique de C par rapport à A et B si et seulement si $\omega A^2=\overline{\omega C}.\overline{\omega N}$, i.e.$\overline{\omega N}=\frac{\omega A^2}{\overline{\omega C}}$. Cette égalité définit un et un seul point N distinct de A,B et C. On notera que les points A,B et ω n'ont pas de conjugué par rapport à A et B (par exemple $C=\omega$ entraîne $\omega A^2=0$ d'où $A=B$, absurde).

I.C.2.a Reprenons les notations du 1.B.2.a.

$$(M_1,M_2,M_3,M_4)=\frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}}=-1\Rightarrow M_2 \text{ milieu de } [N_3N_4]\,.$$

Le résultat est donc prouvé si l'on considère la parallèle à D_1. Le raisonnement est le même dans le cas d'une parallèle à D_i où $2\leq i\leq 3$.

I.C.2.b Réciproque : "Soient D_1,D_2,D_3,D_4 quatre droites concourantes. Si la parallèle à l'une des droites D_i coupe les autres droites en des points tels que l'un d'entre eux est milieu des deux autres, alors il existe une permutation σ de $\mathbb{N}_4$ telle que $\left(D_{\sigma(1)},D_{\sigma(2)},D_{\sigma(3)},D_{\sigma(4)}\right)$ soit un faisceau harmonique."

preuve : Avec les notations du 1.B.2.a, si l'un des points M_2,N_3,N_4 est milieu des deux autres, de trois choses l'une :

1) Si M_2 milieu de $[N_3N_4]$,

$$(M_1,M_2,M_3,M_4)=\frac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}}=-1,$$

donc (D_1,D_2,D_3,D_4) est un faisceau harmonique,

2) Si N_3 milieu de $[M_2N_4]$, il faut changer le rôle des points pour appliquer 1.B.2 comme en 1),

N_3 prend la place de M_2,
M_2 prend la place de N_3,
N_4 prend la place de N_4,

et l'on trouve $(D_1,D_3,D_2,D_4)=-1$ par le même raisonnement qu'en 1).

3) Si N_4 milieu de $[M_2N_3]$, on recommence et l'on applique 1.B.2 sachant que

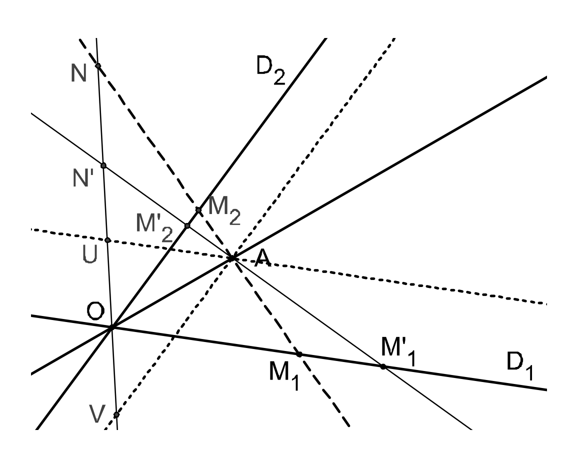
N_4 prend la place de M_2,
N_3 prend la place de N_3,
M_2 prend la place de N_4,

et l'on trouve $(D_1,D_4,D_3,D_2)=-1$. ■

I.C.3.a Traçons un point N dans $\mathcal{L}$, à partir d'une sécante Δ qui coupe D_1 et D_2 en M_1 et M_2. On a

$$[M_1,M_2,A,N]=-1.$$

Notons U l'intersection de (ON) et de la parallèle à D_1 issue de A, et V l'intersection de (ON) et de la parallèle à D_2 issue de A. Soit N' un point du plan. Quatre cas sont possibles :



α) Si $N' \in (ON)\setminus\{O,U,V\}$, la droite (AN) coupe D_1 en M'_1, et D_2 en M'_2, tels que $[M'_1, M'_2, A, N'] = [M_1, M_2, A, N] = -1$ (on utilise ici l'invariance du birapport par projection centrale). Donc $N' \in \mathcal{L}$.

β) Si $N' \in \{O,U,V\}$, alors $N' \notin \mathcal{L}$ car la droite $(N'A)$ doit couper D_1 et D_2 en deux points distincts M'_1 et M'_2 pour que l'on puisse parler du birapport $[M'_1, M'_2, A, N']$.

γ) Si $N' \notin (ON)$ et (AN') n'est pas parallèle à (ON), alors $N' \notin \mathcal{L}$. Dans le cas contraire (AN') couperait (ON) en N'_0, D_1 en M'_1, et D_2 en M'_2, avec $[M'_1, M'_2, A, N'] = -1$. Mais on aurait aussi $[M'_1, M'_2, A, N'_0] = -1$ ([1]) donc

$$\left[M'_1, M'_2, A, N'\right] = \left[M'_1, M'_2, A, N'_0\right] = -1.$$

L'unicité du conjugué harmonique de A par rapport aux points M'_1, M'_2 montre que $N' = N'_0 \in (ON)$, ce qui est absurde.

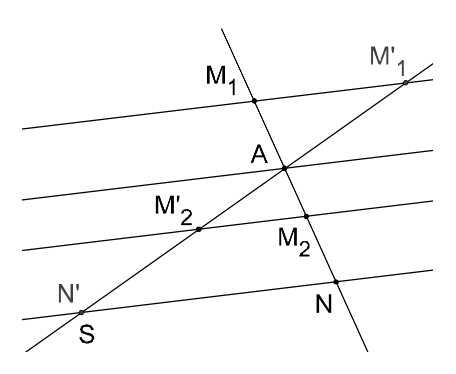
δ) Si $N' \notin (ON)$ et $(AN')//(ON)$, alors $N' \notin \mathcal{L}$. Autrement le birapport des droites D_1, D_2, (OA), (ON') serait

$$\left[D_1, D_2, (OA), (ON')\right] = \left[M'_1, M'_2, A, N'\right] = -1$$

où M'_i désigne l'intersection de (AN') et D_i. On pourrait choisir un point N'' de $(ON')\setminus\{O\}$ tel que (AN'') coupe D_1 en M''_1, D_2 en M''_2, et intercepte (ON). On aurait $[M''_1, M''_2, A, N''] = -1$, donc $N'' \in \mathcal{L}$ bien que $N'' \notin (ON)$ et (AN') ne soit pas parallèle à (ON), en contradiction avec le cas γ).

En conclusion

$$\mathcal{L} = (ON)\setminus\{O,U,V\}.$$



[1] puisque le birapport des quatre droite D_1, D_2, (OA), (ON) est par construction $[M_1, M_2, A, N] = -1$. On utilise encore l'invariance du birapport par projection centrale.

I.C.3.b Considérons une sécante passant par A, coupant D_1 et D_2 en M_1 et M_2. De deux choses l'une :

• Si A est le milieu de $[M_1M_2]$, aucun point de (M_1M_2) sera conjugué harmonique de A par rapport à M_1 et M_2, et ce sera vrai pour n'importe quelle sécante. Donc $\mathcal{L} = \varnothing$.

• Si A n'est pas le milieu de $[M_1M_2]$, soit N appartenant à (M_1M_2) tel que $[M_1, M_2, A, N] = -1$. Notons Δ_A (resp. Δ_N) la parallèle à D_1 passant par A (resp. N). Les droites parallèles D_1, D_2, Δ_A, Δ_N forment un faisceau harmonique.

- Si $N' \in \mathcal{L}$. La droite (AN') coupe Δ_N en S et l'on a, en notant M_1' et M_2' les points de D_1 et D_2 tels que $[M_1', M_2', A, N'] = -1$,

$$\left[M_1', M_2', A, N'\right] = -1 = [D_1, D_2, \Delta_A, \Delta_N] = \left[M_1', M_2', A, S\right]$$

donc $N' = S \in \Delta_N$ en utilisant l'unicité du conjugué harmonique de A par rapport à M_1' et M_2'. Ainsi $\mathcal{L} \subset \Delta_N$.

- Réciproquement, si $N' \in \Delta_N$, $(N'A)$ coupe D_1 et D_2 en deux points distincts M_1', M_2' et $[M_1', M_2', A, N'] = -1$ puisque le faisceau de droites D_1, D_2, Δ_A, Δ_N est harmonique. Ainsi $N' \in \mathcal{L}$, et l'on a l'inclusion $\Delta_N \subset \mathcal{L}$. Dans ce second cas, on a donc $\mathcal{L} = \Delta_N$.

Conclusion générale : Lorsque $D_1 // D_2$, le lieu $\mathcal{L}$ cherché est :
- une droite parallèle à D_1 et D_2 si A n'est pas équidistant de D_1 et D_2,
- l'ensemble vide dans le cas contraire.

I.C.4 a) Cas où J existe :

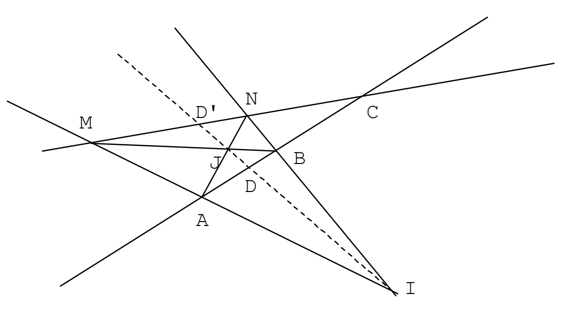


Fig.5

• Le conjugué harmonique D de C par rapport à A, B sera sur la polaire de C par rapport aux droites $(IA), (IB)$. Cette polaire est une droite Δ_I passant par I (1.C.3). On a $D \in \Delta_I$. De même le conjugué harmonique D' de C par rapport à M, N sera sur Δ_I. On déduit $I \in \Delta_I = (DD')$.

• En recommençant avec les droites $(JA), (JB)$ à la place des droites $(IA), (IB)$, et en notant Δ_J la polaire de C par rapport aux droites $(JA), (JB)$, on trouve cette fois-ci $J \in \Delta_J = (DD')$, de sorte que les points I, J, D, D' soient alignés et $D \in (IJ)$.

Remarques : 1) L'appartenance $D \in (IJ) \cap (AB)$ rend possible la construction de D à la règle et au compas.

2) On obtient un théorème relatif au quadrilatère complet de la Fig.5 et à ses diagonales.

3) On a $I \neq J$, sinon $I = J$ et de deux choses l'une :

α) Si $I \neq M$, $\{A\} = (IM) \cap (AC) = (JM) \cap (AC) = \{B\}$, absurde.

β) Si $I = M$, $\{C\} = (MN) \cap (AB) = (IN) \cap (AB) = \{B\}$, absurde.

b) Cas où $(AN) // (BM)$: J n'existe plus mais on peut relire a) avec la polaire Δ de C par rapport aux droites $(AN), (BM)$. Δ est une droite parallèle à (AN) et l'on trouve encore $D, D' \in \Delta$. Comme on a toujours $I \in \Delta_I = (DD')$, on déduit l'alignement des points I, D, D' sur Δ, et l'on a prouvé que D appartient à la parallèle à (AN) passant par I.

II.A.1.a (Voir figure 6)

• Cas (i) : Notons $\omega\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{\omega F}=k\overrightarrow{\omega m}$ soit

$$\begin{pmatrix}\alpha\\-b\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y-b\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{\alpha}{x}\\b=\frac{\alpha}{\alpha-x}y\end{cases}$$

de sorte que

$$\tau_{F,f}(m)=M\Leftrightarrow h_m(f)=M\Leftrightarrow\overrightarrow{\omega M}=k\overrightarrow{\omega f}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}X\\Y-b\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{x}\begin{pmatrix}\beta\\-b\end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{cases}X=\frac{\alpha\beta}{x}\\Y=b-\frac{\alpha b}{x}=-\frac{\alpha y}{x}\end{cases}\qquad(*)$$

qui exprime les coordonnées (X,Y) de $\tau_{F,f}(m)$ en fonction de celles de m.

• Cas (ii) : Ici $x=\alpha$ et h_m est remplacée par la translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{mF}$. On a

$$M=t_{\overrightarrow{u}}(f)\Leftrightarrow\overrightarrow{fM}=\overrightarrow{mF}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}X-\beta\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-x\\-y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}X=\beta\\Y=-y\end{cases}$$

et encore la formule $(*)$.

• Cas (iii) : Si $m=F$, la formule $(*)$ est encore valide.

II.A.1.b $\operatorname{Im}\tau_{F,f}\subset\mathcal{P}\setminus(\Delta)$ car $X\neq 0$ dans $(*)$. Pour tout point $M(X,Y)$ de $\mathcal{P}\setminus(\Delta)$, posons $m(x,y)$ et résolvons :

$$\tau_{F,f}(m)=M\Leftrightarrow\begin{cases}X=\frac{\alpha\beta}{x}\\Y=-\frac{\alpha y}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\alpha\beta}{X}\\y=-\frac{xY}{\alpha}=-\frac{\beta Y}{X}\end{cases}\qquad(**)$$

Ainsi tout point M de $\mathcal{P}\setminus(\Delta)$ possède un et un seul antécédent dans $\mathcal{P}\setminus(\Delta)$. $\tau_{F,f}:\mathcal{P}\setminus(\Delta)\to\mathcal{P}\setminus(\Delta)$ est donc bijective, et l'application réciproque est donnée par $(**)$. Les rôles de α et β ont été échangés, de sorte que $(\tau_{F,f})^{-1}=\tau_{f,F}$.

II.A.2.a (Voir figure 7)

• (i) : L'homothétie h_m transforme une droite en droite parallèle, m en F, et p en R, donc transforme la droite (d) en la droite (RF) parallèle à (d). R est le point d'intersection de (Δ) et de la parallèle à (d) passant par F. C'est donc un point indépendant du choix de m sur (d).

• (ii) : Par hypothèses, h_m transforme p en R, et f en M, donc $(D)=(RM)$ est parallèle à (pf).

• (iii) : La droite $(D)=(RM)$ est la parallèle à (pf) passant par R. Elle est donc indépendante du choix de m sur (d), et l'on vient de voir que pour tout $m\in(d)\setminus\{p\}$ tel que (Fm) ne soit pas parallèle à (Δ), $\tau_{F,f}(m)=M\in(D)$.
Si $m\in(d)\setminus\{p\}$ et (Fm) parallèle à (Δ), $M=t_{\overrightarrow{mF}}(f)$ et le raisonnement des (i), (ii) est encore valable avec $t_{\overrightarrow{mF}}$ à la place de h_m. Ainsi

$$\tau_{F,f}((d)\setminus\{p\})\subset(D).$$

R n'a pas d'antécédent par $\tau_{F,f}$ car $\operatorname{Im}\tau_{F,f}\subset\mathcal{P}\setminus(\Delta)$, donc

$$\tau_{F,f}((d)\setminus\{p\})\subset(D)\setminus\{R\}.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, utilisons le fait que $\tau_{F,f}^{-1}=\tau_{f,F}$. Fixons deux points distincts m,m' de $(d)\setminus\{p\}$ et notons $\tau_{F,f}(m)=M$ et $\tau_{F,f}(m')=M'$. On a $M,M'\in(D)\setminus\{R\}$ et les équivalences

$$\tau_{F,f}((d)\setminus\{p\})\supset(D)\setminus\{R\}\Leftrightarrow(d)\setminus\{p\}\supset\tau_{F,f}^{-1}((D)\setminus\{R\})\Leftrightarrow(d)\setminus\{p\}\supset\tau_{f,F}((D)\setminus\{R\})\quad(\star)$$

Le sens direct appliqué à $\tau_{f,F}$ montre que $\tau_{f,F}((D)\setminus\{R\})$ est inclus dans une droite, donc

$$\tau_{f,F}((D)\setminus\{R\})\subset(mm')\setminus\{p\}=(d)\setminus\{p\}$$

ce qui prouve l'inclusion ($\star$) et achève la preuve.

Autre solution : On utilise une équation $y = ax + b$ de (d) et l'expression analytique de $\tau_{F,f}$. Si $m\,(x,y) \in (d)$, alors on remplace pour obtenir $Y = -\frac{b}{\beta}X - a\alpha$, de sorte que $\tau_{F,f}\,((d)\setminus\{p\})$ soit inclus dans $(D)\setminus\{R_0\}$ où (D) est la droite d'équation $Y = -\frac{b}{\beta}X - a\alpha$. L'inclusion réciproque se montre exactement de la même façon. La pente de (D) est égale à (pf), et si $m \in (d)\setminus\{p\}$, alors $M = \tau_{F,f}\,(m)$ appartient à (D). Ainsi (D) est la parallèle à (pf) passant par M, ie coïncide avec la droite (RM) du ii), et bien sûr $R = R_0$.

II.A.2.b • 1er cas : $F \in (d)$. Alors $\tau_{F,f}\,((d)) = \left\{t_{\overrightarrow{mF}}\,(f)\ /\, m \in (d)\right\}$ est la droite parallèle à (Δ) passant par f.

• 2ème cas : $F \notin (d)$. (Voir figure 8)

Soient $m, m' \in (d)$ distincts. Notons k_m (resp. k'_m) le rapport de l'homothétie h_ω (resp. $h_{\omega'}$) définissant $\tau_{F,f}\,(m)$ (resp. $\tau_{F,f}\,(m')$). On a

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FM'} = k_m\left(\overrightarrow{fm}\right) + k'_m\left(\overrightarrow{m'f}\right)$$

D'après Thalès

$$k_m = \frac{\overline{\omega F}}{\overline{\omega m}} = \frac{\overline{\omega' F}}{\overline{\omega' m'}} = k'_m$$

d'où

$$\overrightarrow{MM'} = k_m\left(\overrightarrow{fm} + \overrightarrow{m'f}\right) = k_m\,\overrightarrow{m'm}$$

et $(mm')\,//\,(MM')$, soit $(MM')\,//\,(\Delta)$. Notons (δ) la parallèle à (Δ) passant par l'une des images $\tau_{F,f}\,(m)$ de $m \in (d)$. On a prouvé

$$\tau_{F,f}\,((d)) \subset (\delta)\,.$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, utilisons $\tau^{-1}_{F,f} = \tau_{f,F}$. Soient $m \in (d)$ et $M = \tau_{F,f}\,(m) \in (\delta)$. Le sens direct appliqué à $\tau_{f,F}$ montre que $\tau_{f,F}\,((\delta)) \subset (d)$ car (d) est la parallèle à (Δ) passant par $\tau^{-1}_{F,f}\,(M) = m$. Comme $\tau^{-1}_{F,f} = \tau_{f,F}$, on déduit $(\delta) \subset \tau_{F,f}\,((d))$, ie l'inclusion voulue. En conclusion : $\tau_{F,f}\,((d)) = (\delta)$.

Autre solution : Soit (d) la droite d'équation $x = k$ où $k \in \mathbb{R}^*$. Si $m \in (d)$, l'abscisse de m est k est celle de $M = \tau_{F,f}\,(m)$ sera $X = \frac{\alpha\beta}{k}$, de sorte que $\tau_{F,f}\,((d))$ soit inclus dans la droite (δ) d'équation $X = \frac{\alpha\beta}{k}$ parallèle à (Δ). La réciproque est tout aussi facile : si $M \in (\Delta)$, l'abscisse X de M vérifie $X = \frac{\alpha\beta}{k}$ et il existe un unique point $m\,(x,y)$ antécédent de M par $\tau_{F,f}$. On a $\frac{\alpha\beta}{x} = \frac{\alpha\beta}{k}$ d'où $x = k$ et $m \in (d)$.

II.A.3.a Pour toutes les questions II.A.3, on conserve les notations du II.A.2. Le point p est l'intersection commune de (Δ), (d) et (d_1). On a vu que

$$\tau_{F,f}\,((d))\ //\ (pf)\ //\,\tau_{F,f}\,((d_1))\,.$$

II.A.3.b On a $(RF)\ //\ (d)$. Comme $(d)\ //\ (d_1)$, la construction de R sera la même pour (d) et pour (d_1), de sorte que $\tau_{F,f}\,((d))$ et $\tau_{F,f}\,((d_1))$ soient deux droites passant par R.

II.A.3.c Dans tous les cas $\tau_{F,f}\,((d))$ sera une droite passant par $\tau_{F,f}\,(f) = F$.

• Si $(d)\ //\ (\Delta)$, $\tau_{F,f}\,((d))$ sera la droite parallèle à (Δ) passant par F d'après II.A.2.b, et l'on a bien le parallélisme $\tau_{F,f}\,((d))\ //\ (d)$,

• Si (d) n'est pas parallèle à (Δ), $\tau_{F,f}\,((d))$ est une droite passant par R et F, soit $\tau_{F,f}\,((d)) = (RF)$. D'après II.A.2.a, $(RF)\ //\ (d)$ et donc $\tau_{F,f}\,((d))\ //\ (d)$.

II.A.4 1) Conservation du birapport de 4 points alignés :

• Première solution : Si les points m_i sont alignés sur une droite non parallèle à (Δ), notons x_i l'abscisse de m_i. Le birapport des quatre verticales passant par m_i étant indépendant du choix de la sécante, on a

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,.$$

Les images $M_i = \tau_{F,f}\,(m_i)$ seront alignées et en notant X_i l'abscisse de M_i

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (X_1, X_2, X_3, X_4)\,.$$

Il suffit maintenant de se rappeler que $X_i = \frac{\alpha\beta}{x_i}$ est l'image de x_i par une fonction homographique et que le birapport est invariant sous l'action d'une telle fonction pour conclure à

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4).$$

Si les points m_i soient alignés sur une droite parallèle à (Δ), il suffit de prendre les ordonnées des points m_i et M_i pour conclure comme précédemment.

• Deuxième solution : On a vu que les images des droites (fm_i) par $\tau_{F,f}$ étaient des parallèles à (fm_i) passant par F. Ainsi $(fm_i) \mathbin{//} (FM_i)$. La parallèle à (fF) passant par m_1 coupe les droites (fm_i) en n_i $(2 \leq i \leq 4)$ et les droites (FM_i) en N_i $(1 \leq i \leq 4)$, et il est facile de voir que N_i est l'image de n_i par la translation de vecteur $\overrightarrow{fF}$ (faire un dessin...). L'invariance du birapport de quatre points par translation montre que

$$(m_1, n_2, n_3, n_4) = (N_1, N_2, N_3, N_4)$$

et l'indépendance du birapport et du choix de la sécante prouve par ailleurs que

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (m_1, n_2, n_3, n_4) \quad \text{et} \quad (N_1, N_2, N_3, N_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4)$$

d'où $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ comme désiré.

2) Conservation du birapport de 4 droites concourantes ou parallèles :
Si $((d_1), (d_2), (d_3), (d_4))$ est le birapport de quatre droites, on choisira une sécante (d) coupant (d_i) en m_i puis on appliquera ce qui précède pour obtenir

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4).$$

Les images (D_i) de (d_i) par $\tau_{F,f}$ étant des droites, les points $M_i \in (D_i)$ étant alignés, on déduit

$$\begin{aligned} ((D_1), (D_2), (D_3), (D_4)) &= (M_1, M_2, M_3, M_4) \\ &= (m_1, m_2, m_3, m_4) = ((d_1), (d_2), (d_3), (d_4)). \end{aligned}$$

II.B.1.a (Voir figure 9) Lorsque (mF) coupe (Δ) en ω, on applique Thalès :

$$\frac{\overline{mf}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{\omega f}}{\overline{\omega M}} = \frac{\overline{fI}}{\overline{MH}} \Rightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{fm}{fI}.$$

Si $(mF) \mathbin{//} (\Delta)$, on conclut encore plus facilement en utilisant le parallélogramme $mFMf$ (faire un dessin).

II.B.1.b

$$m \in \mathcal{C} \Rightarrow mf = R \Rightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{R}{|\beta|}$$

prouve que M appartient à la conique de foyer F, de directrice (Δ) et d'excentricité $e = \frac{R}{|\beta|}$.

II.B.1.c Comme $|\beta|$ est la distance de f à la droite (Δ),

$$\begin{cases} e = \frac{R}{|\beta|} < 1 \Leftrightarrow \Gamma \text{ ellipse } \Leftrightarrow \mathcal{C} \cap (\Delta) = \emptyset \\ e = 1 \Leftrightarrow \Gamma \text{ parabole } \Leftrightarrow \mathcal{C} \cap (\Delta) \text{ est un singleton} \\ e > 1 \Leftrightarrow \Gamma \text{ hyperbole } \Leftrightarrow \mathcal{C} \cap (\Delta) \text{ est une paire.} \end{cases}$$

II.B.1.d Soit Γ la conique de foyer F, de directrice (Δ) et d'excentricité e. Soit $\mathcal{C}$ désigne le cercle de centre f et de rayon $e\,|\beta|$. La question II.B.1.b montre que l'image $\tau_{F,f}(\mathcal{C})$ du cercle $\mathcal{C}$ par l'application de Lebesgue $\tau_{F,f}$ est incluse dans Γ. Réciproquement, si $M \in \Gamma$, il existe $m \in \mathcal{P} \backslash (\Delta)$ tel que $M = \tau_{F,f}(m)$, et II.B.1.a entraîne $e = \frac{MF}{MH} = \frac{fm}{fI}$ soit $fm = e\,|\beta|$ et $m \in \mathcal{C}$. On a montré que $\tau_{F,f}(\mathcal{C}) = \Gamma$.

II.B.2 Cas où (mF) n'est pas parallèle à (Δ) : (Voir figure 9) D'après la partie II.A et en notant toujours $R = h_m(p) \in (\Delta)$, $\tau_{F,f}((mf)) = (MF)$ est une droite parallèle à $(mf)\}$, et $\tau_{F,f}((mp)) = (RM) = (T)$ est la tangente à Γ en M. De $h_m(p) = R$ et $h_m(m) = F$ on tire $(pm) \,//\, (RF)$ et l'on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l}(pm) \,//\, (RF)\\ (mf) \,//\, (MF)\\ (pm) \perp (mf)\end{array}\right\} \Rightarrow (RF) \perp (MF) \quad (*)$$

Cas où $(mF) \,//\, (\Delta)$: (Faire un dessin) Ici $mFMf$ est un parallélogramme, tout comme $pRMf$ (en effet $(RM) \,//\, (pf)$ d'après II.A.2.a, et
$(pR) \,//\, (fM) \,//\, (\Delta)$ par hypothèse), et les hypothèses de l'implication $(*)$ sont encore vraies.

II.B.3 Le résultat est facile à démontrer dans le cas d'un cercle puisqu'alors (pf) est médiatrice de (mn), et donc (pf) est une bissectrice du couple de droites $((fm), (fn))$. On résout le cas d'une conique en transportant cette configuration par l'application $\tau_{F,f}$. En effet (II.A) :

$$\begin{array}{l}\tau_{F,f}((mf)) = (MF) \,//\, (mf)\\ \tau_{F,f}((nf)) = (NF) \,//\, (nf)\\ \tau_{F,f}((pf)) = (PF) \,//\, (pf)\end{array}$$

et (PF) sera une bissectrice du couple de droites $((FM), (FN))$.

II.B.4 Le cercle $\mathcal{C}$ a été obtenu en II.B.1.d. Montrons que le birapport (m_1, m_2, m_3, m_4) est indépendant du choix du cercle et de $\tau_{F,f}$. Si m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 sont des points d'un autre cercle $\mathcal{C}'$ et si $\tau_{F',f'}$ transforme m'_i en M_i, choisissons un point $A = \tau_{F,f}(m) = \tau_{F',f'}(m')$ de (Γ) où $m \in \mathcal{C}$ et $m' \in \mathcal{C}'$.
$\tau_{F,f}$ transforme les droites (mm_i) en les droites (AM_i), et conserve les birapports, donc

$$((mm_1), (mm_2), (mm_3), (mm_4)) = ((AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4)).$$

On sait que le birapport des quatre points cocycliques m_i est indépendant du choix de $m \in \mathcal{C}$, donc le birapport $((AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4))$ des points M_i sera indépendant du choix du points A sur (Γ).
En utilisant encore le fait que les applications $\tau_{F,f}$ et $\tau_{F',f'}$ conserve les birapports de quatre droites concourantes, on peut écrire

$$\begin{array}{rl}(m_1, m_2, m_3, m_4) & = ((mm_1), (mm_2), (mm_3), (mm_4))\\ & = ((AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4))\\ & = ((m'm'_1), (m'm'_2), (m'm'_3), (m'm'_4))\\ & = (m'_1, m'_2, m'_3, m'_4)\end{array}$$

et conclure.

II.B.5.a (Voir figure 10) Travaillons dans le repère unitaire $(I, \overrightarrow{u})$ de (OI) et notons commodément $A, f, ...$ les abscisses des points $A, f, ...$ dans ce repère. On a

$$(A, A', I, F) = \frac{A-I}{A-F} : \frac{A'-I}{A'-F} = \frac{A}{A-\alpha}.\frac{A'-\alpha}{A'}.$$

Compte tenu de l'expression analytique de $\tau_{F,f}$, $A = \frac{\alpha\beta}{a}$ et $A' = \frac{\alpha\beta}{a'}$, d'où

$$(A, A', I, F) = \frac{\beta - a'}{\beta - a} = -1$$

puisque f est milieu de $[aa']$, et la division est harmonique.

II.B.5.b • Comme $(A, A', I, F) = -1$, si O est le milieu de $[AA']$, I.C.1 donne

$$OA^2 = OA'^2 = \overline{OI}.\overline{OF} \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OI} - \overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{OF}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{FA}}.$$

• $A \in \Gamma$ se projette en I sur la directrice, donc $e = \frac{AF}{AI}$ et les égalités précédentes entraînent $e = \frac{OF}{OA}$.

II.B.5.c $\tau_{F,O}(\mathcal{C}_0)$ est la conique de foyer F, de directrice (Δ) et d'excentricité $e' = \frac{OA}{OI}$ (cf II.B.1) et d'après II.B.5.b

$$e' = \frac{OA}{OI} = \frac{OF}{OA} = e$$

ce qui prouve $\tau_{F,O}(\mathcal{C}_0) = \Gamma = \tau_{F,f}(\mathcal{C})$.

II.B.5.d Comme $\tau_{F,O}(\mathcal{C}_0) = \Gamma$, $\tau_{F,O}((qm_0))$ sera la tangente (T) à Γ en M. Elle est parallèle à (Oq) d'après II.A.2.a (En effet, avec les notations de II.A.2.a, $\tau_{F,O}((qm_0))$ est une droite (D) parallèle à (pf), et ici (pf) n'est autre que (Oq)).

II.B.6.a Vu II.B.5.b

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}} \Rightarrow R_0^2 = \overline{OI}.\overline{OF} = \gamma(\gamma - \alpha).$$

Une équation de $\mathcal{C}_0$ est

$$\mathcal{C}_0 \ : \qquad (x-\gamma)^2 + y^2 = \gamma(\gamma-\alpha)$$

ou encore

$$\mathcal{C}_0 \ : \qquad x^2 + y^2 - 2\gamma x + \alpha\gamma = 0. \qquad (1)$$

II.B.6.b $q(0, y_q)$ vérifie

$$\overrightarrow{m_0 q}.\overrightarrow{Om_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_q - y_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 - \gamma \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_q = \frac{x_0^2 + y_0^2 - \gamma x_0}{y_0}.$$

Comme $m_0 \in \mathcal{C}_0$,

$$x_0^2 + y_0^2 = 2\gamma x_0 - \alpha\gamma \qquad (2)$$

et

$$y_q = \gamma \frac{x_0 - \alpha}{y_0}.$$

Pour montrer que (Oq) est perpendiculaire à (Fm_0), on calcule le produit scalaire

$$\overrightarrow{Oq}.\overrightarrow{Fm_0} = \begin{pmatrix} -\gamma \\ y_q \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 \end{pmatrix} = -\gamma x_0 + \alpha\gamma + y_0 y_q = 0.$$

II.B.6.c (Voir figure 10)

• Equation de (T) : (T) est la tangente en M à Γ. C'est aussi la parallèle à (Oq) passant par $M = \tau_{F,O}(m_0) = \left(\frac{\alpha\gamma}{x_0}, \frac{-\alpha y_0}{x_0}\right)$. Comme $\overrightarrow{Oq}\left(-\gamma, \gamma\frac{x_0-\alpha}{y_0}\right)$, on trouve

$$(T) \ : \quad \begin{vmatrix} x - \frac{\alpha\gamma}{x_0} & -1 \\ y + \frac{\alpha y_0}{x_0} & \frac{x_0 - \alpha}{y_0} \end{vmatrix} = 0$$
$$\left(x - \frac{\alpha\gamma}{x_0}\right)\frac{x_0-\alpha}{y_0} + y + \frac{\alpha y_0}{x_0} = 0$$
$$(x_0 - \alpha)x + y_0 y = \frac{\alpha\gamma(x_0-\alpha)}{x_0} - \frac{\alpha y_0^2}{x_0}.$$

Dans toute la suite de la question, on exprimera systématiqement y_0^2 en fonction de α, γ, x_0 grâce à (2). Ici, l'on trouve après réduction

$$(T) \ : \ (x_0 - \alpha)x + y_0 y = \alpha(x_0 - \gamma). \qquad (3)$$

• Equation de (Fm_0) :

$$(Fm_0) \ : \quad \begin{vmatrix} x - \alpha & x_0 - \alpha \\ y & y_0 \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$(Fm_0) \ : \ y_0 x - (x_0 - \alpha)y = \alpha y_0. \qquad (4)$$

• <u>Coordonnées de $K\in(T)\cap(Fm_0)$</u> : $K(x_K,y_K)$ vérifie le système

$$\begin{cases}(x_0-\alpha)\,x+y_0y=\alpha\,(x_0-\gamma) & (3)\\ y_0x-(x_0-\alpha)\,y=\alpha y_0 & (4)\end{cases}$$

Le déterminant de ce système est (en réduisant compte tenu de (2)) :

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix} x_0-\alpha & y_0\\ y_0 & -(x_0-\alpha)\end{vmatrix} = -(x_0-\alpha)^2-y_0^2\\ &= -(x_0-\alpha)^2+x_0^2-2\gamma x_0+\alpha\gamma=(\gamma-\alpha)(\alpha-2x_0)\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}x_K &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix}\alpha\,(x_0-\gamma) & y_0\\ \alpha y_0 & -(x_0-\alpha)\end{vmatrix}=\frac{\alpha}{D}\left(-(x_0-\gamma)(x_0-\alpha)-y_0^2\right)\\ &= \frac{\alpha}{D}\left(-(x_0-\gamma)(x_0-\alpha)+x_0^2-2\gamma x_0+\alpha\gamma\right)\\ &= \frac{\alpha}{D}x_0\,(\alpha-\gamma)=\frac{\alpha x_0}{2x_0-\alpha},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}y_K &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix}x_0-\alpha & \alpha\,(x_0-\gamma)\\ y_0 & \alpha y_0\end{vmatrix}=\frac{1}{D}\left((x_0-\alpha)\,\alpha y_0-\alpha y_0\,(x_0-\gamma)\right)\\ &= \frac{\alpha y_0}{D}(\gamma-\alpha)=\frac{\alpha y_0}{\alpha-2x_0}.\end{aligned}$$

En conclusion

$$K\left(\frac{\alpha x_0}{2x_0-\alpha},\frac{\alpha y_0}{\alpha-2x_0}\right).$$

• On vérife que $K\in\mathcal{C}_0$ en vérifiant que les coordonnées de K satisfont l'équation (1) du cercle. Il faut vérifier que

$$\left(\frac{\alpha x_0}{2x_0-\alpha}\right)^2+\left(\frac{\alpha y_0}{\alpha-2x_0}\right)^2-2\gamma\frac{\alpha x_0}{2x_0-\alpha}+\alpha\gamma=0,$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}&\alpha^2x_0^2+\alpha^2y_0^2-2\alpha\gamma x_0\,(2x_0-\alpha)+\alpha\gamma\,(2x_0-\alpha)^2=0,\\ &\alpha x_0^2+\alpha\left(2\gamma x_0-\alpha\gamma-x_0^2\right)-4\gamma x_0^2+2\alpha\gamma x_0+4\gamma x_0^2+\alpha^2\gamma-4\alpha\gamma x_0=0,\end{aligned}$$

et cette dernière égalité est triviale.

II.B.7.a

$$N=\tau_{F,O}(K)\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\frac{\alpha\gamma}{x_K}=\frac{\gamma(2x_0-\alpha)}{x_0}\\ y_N=-\frac{\alpha y_K}{x_K}=\frac{\alpha y_0}{x_0}.\end{cases}$$

$$M=\tau_{F,O}(m_0)\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{\alpha\gamma}{x_0}\\ y_M=-\frac{\alpha y_0}{x_0}.\end{cases}$$

Les coordonnées du milieu de $[MN]$ seront

$$\begin{cases}\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(2x_0-\alpha)}{x_0}+\frac{\alpha y_0}{x_0}\right)=\gamma\\ \frac{y_M+y_N}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha y_0}{x_0}+\frac{\alpha y_0}{x_0}\right)=0\end{cases}$$

donc O est le milieu de $[MN]$.

• <u>O est centre de symétrie de Γ</u> : Γ est une conique de foyer F et de directrice (Δ), donc d'axe focal (OI). Ayant supposé $a \neq a'$, les points distincts A et A' seront à la fois sur Γ et sur l'axe focal de Γ, et le milieu O de $[AA']$ sera le centre de symétrie de Γ.

Une autre solution consiste à voir que le symétrique de n'importe quel point $M \in \Gamma$ par rapport à O est $N = \tau_{F,O}(K)$, donc appartient encore à Γ puisque $K \in \mathcal{C}_0$ et $\Gamma = \tau_{F,O}(\mathcal{C}_0)$.

II.B.7.b

$$F\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad M\begin{pmatrix} \frac{\alpha\gamma}{x_0} \\ -\frac{\alpha y_0}{x_0} \end{pmatrix} \quad N\begin{pmatrix} \frac{\gamma(2x_0-\alpha)}{x_0} \\ \frac{\alpha y_0}{x_0} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} FM^2 &= \left(\alpha - \frac{\alpha\gamma}{x_0}\right)^2 + \frac{\alpha^2 y_0^2}{x_0^2} \\ &= \alpha^2.\frac{x_0^2 + \gamma^2 - 2\gamma x_0 + y_0^2}{x_0^2} = \alpha^2.\frac{\gamma^2 - \alpha\gamma}{x_0^2} \quad \text{d'après (2)} \\ &= \frac{\alpha^2 R_0^2}{x_0^2}. \end{aligned}$$

et

$$FM = \frac{\alpha R_0}{|x_0|},$$

puisque (IF) orienté de I vers F entraîne $\alpha > 0$.
De la même façon

$$FN^2 = \left(\alpha - \frac{\gamma(2x_0 - \alpha)}{x_0}\right)^2 + \frac{\alpha^2 y_0^2}{x_0^2} = \frac{1}{x_0^2}\left[(\alpha x_0 - 2\gamma x_0 + \alpha\gamma)^2 + \alpha^2 y_0^2\right].$$

En remplaçant y_0^2 en fonction de α, γ, x_0 (cf (2)) puis en repérant $R_0^2 = \gamma(\gamma - \alpha)$, on obtient tous calculs faits

$$FN^2 = \frac{R_0^2}{x_0^2}(\alpha - 2x_0)^2 \quad \text{d'où} \quad FN = \frac{|\alpha - 2x_0| R_0}{|x_0|}.$$

II.B.7.c • <u>Première solution</u> : On utilise la définition bifocale des coniques à centre.
$\Gamma = \tau_{F,O}(\mathcal{C}_0)$ est la conique de foyer F, de directrice (Δ) et d'excentricité $e = \frac{R_0}{|\gamma|}$, et l'on sait que O est son centre de symétrie et que les points A, A' sont les sommets de Γ sur l'axe focal (OI) dès que Γ n'est pas une parabole.
Si $\frac{R_0}{|\gamma|} < 1$, Γ sera donc une ellipse de foyers F et F' (le symétrique de F par rapport au centre O), et d'après la définition bifocale d'une ellipse

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow FM + F'M = Cte$$

On sait aussi que la constante Cte est égale à la distance AA' des deux sommets de l'axe focal, soit $2R_0$ ici.
Si $\frac{R_0}{|\gamma|} > 1$, on raisonne de la même manière avec la définition bifocale d'une hyperbole, à savoir

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \left|FM - F'M\right| = AA' = 2R_0$$

• <u>Deuxième solution</u> : On calcule en coordonnées. Ici $F(\alpha, 0)$ et $F'(2\gamma - \alpha, 0)$ où $\alpha > 0$. Le calcul de $F'M^2$ fait apparaître la même expression que lors du calcul de FN^2, de sorte que $F'M = FN = \frac{|\alpha - 2x_0| R_0}{|x_0|}$.
Vérifions seulement le (i) : Si $e = \frac{R_0}{|\gamma|} < 1$, nous sommes dans le cas où les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ ne coupent pas (Δ). Par suite les intersections de ces cercles avec (OI) ont des abscisses de même signe : $aa' > 0$ et $AA' > 0$. On a

$$FM + F'M = \frac{\alpha + |2x_0 - \alpha|}{|x_0|} R_0,$$

et l'on aura montré que $FM + F'M = 2R_0$ si l'on prouve que

$$2x_0 - \alpha \geq 0. \qquad (*)$$

Comme x_0 est entre A' et A, $(*)$ revient à montrer que

$$2A \geq \alpha \quad \text{et} \quad 2A' \geq \alpha.$$

Comme $A = \frac{\alpha\beta}{a}$ et $A' = \frac{\alpha\beta}{a'}$, cela équivaut à

$$2\frac{\beta}{a} \geq 1 \quad \text{et} \quad 2\frac{\beta}{a'} \geq 1,$$

ce qui est assuré puisque $\beta = \frac{a+a'}{2}$, et ceci quel que soit le signe de a et a'.

⟳ ♣★ THAT'S ALL FOLKS ! ★♣ ⟳

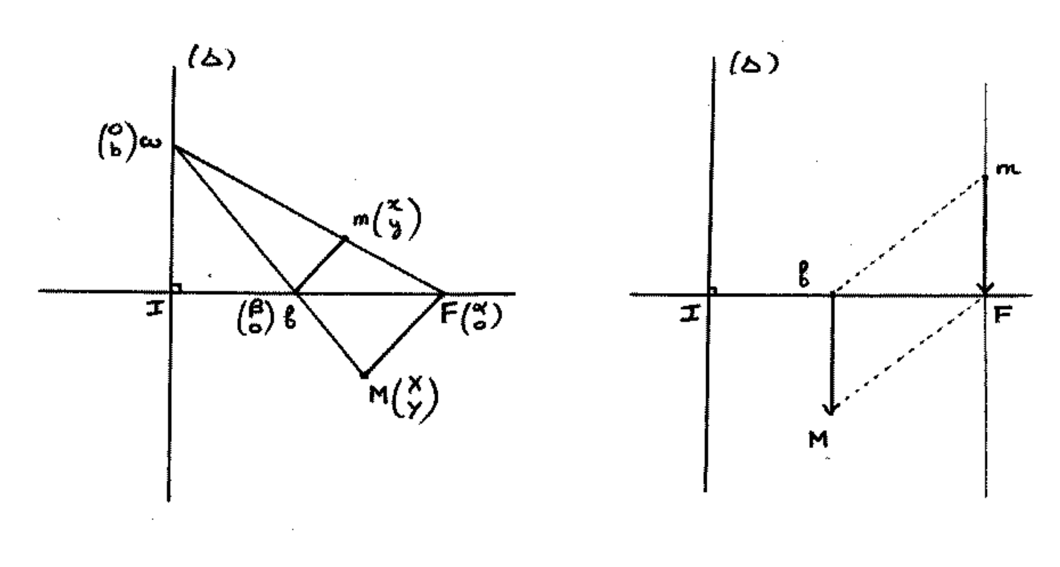


fig. 6 du II.A.1.a

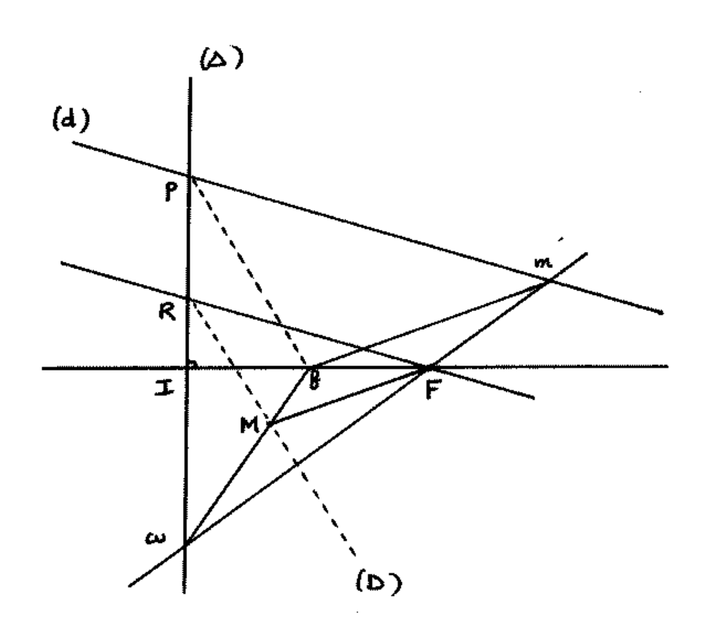


fig.7 du II.A.2.a

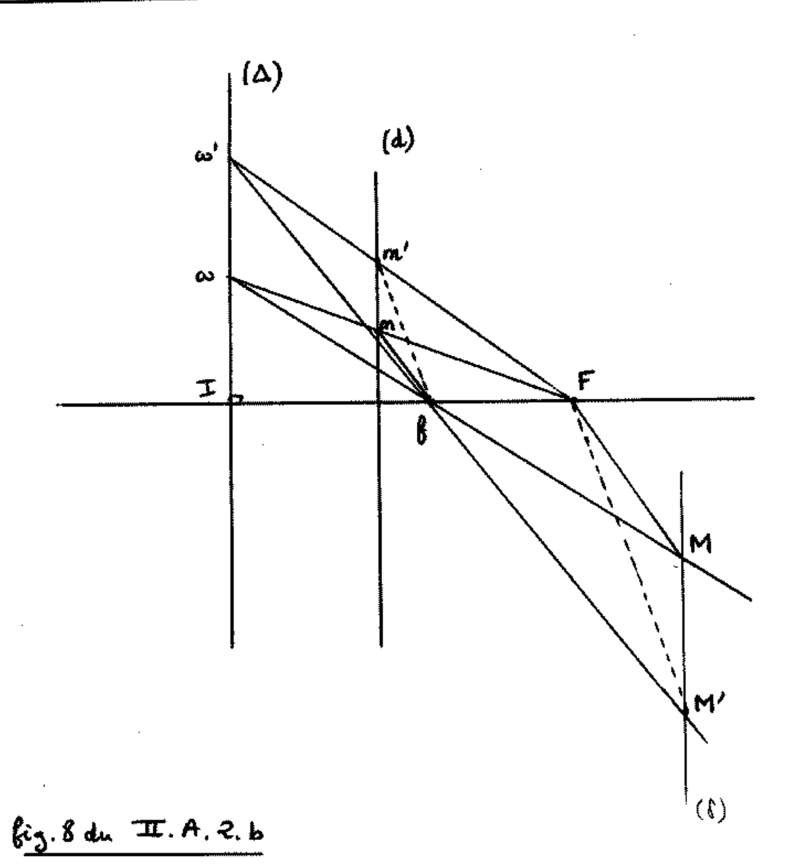


fig.8 du II.A.2.b

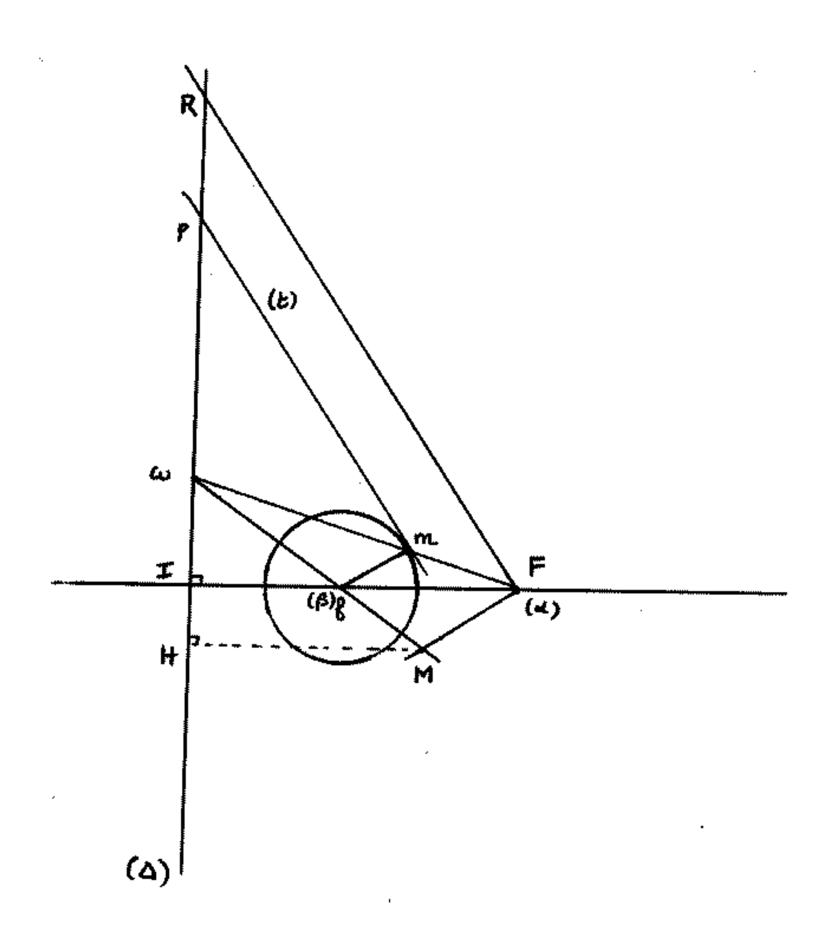


fig. 9 du II. B. 1. a

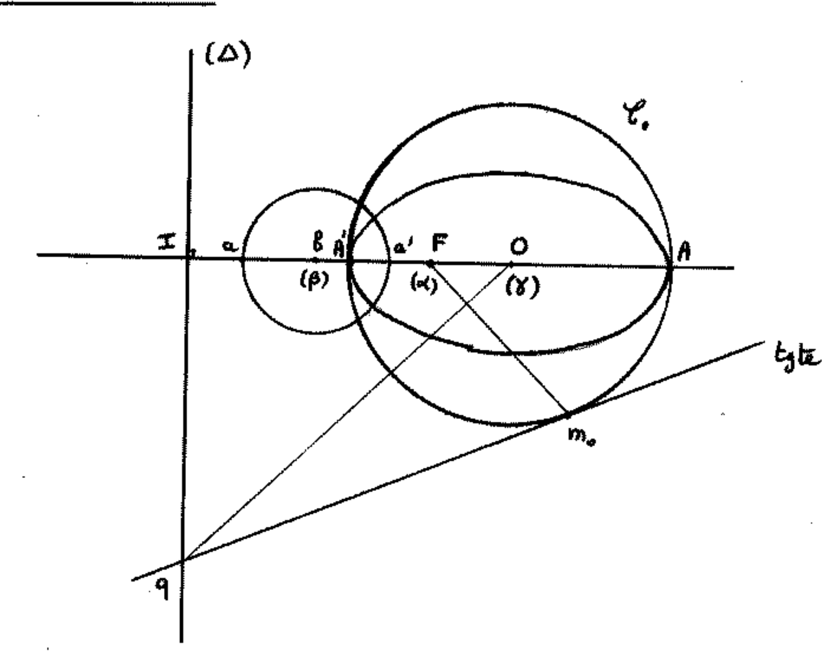


fig. 10 des questions II. B. 5. a et suivantes :

L'objet du problème est l'étude puis l'utilisation des racines de l'équation du 3e degré à coefficients réels.

I

Résolution de l'équation du 3e degré à coefficients réels

On se propose, dans cette partie, d'étudier les équations du type :

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (1)$$

où a_3, a_2, a_1, a_0 sont des réels donnés et z l'inconnue avec la condition $a_3 \neq 0$. On sait que (1) admet trois racines réelles ou complexes, distinctes ou confondues.

1. Soit l'équation $z^3 - 3z^2 - 3z + 1 = 0$. Montrer que cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} z = x + 1 \\ 0 = x^3 - 6x - 4. \end{cases}$$

2. Plus généralement, montrer qu'il existe trois réels h, p, q tels que l'équation (1) soit équivalente au système :

$$(2) \quad \begin{cases} z = x + h \\ 0 = x^3 + px + q \end{cases}$$

où x et z sont les inconnues.
Tester le résultat obtenu sur l'équation $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$.

3. Étude de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (3).
   a. Montrer que si l'on connaît les racines de (3), on connaît les racines de $x^3 + px - q = 0$.
   b. On pose donc $q > 0$. Étudier les variations de la fonction $P : x \to x^3 + px + q$. En déduire :
   (i) Si $p > 0$, l'équation (3) admet une seule racine réelle qui est négative ;
   (ii) Si $p < 0$, l'équation (3) admet encore une racine réelle négative ; de plus :
   – si $4p^3 + 27q^2 < 0$, les deux autres racines sont réelles positives et distinctes,
   – si $4p^3 + 27q^2 = 0$, les deux autres racines sont réelles positives et confondues (P peut s'écrire $P(x) = (x - x_0)(x - x_1)^2$),
   – si $4p^3 + 27q^2 > 0$, les deux autres racines sont complexes ;
   (iii) Montrer que si une équation du 3e degré admet une seule racine réelle, les deux autres sont des complexes conjugués.

4. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec les notations habituelles des nombres complexes. Montrer que j^2 est le conjugué de j et que $1, j, j^2$ sont les racines de l'équation en x : $x^3 - 1 = 0$.

5. Résolution de l'équation (3) par la méthode de Jérôme Cardan (1501-1576).
   a. Montrer que l'équation (3), où l'inconnue est x, est équivalente au système de deux équations à trois inconnues u, v, x :

$$(4) \quad \begin{cases} x = u + v \\ 0 = u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q. \end{cases}$$

   b. On considère alors le système de deux équations à deux inconnues u et v :

$$(5) \quad \begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0. \end{cases}$$

   Déterminer en fonction de p et q les coefficients d'une équation (E) du second degré dont u^3 et v^3 sont solutions.

c. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

d. On pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$. On cherche les trois paires $\{u, v\}$ possibles de solutions du système (5) en prenant en compte le fait que le produit uv est réel. On pourra alors en déduire les trois valeurs de $u + v$ distinctes ou confondues solutions de (4) :

(i) $\Delta < 0$, les racines de (E) sont les nombres complexes conjugués α_1 et α_2. Soit γ une des racines cubiques complexes de α_1. Montrer que $\overline{\gamma}$ est une des racines cubiques complexes de α_2. Donner en fonction de γ et de j les solutions réelles de (4) ;

(ii) $\Delta = 0$, (E) admet une racine double réelle α. Soit γ la racine cubique réelle de α. Donner en fonction de γ et de j les solutions réelles de (4) ;

(iii) $\Delta > 0$, les racines α_1 et α_2 de (E) sont réelles. Soient γ_1 et γ_2 les racines cubiques réelles de α_1 et α_2. Donner en fonction de γ_1, γ_2 et j l'expression de la racine réelle et des deux racines complexes conjugués de (4).

e. On note x_1, x_2, x_3 les racines de (3). Montrer que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et que $x_1 x_2 x_3 = -q$.

6. *Application.*

a. Établir que $(2+i)$ [respectivement $(2-i)$] est une racine cubique de $(2+11i)$ [respectivement $(2-11i)$]. Résoudre explicitement l'équation : $z^3 - 3z^2 - 12z + 10 = 0$.

b. Trouver par une formule explicite la racine réelle de $z^3 + 3z - 1 = 0$.

II

Valeur approchée de $\tan \frac{\pi}{12}$ par la méthode de Daniel Bernoulli

1. Donner la valeur de $\tan \frac{\pi}{6}$, en déduire $\tan \frac{\pi}{12}$.

2. Vérifier que $x_1 = \tan \frac{\pi}{12}$ est racine de l'équation :

$$x^3 - 15x + 4 = 0.$$

Soit x_2 et x_3 les deux autres racines de cette équation.

Donner les valeurs de x_2 et x_3 sachant que l'on a : $|x_1| < |x_2| < |x_3|$.

(On pourra se servir des résultats de la question I.6.a. pour éviter de longs calculs.)

3. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$(6) \quad u_{n+3} = b_2 u_{n+2} + b_1 u_{n+1} + b_0 u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b_0, b_1, b_2 sont des nombres réels avec $b_0 \neq 0$.

a. Montrer que E est un ensemble non vide et est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b. Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de E et $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$. Montrer que φ est linéaire et injective. En déduire que E est de dimension 3.

c. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de E définie par $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$. Cette suite est appelée suite fondamentale de (6). On note $T[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note de même $T^2[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ la suite $T[(v_n)_{n \in \mathbb{N}}]$. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $T[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$, $T^2[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ forment une base de E.

Tournez la page S.V.P.

4. On suppose maintenant que le polynôme $P(X) = X^3 - b_2 X^2 - b_1 X - b_0$ admet trois zéros deux à deux distincts x_1, x_2, x_3 avec : $0 < |x_1| < |x_2| < |x_3|$, en déduire que ces trois zéros sont réels.

   a. Montrer que les suites $(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(x_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(x_3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de E.

   b. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

   c. Montrer que les suites de *a.* forment une base de E.

5. *Cette question requiert une certaine habileté dans le maniement de développements limités si on veut éviter des calculs importants. On pourra admettre le résultat et continuer le travail.*

   On garde les notations des questions 3. et 4.

   a. Montrer qu'il existe trois nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

   Calculer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. De l'égalité $a_n = x_3^n \left(\lambda_3 + \lambda_2 \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n + \lambda_1 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\right)$ déduire qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n \neq 0$.

   b. Montrer que la suite $(w_n)_{n \geqslant n_0+1}$ où $w_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ converge vers x_3.

   c. On pose $k_1 = \frac{x_2}{x_3}$. Montrer qu'il existe k_2 avec $|k_2| < \left|\frac{x_2}{x_3}\right|$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tels que :

   $w_n - x_3 = \alpha\, k_1^{n-1} + 0\,(k_2^n)$ où $0\,(k_2^n)$ est tel que $|k_2^n \cdot 0\,(k_2^n)|$ est borné.

   En déduire qu'il existe $\beta > 0$ tel que : $|w_n - x_3| \leqslant \beta\, k_1^n$,

   ce qui précise la rapidité de convergence de la méthode dite de Daniel Bernoulli.

6. Application à une approximation de $\tan \frac{\pi}{12}$.

   a. Montrer que $\operatorname{cotan} \frac{\pi}{12}$ est la racine de plus grande valeur absolue de l'équation $4x^3 - 15x^2 + 1 = 0$.

   b. À partir de quel rang la suite $(w_n)_{n \geqslant n_0}$ détermine une approximation de $\operatorname{cotan} \frac{\pi}{12}$ à 10^{-4} près ?

   En déduire avec la même précision une approximation de $\tan \frac{\pi}{12}$.

III

Intégrale d'une fonction fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré 3

Soit f la fonction de variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{3x + 10}{x^3 - x^2 - 2x - 12}.$$

1. Montrer que le dénominateur admet un seul zéro réel de valeur 3.

2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle :

$$\frac{3\,X + 10}{X^3 - X^2 - 2\,X - 12}.$$

3. En déduire les primitives de f. On précisera sur quel(s) intervalle(s) les expressions trouvées sont valides.

4. Montrer que $\int_b^0 f(x)\,dx$ admet une limite quand b tend vers $-\infty$ et la calculer.

5. Calculer la valeur exacte de $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.

6. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right).$$

   a. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite I.

   b. On note F une primitive de f sur $[0, 2]$.

   Justifier que, pour tout entier k, $0 \leq k \leq n-1$, il existe $b_k \in \left]\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right[$ tel que

$$F\left(\frac{2(k+1)}{n}\right) - F\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{2}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) + \frac{2}{n^2} f'\left(\frac{2k}{n}\right) + \frac{4}{3n^3} f''(b_k).$$

   de même il existe $c_k \in \left]\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right[$ tel que

$$f\left(\frac{2(k+1)}{n}\right) - f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{2}{n} f'\left(\frac{2k}{n}\right) + \frac{2}{n^2} f''(c_k).$$

   c. Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n-1$, $a_k \in \left]\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right[$.

   Quelle est la limite de $\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(a_k)$? Justifier.

   d. Déduire de ce qui précède que :

$$I - u_n = \frac{1}{n}[f(2) - f(0)] - \frac{1}{3n^2}[f'(2) - f'(0)] + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$$

   où $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

   e. Calculer $f(2) - f(0)$ et $f'(2) - f'(0)$.

Tournez la page S.V.P.

7. D'après les résultats précédents la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers I à la vitesse $\frac{1}{n}$. On va maintenant accélérer cette vitesse de convergence.

   a. On pose $\varphi(n) = 2^n$ et on considère la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$.

   Montrer qu'il existe k_1, k_2 avec $0 < k_2 < k_1 < 1$ et λ_1, λ_2 réels tels que quel que soit n :

$$\mathrm{I} - u_{\varphi(n)} = \lambda_1 k_1^n + \lambda_2 k_2^n + \sigma(k_2^n) \text{ où } \frac{\sigma(k_2^n)}{k_2^n} \to 0,\ n \to \infty.$$

   b. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$, $v_n = \dfrac{u_{\varphi(n)} - k_1 u_{\varphi(n-1)}}{1 - k_1}$, converge vers I. Préciser sa vitesse de convergence.

   Il s'agit de la méthode de Richardson d'accélération de convergence.

   c. Donner une valeur rationnelle approchée de I à 10^{-3} près.

8. On veut améliorer les résultats obtenus dans les questions III.6. et III.7. en prenant une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers I plus vite que $(u_n)_{n\geq 1}$.

   a. On pose $y_n = \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2(k+1)}{n}\right)$

$$t_n = \frac{1}{2}(u_n + y_n).$$

   Interpréter géométriquement les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(t_n)_{n\geq 1}$ à partir de la courbe représentative de f sur $[0, 2]$.

   b. Par un procédé identique à celui détaillé dans la question III.6., montrer que :

$$\mathrm{I} - y_n = -\frac{1}{n}[f(2) - f(0)] - \frac{1}{3n^2}[f'(2) - f'(0)] + \sigma\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   et donc

$$\mathrm{I} - t_n = -\frac{1}{3n^2}[f'(2) - f'(0)] + \sigma\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   La notation σ est celle de la question 7.*a*.

9. On veut accélérer la convergence vers I par la méthode employée à la question III.7. Avec les mêmes notations que dans cette question on pose :

$$z_n = \frac{t_{\varphi(n)} - k\, t_{\varphi(n-1)}}{1 - k}.$$

   Déterminer k de façon à ce que la convergence de la suite $(z_n)_{n\geq 2}$ vers I soit la plus rapide possible.

Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation au Capes Interne

Cl. Piquet
11.12.04

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE COMPOSITION DU CONCOURS INTERNE 1997

I. Résolution de l'équation du 3ème degré à coefficients réels

1. On a $z^3-3z^2-3z+1=0$ avec $z=x+1$ si et seulement si $x^3+3x^2+3x+1-3x^2-6x-3-3x-3+1=0$ soit $x^3-6x-4=0$; la correspondance entre x et z étant bijective, il y a bien équivalence entre l'équation et le système proposé dans l'énoncé.

2. Si $z=x+h$, le nombre complexe z est solution de (1) si et seulement si

$$a_3(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)+a_2(x^2+2xh+h^2)+a_1(x+h)+a_0=0$$

soit

$$a_3x^3+(3a_3h+a_2)x^2+(3a_3h^2+2a_2h+a_1)x+(a_3h^3+a_2h^2+a_1h+a_0)=0\,.$$

On élimine le coefficient de x^2 en choisissant $h=-\dfrac{a_2}{3a_3}$ (on a $a_3\neq 0$), auquel cas

$$p=3h^2+2\frac{a_2}{a_3}h+\frac{a_1}{a_3}=\frac{1}{3}\Big(\frac{a_2}{a_3}\Big)^2-\frac{2}{3}\Big(\frac{a_2}{a_3}\Big)^2+\frac{a_1}{a_3}=\frac{a_1}{a_3}-\frac{1}{3}\Big(\frac{a_2}{a_3}\Big)^2$$

$$q=\frac{1}{a_3}\Big(a_0-\frac{a_1a_2}{3a_3}+\frac{a_2^3}{9a_3^2}-\frac{a_2^3}{27a_3^2}\Big)=\frac{a_0}{a_3}-\frac{a_1a_2}{3a_3^2}+\frac{2a_2^3}{27a_3^3}\,.$$

L'équation $z^3-3z^2+3z-1=0$ correspond à $a_3=1$, $a_2=-3$, $a_1=3$ et $a_0=-1$; alors $h=1$, $p=3-3=0$ et $q=-1+3-2=0$, ce qui donne la nouvelle équation $x^3=0$ soit $(z-1)^3=0$, ce qui est bien exact (formule du binôme).

3.a. $-x$ est racine de $(-x)^3+p(-x)+q=0$ soit $x^3+px-q=0$, ce qui permet de se ramener au cas où $q>0$ (si $q=0$, l'équation admet la racine 0, les deux autres étant racines d'une équation du second degré.

b. La fonction P est bien évidemment continue. De plus, on a $\mathrm{P}'=3x^2+p$; il en résulte que

(i) Si $p\geq 0$, P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{P}(x)=-\infty$ et $\mathrm{P}(0)=q>0$, il résulte du théorème de la valeur intermédiaire que P possède un zéro strictement négatif, unique car P est strictement croissante.

(ii) Si $p<0$, l'argument précédent donnant l'existence d'une racine strictement négative reste valable (par contre l'unicité n'a plus de raison d'être). Comme P′ s'annule deux fois, en $\pm\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$, on a, pour P, le tableau de variation

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		0		$+\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
P′		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	↗		↘	q	↘	m	↗	$+\infty$

où $m = q + \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot$

Alors

- si $m < 0$, soit $q < -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ou $4p^3 + 27q^2 < 0$ (car $x \to x^3$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$), on a, d'après le tableau de variation, deux racines positives distinctes de la première racine.
- si $m = 0$, soit $4p^3 + 27q^2 = 0$, ces deux nouvelles racines sont confondues et positives.
- si $m > 0$, soit $4p^3 + 27q^2 > 0$, ces deux racines sont complexes.

(iii) Si (1) possède une seule racine réelle, il en va de même de l'équation (3) correspondante. On est donc dans le troisième cas de la discussion du (ii). L'équation (3) étant à coefficients réels, les complexes conjugués de ses racines complexes sont aussi racines de (3). Comme ces racines ne sont pas réelles, nécessairement la conjugaison complexe échange ces deux racines complexes qui sont donc complexes conjuguées.

4. Le calcul donne $j^2 = \overline{j}$; on a donc $j + j^2 = -1$ d'où $j^3 + j^2 + j = 0$ soit $j^3 - 1 = 0$.

5.a. Si $x = u + v$ est solution de (3), on a nécessairement

$$0 = (u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q$$

et, inversement, si u et v sont liés par la relation précédente, $x = u + v$ est solution de (3) : l'équation (3) est équivalente au système (4).

b. On a $u^3 + v^3 = -q$ et $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}\cdot$ Les nombres (complexes) u^3 et v^3 sont donc racines de l'équation du second degré (E) $s^2 + qs - \frac{p^3}{27} = 0\cdot$

c. On pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

- Si $\Delta \geq 0$, il vient $u^3, v^3 \in \left\{-\frac{1}{2}\left(q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)\right\}$, ces deux valeurs pouvant se réduire à la seule valeur $-\frac{1}{2}q$ si $\Delta = 0$.
- Si $\Delta < 0$, il vient $u^3, v^3 \in \left\{-\frac{1}{2}\left(q \pm i\sqrt{-q^2 - \frac{4p^3}{27}}\right)\right\}\cdot$

d.

(i) Cas où $\Delta < 0$: d'après ce qui précède, (E) possède deux racines α_1 et α_2 complexes conjuguées. Si $\gamma^3 = \alpha_1$, on a, par conjugaison complexe, $\overline{\gamma}^3 = \overline{\alpha}_1 = \alpha_2$. Les trois racines cubiques de α_1 s'écrivent donc γ, $j\gamma$ et $j^2\gamma$, celles de α_2 étant les complexes conjugués de ces nombres. Comme le produit uv est réel, on obtient les différentes possibilités pour les racines x_i de (4) :

- si $u = \gamma$, alors $v = \overline{\gamma}$ et $x_1 = \gamma + \overline{\gamma}$
- si $u = j\gamma$, alors $v = \overline{j}\,\overline{\gamma}$ et $x_2 = j\gamma + j^2\,\overline{\gamma}$
- si $u = j^2\gamma$, alors $v = \overline{j^2\gamma}$ et $x_3 = j^2\gamma + j\overline{\gamma}$

(ii) Cas où $\Delta = 0$: alors (E) admet la racine double $-q/2$ et donc $\gamma = -\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3}\cdot$ Comme précédemment, les trois racines s'écrivent $x_1 = \gamma + \overline{\gamma} = 2\gamma$, $x_2 = j\gamma + j^2\overline{\gamma} = (j + j^2)\gamma = -\gamma$ et, de même, $x_3 = -\gamma$. On vérifie du reste que

$$(x - 2\gamma)(x + \gamma)^2 = x^3 - 3\gamma^2 x - 2\gamma^3 = x^3 - 3\gamma^2 x + q = 0$$

car $-3\gamma^2 = -3\left(\frac{q}{2}\right)^{2/3} = p\cdot$

(iii) si $\Delta > 0$, les racines réelles et distinctes de (E) ont chacune une unique racine cubique réelle (car $x \to x^3$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). La racine réelle de (4) est donc $x_1 = \gamma_1 + \gamma_2$, les deux autres, complexes conjuguées, étant $x_2 = j\gamma_1 + j^2\gamma_2$ et $x_3 = j^2\gamma_1 + j\gamma_2$.

e. La somme $x_1 + x_2 + x_3$ des racines de (3) est toujours nulle, car le coefficient de x^2 dans (3) est nul. Le produit des racines vaut l'opposé du terme constant : $x_1x_2x_3 = -q$.

6.a. On a $(2 + i)^3 = 2^3 + 3i2^2 + 3i^2\,2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$ et, par conjugaison complexe, $(2 - i)^3 = 2 - 11i$.

On utilise la méthode de Cardan : on pose $z = x+1$, si bien que l'équation $z^3-3z^2-12z+10 = 0$ s'écrit $x^3 - 15x - 4 = 0$, ce qui correspond à $q = -4$ et $p = -15$. L'équation (E) correspondante est donc $s^2 - 4s + 125 = (s - 2)^2 + 11^2 = 0$, d'où les racines $\alpha_1 = 2 + 11i$ et $\alpha_2 = 2 - 11i$. Ce qui précède montre que le choix $\gamma = 2 + i$ est convenable ; il donne pour racines de $x^3 - 15x - 4 = 0$:

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = j(2 + i) + \overline{j}(2 - i) = -2 - \sqrt{3} \qquad x_3 = j(2 - i) + \overline{j}(2 + i) = -2 + \sqrt{3}$$

et donc pour racines de $z^3 - 3z^2 - 12z + 10 = 0$

$$z_1 = 5 \qquad z_2 = -1 - \sqrt{3} \qquad z_3 = -1 + \sqrt{3}$$

b. Pour l'équation $z^3 + 3z - 1 = 0$, on a $p = 3$ et $q = -1$, donc (E) s'écrit $s^2 - s - 1 = 0$. Comme $4 \times 3^3 + 27 > 0$, on a une seule racine réelle, positive car $q < 0$. La racine positive de (E) est $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, l'autre étant $\alpha_2 = -1/\alpha_1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. On peut donc écrire l'unique racine réelle de $z^3 + 3z - 1 =$ sous la forme

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}\,.$$

II. Valeur approchée de $\tan\frac{\pi}{12}$ par la méthode de Daniel Bernoulli

1. On sait que $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$ Pour déterminer $\tan\frac{\pi}{12}$, on pose $t = \tan\frac{\pi}{12}$; on sait alors que $t > 0$ et que $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, soit $t^2 + 2t\sqrt{3} - 1 = (t + \sqrt{3})^2 - 4 = 0$. La racine positive de cette équation du second degré donne $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

2. On a vu en I.6.a. que $-2 + \sqrt{3}$ est racine de $x^3 - 15x - 4 = 0$; il en résulte que l'opposé $2 - \sqrt{3}$ est racine de $x^3 - 15x + 4 = 0$. Les autres racines sont les opposées des racines trouvées en I.6.a. Comme on classe ces racines selon l'ordre $|x_1| < |x_2| < |x_3|$, on a

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \qquad x_2 = 2 + \sqrt{3} \qquad x_3 = -4\,.$$

3.a. E contient évidemment la suite nulle $(\mathbf{0}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathbf{0}_n = 0$ pour tout entier n). De plus, si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites de E, toute combinaison linéaire à coefficients réels de ces deux suites est évidemment encore un élément de E car la condition (6) est stable par combinaisons linéaires ; E est donc un sous-espace vectoriel réel de l'ensemble des suites réelles.

b. L'application φ de E dans $\mathbb{R}^3$ est clairement linéaire (c'est une projection sur les trois premières "composantes"). Soit $(u_n)_n$ une suite de E telle que $\varphi(u) = (0,0,0)$: alors $u_n = 0$ pour $n = 0,1,2$, donc aussi pour $n = 3$ par la relation (6). Une récurrence évidente montre alors que $u_n = 0$ pour tout entier naturel n, donc $u = \mathbf{0}$, ce qui démontre que φ est *injective*. L'application φ est donc un isomorphisme de E avec son image. Or il est facile de construire les suites e_0, e_1 et e_2 telles que $\varphi(e_0) = (1,0,0)$, $\varphi(e_1) = (0,1,0)$ et $\varphi(e_2) = (0,0,1)$: l'image de φ est donc $\mathbb{R}^3$: E est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ et est donc de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

c. Si l'on montre que les trois vecteurs $(a_n)_n$, $T\big((a_n)_n\big)$ et $T^2\big((a_n)_n\big)$ de E sont linéairement indépendants, on aura démontré que ces vecteurs forment une base de E car E est de dimension 3.

Soit donc trois réels λ_0, λ_1 et λ_2 tels que

$$\lambda_0(a_n) + \lambda_1 T\big((a_n)_n\big) + \lambda_2 T^2\big((a_n)_n\big) = \mathbf{0}$$

le choix $n = 0$ montre que $\lambda_2 = 0$; le choix $n = 1$ donne alors $\lambda_1 = 0$ et enfin $n = 2$ implique que $\lambda_0 = 0$: l'indépendance linéaire recherchée est démontrée.

4. Les trois zéros de P sont réels, sinon deux seraient complexes conjugués et donc de même module, ce qui est exclu par hypothèse.

a. On a $P(x_1) = 0$, donc $x_1^3 = b_2x_2^2 + b_1x_1 + b_0x_1$ et, par multiplication par x_1^n, on voit que $(x_1^n)_n$ est élément de E. Démonstration analogue pour les suites $(x_2^n)_n$ et $(x_3^n)_n$.

b. On a facilement en retranchant à la seconde ligne la première multipliée par x_1 et à la troisième la première multipliée par x_1^2, puis en développant par rapport à la première colonne,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

quantité non nulle d'après l'hypothèse faite au début de la question (zéros deux à deux distincts).

c. Les trois vecteurs $(1, x_1, x_1^2)$, $(1, x_2, x_1^2)$ et $(1, x_3, x_1^3)$ de $\mathbb{R}^3$ sont donc linéairement indépendants ; l'injectivité de φ assure qu'il en va de même pour $(x_1^n)_n$, $(x_2^n)_n$ et $(x_3^n)_n$ dans E : ils forment donc une base de E.

5.a. L'existence des trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 résulte de la question 4.c. précédente. Déterminer ces trois réels revient à résoudre le système linéaire obtenu en faisant $n = 0$, $n = 1$ puis $n = 2$:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & + & \lambda_3 x_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1^2 & + & \lambda_2 x_2^2 & + & \lambda_3 x_3^2 & = & 1 \end{array}$$

On a donc

$$\begin{array}{ccccc} (x_1 - x_3)\lambda_1 & + & (x_2 - x_3)\lambda_2 & = & 0 \\ (x_1^2 - x_3^2)\lambda_1 & + & (x_2^2 - x_3^2)\lambda_2 & = & 1 \end{array} \quad \text{d'où} \quad (x_1 - x_3)(x_1 + x_3 - x_2 - x_3)\lambda_1 = 1$$

et $(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)\lambda_1 = 1$ et de même pour λ_2 et λ_3 :

$$\lambda_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Comme $|x_2| < |x_3|$ et $|x_1| < |x_3|$, l'égalité de l'énoncé implique que (on a $(x_3 \neq 0)$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{x_3^n} = \lambda_3 \neq 0$. Il existe donc un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\left|\dfrac{a_n}{x_3^n}\right| \geq \dfrac{1}{2}|\lambda_3| > 0$ d'où $|a_n| > 0$, ce qui démontre le résultat demandé.

b. On a $w_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = x_3 \dfrac{a_n}{x_3^n} \cdot \dfrac{x_3^{n-1}}{a_{n-1}}$ qui converge vers x_3 d'après ce qui précède.

c. On a donc

$$w_n - x_3 = \frac{a_n}{a_{n-1}} - x_3 = x_3\Big(\big(\lambda_3 + \lambda_2 k_1^n + \lambda_1\big(\frac{x_1}{x_3}\big)^n\big)\big(\lambda_3 + \lambda_2 k_1^{n-1} + \lambda_1\big(\frac{x_1}{x_3}\big)^{n-1}\big)^{-1} - 1\Big)$$

$$= x_3 \frac{\lambda_2(k_1-1)k_1^{n-1} + \lambda_1\big(\frac{x_1}{x_3}\big)^{n-1}\big(\frac{x_1}{x_3} - 1\big)}{\lambda_3 + \lambda_2 k_1^{n-1} + \lambda_1\big(\frac{x_1}{x_3}\big)^{n-1}} = x_3 \frac{\lambda_2(k_1-1)k_1^{n-1}}{\lambda_3} \cdot \frac{1+N_n}{D_n}$$

avec

$$N_n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\big(\frac{x_1}{x_3}\big)^{n-1}\big(\frac{x_3}{x_2}\big)^{n-1}\Big(\big(\frac{x_1}{x_3}\big)-1\Big) \cdot \frac{1}{k_1-1} = \big(\frac{x_1}{x_2}\big)^{n-1} \frac{x_2-x_3}{x_3-x_1} \cdot \frac{x_1-x_3}{x_3} \cdot \frac{x_3}{x_2-x_3} = -\big(\frac{x_1}{x_2}\big)^{n-1}$$

et $D_n = 1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} k_1^{n-1} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\big(\dfrac{x_1}{x_3}\big)^{n-1}$.

Comme $|k_1| < 1$ et $|x_1| < |x_3|$, il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 1$. Si l'on pose $k_1' = \dfrac{x_1}{x_2}$, on a $w_n - x_3 = x_3 \dfrac{\lambda_2(k_1-1)}{\lambda_3} k_1^{n-1} \dfrac{1-k_1'^{n-1}}{D_n}$.

On pose $\alpha = x_3 \dfrac{\lambda_2(k_1-1)}{\lambda_3} = \dfrac{(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{(x_1-x_2)}$, et l'on a $w_n - x_3 = \alpha\, k_1^{n-1} \dfrac{1-k_2^{n-1}}{D_n}$. La suite $\left(\left|\dfrac{w_n - x_3}{k_1^n}\right|\right)_n$ est convergente et de limite α/k_1 lorsque $n \to +\infty$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 1$ et $|k_1'| < 1$ et est donc bornée ; il existe donc un réel positif β tel que, pour tout entier n, $|w_n - x_3| \leq \beta |k_1|^n$.

Remarque : On s'est un peu éloigné de l'énoncé qui ne semble pas très clair dans cette question. En fait, on obtient un résultat un peu meilleur, à savoir $w_n - x_3 = \alpha k_1^{n-1}\big(1 + \mathcal{O}(k_1'^n)\big)$ où la suite $\dfrac{\mathcal{O}(k_1'^n)}{k_1'^n}$ est bornée.

6.a. On a vu (question II.b.) que $\tan(\pi/12)$ est la racine de plus petite valeur absolue de l'équation $x^3 - 15x + 4 = 0$. Il en résulte que $\cot(\pi/12)$ est la racine de plus grande valeur absolue de l'équation obtenue en changeant x en $1/x$, à savoir $4x^3 - 15x^2 + 1 = 0$.

b. La question posée est assez délicate, car l'on ne dispose actuellement d'aucune majoration précise de l'erreur commise en remplaçant x_3 par w_n. Pour obtenir le résultat, on a besoin de majorer N_n et de minorer D_n (définis en 5.c.). On a $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, ce qui donne, après un petit calcul, $k_1 = 7 - 4\sqrt{3} > 0$, $\lambda_1 = 16/33$, $\lambda_2 = -2(4+3\sqrt{3})/33 < 0$ et $\lambda_3 = 2(3\sqrt{3}-4)/33 > 0$. Il en résulte, pour $n \geq 3$, que

$$|D_n - 1| \leq \frac{3\sqrt{3}+4}{3\sqrt{3}-4}(7-4\sqrt{3})^{n-1} + \frac{8}{9}(3\sqrt{3}+4)\Big(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\Big)^{n-1} < 0{,}08$$

(résultat obtenu à la calculette) si bien que $1 + D_n \geq 0,92$ si $n \geq 3$.

De même, $|N_n| < 0,88$ si $n \geq 3$. On a donc $|w_n - x_3| \leq |\alpha| \dfrac{1,88}{0,92}(7 - 4\sqrt{3})^{n-1}$ si $n \geq 3$. Comme on ignore si la suite $(w_n)_n$ est monotone (elle est monotone décroissante en fait) on est amené, pour avoir la précision requise, à majorer l'erreur par $0,5 \times 10^{-4}$; on sera certain d'avoir $|w_n - x_3| \leq 0,5 \times 10^{-4}$ si $|\alpha| \times 1,88 \times (7 - 4\sqrt{3})^{n-1} \times 10^4 \leq 0,46$. Or $|\alpha| < 26,64$; on cherche le premier entier n réalisant la condition $500\,832(7 - 4\sqrt{3})^{n-1} \leq 0,46$. On trouve facilement, toujours avec l'aide d'une calculette, $n \geq 7$. On donne les valeurs numériques obtenues pour a_k et w_k $(k = 3, \ldots, 7)$:

k	a_k	w_k
3	3,750 000 000 000	3,750 000 000 000 000 00
4	14,062 500 000 000	3,750 000 000 000 000 00
5	52,484 375 000 000	3,732 222 222 222 222 22
6	195,878 906 250 000	3,732 137 540 934 802 02
7	731,030 273 437 500	3,732 052 049 057 732 58

On en tire l'encadrement $3,7320 < \cot \dfrac{\pi}{12} < 3,7321$. Prenant les inverses, on obtient $0,267\,945 < \tan \dfrac{\pi}{12} < 0,267\,953$ qui est de meilleure qualité (précision de 10^{-5}).

Intégrale d'une fonction fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré 3

1. On vérifie que $3^3 - 3^2 - 2 \times 3 - 12 = 18 - 6 - 12 = 0$. On peut donc mettre $(x - 3)$ en facteur : $x^3 - x^2 - 2x - 12 = (x - 3)(x^2 + 2x + 4)$ et le trinôme obtenu est visiblement toujours strictement positif (son discrimant est négatif).

2. La décomposition sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$\frac{3X + 10}{X^3 - X^2 - 2X - 12} = \frac{A}{X - 3} + \frac{BX + C}{X^2 + 2X + 4}$$

où A, B et C sont des constantes réelles. On multiplie par $(X - 3)$ et l'on fait $X = 3$, ce qui donne $A = \dfrac{3 \times 3 + 10}{3^2 + 6 + 4} = 1$. On multiplie par X que l'on fait tendre vers l'infini ; il vient $A + B = 0$ soit $B = -1$. Enfin le choix $X = 0$ donne $-\dfrac{5}{6} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{C}{4}$ d'où $C = 4\dfrac{-3}{6} = -2$. On a donc

$$\frac{3X + 10}{X^3 - X^2 - 2X - 12} = \frac{1}{X - 3} - \frac{X + 2}{X^2 + 2X + 4}.$$

3. La fonction f étant discontinue en 3, on obtiendra des primitives sur chacune des demi-droites $]-\infty, 3[$ et $]3, +\infty[$. On écrit

$$\frac{X + 2}{X^2 + 2X + 4} = \frac{(X + 1) + 1}{(X + 1)^2 + 3} = \frac{X + 1}{(X + 1)^2 + 3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{X + 1}{\sqrt{3}})^2}$$

d'où les primitives cherchées :

– sur $]3, +\infty[$ $\qquad F(x) = \ln(x - 3) - \dfrac{1}{2}\ln\big((x + 1)^2 + 3\big) - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Atan} \dfrac{x + 1}{\sqrt{3}} + \mathrm{C^{te}}.$

– sur $]-\infty, 3[$ $\qquad F(x) = \ln(3 - x) - \dfrac{1}{2}\ln\big((x + 1)^2 + 3\big) - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Atan} \dfrac{x + 1}{\sqrt{3}} + \mathrm{C^{te}}.$

4. On pourrait démontrer a *priori* l'existence de l'intégrale impropre ($f(x) \sim 1/x^2$ quand $x \to -\infty$), mais comme on demande de la calculer, on mène de front les deux opérations. On a, pour $x < 3$,

et F désignant maintenant la primitive de f nulle en 0,

$$F(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{(x+1)^2+3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - \mathrm{Atan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

Comme $\displaystyle\int_b^0 f(x)\,dx = -F(b)$, l'intégrale impropre existe si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$ existe. Or $F(x) = -\ln\left(\dfrac{3\sqrt{(x+1)^2+3}}{2(3-x)}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{6} - \mathrm{Atan}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$, donc

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\ln\frac{3}{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

En définitive, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ existe et vaut $\ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. On a $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) = -\ln(3\sqrt{3}) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = -\frac{3}{2}\ln(3) - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

6.a. On reconnaît dans u_n une somme de Darboux relative à l'intégrale de Riemann sur le segment $[0,2]$ découpé en intervalles de même longueur $1/n$ de la fonction *continue* f. Il en résulte que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = I$.

On peut aussi vérifier que f est, sur l'intervalle considéré, monotone décroissante : en effet

$$\frac{f'}{f} = \frac{3}{3x+10} - \frac{1}{x-3} - \frac{2(x+1)}{x^2+2x+4} = \frac{N}{D}$$

avec $D(x) = (3x+10)(x-3)(x^2+2x+4)$ et $N(x) = -6x^3 - 27x^2 + 20x - 16$. Le dénominateur D a le signe de f et les variations de N s'obtiennent aisément : $N'(x) = -18x^2 - 54x + 20$; on note que $N'(1/3) = 0$, l'autre zéro de N' étant strictement négatif. Il en résulte que N est croissante de 0 à $1/3$, décroissante de $1/3$ à 2. On a

$$N(0) = -16, \qquad N(2) = -132, \qquad \text{et} \qquad N\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9} - 3 + \frac{20}{3} - 16 = \frac{58}{9} - 19 < 0\,.$$

La fonction f est donc décroissante sur $[0,2]$, si bien que (méthode des rectangles)

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{2k+2}{n}\right) \leq \int_{2k/n}^{2(k+1)/n} f(x)\,dx \leq \frac{2}{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)$$

d'où, par sommation en k de 0 à $n-1$,

$$u_n + \frac{2}{n}\big(f(2) - f(0)\big) \leq \int_0^2 f(x)\,dx \leq u_n \qquad \text{soit} \qquad 0 \leq u_n - \int_0^2 f(x)\,dx \leq \frac{2}{n}\big(f(0) - f(2)\big)\,.$$

Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir le résultat demandé.

b. Comme $F' = f$ (théorème fondamental du calcul intégral), il suffit d'utiliser la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2, au point $2k/n$, pour obtenir le premier résultat. Le second est, lui aussi, l'écriture pour f de la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 1 au même point.

c. L'expression donnée dans le texte est une somme de Darboux relative à l'intégrale sur $[0,2]$ de la fonction continue f'' ; il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(a_k) = \int_0^2 f''(x)\,dx = f'(2) - f'(0)\,.$$

d. On somme pour k allant de 0 à $n-1$ la première égalité du 6.b. ; il vient

$$F(2)-F(0)=u_n+\frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}f'\big(\frac{2k}{n}\big)+\frac{4}{3n^3}\sum_{k=0}^{n-1}f''(b_k)$$

soit, en sommant de même la seconde égalité,

$$I-u_n=\frac{1}{n}\big(f(2)-f(0)\big)-\frac{2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}f''(c_k)+\frac{4}{3n^3}\sum_{k=0}^{n-1}f''(b_k)\,.$$

Or la question c. donne $\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(a_k)=f'(2)-f'(0)+\varepsilon_1(n)$ où $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_1(n)=0$. Ceci permet d'écrire

$$I-u_n=\frac{1}{n}\big(f(2)-f(0)\big)-\frac{1}{3n^2}\big(f'(2)-f'(0)\big)+\frac{1}{n^2}\varepsilon(n)\qquad\text{où}\qquad\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0\,.$$

On explicite les coefficients : un calcul simple donne

$$f(0)=-\frac{5}{6}\qquad f(2)=-\frac{4}{3}\qquad f'(0)=-\frac{1}{9}\qquad f'(2)=-\frac{11}{12}$$

$$\text{d'où}\quad f(2)-f(0)=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad f'(2)-f'(0)=-\frac{29}{36}\cdot$$

7.a. Le choix effectué pour la fonction φ conduit à prendre $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=\frac{1}{4}$, $\lambda_1=f(2)-f(0)=-\frac{1}{2}$ et $\lambda_2=-\frac{1}{3}\big(f'(2)-f'(0)\big)=\frac{29}{108}\cdot$ On a bien alors

$$I-u_{\varphi(n)}=\lambda_1k_1^n+\lambda_2k_2^n+o(k_2^n)\qquad\text{avec}\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{o(k_2^n)}{k_2^n}=0\cdot$$

b. Il vient

$$\begin{aligned}I-v_n&=\frac{1}{1-k_1}\Big(\lambda_1k_1^{n-1}(k_1-k_1)+\lambda_2k_2^{n-1}(k_2-k_1)+o(k_2^n)-k_1\,o(k_2^{n-1})\Big)\\&=\lambda_2\frac{k_2-k_1}{1-k_1}k_2^{n-1}+o(k_2^n)\end{aligned}$$

car $o(k_2^{n-1})=o(k_2^n)$. On a donc un équivalent de $I-v_n$ quand $n\to+\infty$, à savoir $\lambda_2\frac{k_2-k_1}{1-k_1}k_2^{n-1}$, quantité qui tend géométriquement vers 0, comme k_2^n à un facteur constant près. Comme $k_2=k_1/2$, le gain est appréciable par rapport à la suite $(u_{\varphi(n)})_n$.

c. Cette question plonge l'auteur du corrigé dans un abîme de perplexité. Comment la comprendre ? On n'a actuellement *aucune* majoration de l'erreur $|I-v_n|$ mais uniquement un équivalent, ce qui ne permet aucune affirmation quant à la valeur de l'erreur commise au rang n (†). Effectuer une *majoration* de $|I-v_n|$ est concevable mais requiert un travail considérable (il faut déjà majorer le $\varepsilon(n)$ de la question 6.d., ce qui est très laborieux. Faut-il *admettre* que l'on s'estime satisfait si l'équivalent trouvé à la question précédente est majoré par 10^{-3} ? C'est ce que l'on va faire, en précisant toutefois que **l'on ne répond pas à la question posée**.

(†) Le signe de $I-v_n$ étant fixe, on n'a aucun espoir d'encadrement de I par les sous-suites $(v_{2n})_n$ et $(v_{2n+1})_n$, ce qui donnerait un contrôle *a posteriori* de l'erreur.

On a vu que $I - v_n \sim \lambda_2 \dfrac{k_2 - k_1}{1 - k_1} k_2^{n-1} = \Big(-\dfrac{29}{108}\Big)\Big(-\dfrac{1/4}{1/2}\Big)\dfrac{1}{4^{n-1}} = \dfrac{29}{54}4^{-n}$. On peut donc espérer avoir la précision requise si $29 \times 10^3 < 54 \times 4^n$, ce qui donne $n \geq 5$.

Il faut maintenant donner une approximation *rationnelle* de I par v_5, c'est-à-dire calculer u_{32} sous forme de fraction, ce qui est franchement déplaisant. On essaye de minimiser les calculs :

$$v_5 = 2(u_{32} - \frac{1}{2}u_{16}) = 2u_{32} - u_{16} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{31} f\big(\frac{k}{16}\big) - \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{15} f\big(\frac{k}{8}\big) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{15} f\big(\frac{2k+1}{16}\big)\cdot$$

Comme f est une fraction rationnelle à coefficients entiers, il est clair que v_5 est un rationnel ; l'expliciter est une autre affaire ! Un calcul effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel donne

$$v_5 = -\frac{90\ 752881\ 154537\ 038827\ 505165\ 914946\ 340317\ 326616\ 196290\ 148864}{46\ 547207\ 361377\ 905624\ 160936\ 332713\ 398678\ 872771\ 554718\ 865925}$$

(la fraction est bien sous forme irréductible). Il est clair que le résultat est, d'un point de vue calcul approché, sans intérêt. Aussi faut-il sans doute comprendre la question de l'énoncé sous la forme "donner une écriture décimale" (qui sera évidemment rationnelle !) "de I à 10^{-3} près". Dans ces conditions, pourquoi ne pas demander de programmer l'algorithme donnant (à la calculette) le résultat ? On trouve alors facilement $v_5 \simeq -1{,}949\,7$; comme l'erreur est majorée, pour $n = 5$, par $\dfrac{29}{54} \times 4^{-5} \simeq 5{,}25 \times 10^{-4}$, on peut espérer que $I \simeq -1{,}950 \pm 0.525 \times 10^{-3}$ soit $-1{,}950\,2 < I < -1{,}949\,1$, encadrement de précision pratiquement égale à 10^{-3}. La comparaison avec la valeur "exacte" ($-1{,}950\,218\,327$), qui est facile à déterminer à l'aide d'une calculette, montre que l'estimation est correcte (mais non rigoureusement exacte).

Il est instructif d'examiner les valeurs de v_n obtenues pour n variant de 1 à 8 :

n		n	
1	$-1{,}857\ 142\ 857\ 142\ 857\ 14$	5	$-1{,}949\ 695\ 509\ 119\ 594\ 63$
2	$-1{,}921\ 235\ 521\ 235\ 521\ 24$	6	$-1{,}950\ 087\ 317\ 186\ 276\ 06$
3	$-1{,}942\ 199\ 336\ 428\ 090\ 89$	7	$-1{,}950\ 185\ 555\ 331\ 511\ 38$
4	$-1{,}948\ 145\ 981\ 787\ 924\ 91$	8	$-1{,}950\ 210\ 132\ 908\ 365\ 17$

La lecture de ces valeurs montre que v_5 est une "bonne" approximation de I ; le nombre $-1{,}950$ semble être l'approximation correcte à 10^{-3} près, mais on n'en a pas la *démonstration.*

8.a. La somme t_n correspond à l'approximation de I par la méthode des trapèzes ; en effet $\dfrac{1}{n}\Big(f\big(\dfrac{2k}{n}\big) + f\big(\dfrac{2(k+1)}{n}\big)\Big)$ est l'aire du trapèze $ABCD$ déterminé sur le graphe de f par les points

$$A = \big(\frac{2k}{n}, 0\big), \qquad B = \big(\frac{2k}{n}, f(\frac{2k}{n})\big) \qquad C = \big(\frac{2(k+1)}{n}, f(\frac{2(k+1)}{n})\big) \qquad D = \big(\frac{2(k+1)}{n}, 0\big)\cdot$$

b. Le procédé est tellement identique qu'on ne voit pas la nécessité de le récrire. On obtient

$$I - y_n = -\frac{1}{n}\big(f(2) - f(0)\big) - \frac{1}{3n^2}\big(f'(2) - f'(0)\big) + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$$

et

$$I - t_n = -\frac{1}{3n^2}\big(f'(2) - f'(0)\big) + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\cdot$$

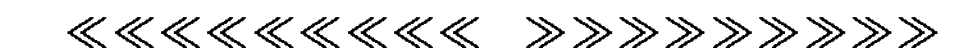
c. On ne peut que faire "disparaître" le terme en $1/n^2$, ce qui s'obtient aisément en prenant $k = \dfrac{1}{4}$ car $\dfrac{1}{4^n} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4^{n-1}} = 0$.

On donne, pour information, les valeurs obtenues en poursuivant l'accélération de convergence jusqu'au rang $n = 9$ (on utilise alors la méthode des trapèzes avec $2^9 + 1 = 513$ points) :

n		n	
0	$-2,166\ 666\ 666\ 666\ 666\ 67$	5	$-1,950\ 218\ 328\ 171\ 334\ 13$
1	$-1,960\ 317\ 460\ 317\ 460\ 32$	6	$-1,950\ 218\ 327\ 043\ 278\ 47$
2	$-1,950\ 868\ 010\ 868\ 010\ 87$	7	$-1,950\ 218\ 327\ 041\ 202\ 17$
3	$-1,950\ 237\ 373\ 546\ 188\ 06$	8	$-1,950\ 218\ 327\ 041\ 200\ 85$
4	$-1,950\ 218\ 555\ 800\ 778\ 17$	9	$-1,950\ 218\ 327\ 041\ 200\ 85$

Les dernières valeurs obtenues sont les mêmes que la valeur "exacte" (et coïncide avec la valeur suivante). L'algorithme semble très efficace.

Remarque : on montre assez facilement que la première étape de l'algorithme de *Richardson–Romberg* appliqué à la méthode des trapèzes, est l'approximation de *Simpson* pour laquelle on sait majorer le terme d'erreur (il est majoré en valeur absolue, dans le cas de l'intégration sur $[a, b]$ d'une fonction f dont la dérivée quatrième est majorée en module, sur $[a, b]$, par M, et dans le cas d'un découpage régulier de $[a, b]$ en n intervalles de même longueur, par $\dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}M$).



CAPES interne de Mathématiques
session 1997
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag41e]

On considère un plan euclidien (P) muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans un deuxième plan euclidien (P') on prend deux points distincts A et A', I est le milieu de [A'A] et on pose $A'A = 2a$. (Δ') et (Δ) sont les droites de (P') perpendiculaires à la droite (A'A) respectivement en A' et A. On appelle $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{A'A}$ et $\vec{v}$ celui des droites (Δ) et (Δ'). Le repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormal direct.

On définit une application f de (P) dans l'ensemble $\mathcal{D}'$ des droites de (P') de la façon suivante : Si m est un point de (P) de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, on considère les points M de (Δ) et M' de (Δ') tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{v}$ et $\overrightarrow{A'M'} = y\vec{v}$, on pose $f(m) = (MM')$.

Voir figures en page 6.

A

Points et droites

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que les images des points de l'axe $(O, \vec{i})$ passent par A' et que celles des points de l'axe $(O, \vec{j})$ passent par A.
3. Montrer que les images des points de la seconde bissectrice du repère $\mathcal{R}$ passent par I.
4. Montrer que les images des points de la première bissectrice du repère $\mathcal{R}$ sont parallèles à (AA').
5. Montrer que toute droite de (P') non parallèle à (Δ) est image d'un point unique de (P).
6. On considère dans (P) une droite (d) non parallèle à la première bissectrice du repère $\mathcal{R}$ et distincte des axes. Elle coupe les axes de $\mathcal{R}$ respectivement en b et c. On appelle B l'intersection de (Δ) et de $f(b)$, C' celle de (Δ') et de $f(c)$, K celle de $f(b)$ et de $f(c)$.

   Soit m un point de (d). Montrer que : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{M'C'}}{\overline{M'A'}} = \dfrac{\overline{mc}}{\overline{mb}}$. En déduire que $f(m)$ passe par K. (Les notations sont celles de l'introduction.)
7. Réciproquement soit K un point de (P'), M et M' des points de (Δ) et (Δ') respectivement tels que (MM') passe par K. (MM') est l'image d'un point m de (P). Montrer que m appartient à une droite de (P) notée (δ_K). On définit ainsi une application g de (P') dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites de (P) en posant $g(K) = (\delta_K)$.
8. Déterminer g (I), g (A), g (A'), g (D) si D appartient à la médiatrice de [A'A].
9. L'énoncé suivant : « les images par f (ou g) de points alignés sont des droites concourantes » est-il exact ?

B

($\mathcal{C}$) est le cercle de diamètre [AA'] dans le plan (P'), K un point de ($\mathcal{C}$) distinct de A et A'. La tangente en K à ($\mathcal{C}$) coupe (Δ) en C et (Δ') en C'.

1.*a.* Montrer que le triangle ICC' est rectangle et en déduire que $\overline{AC} \cdot \overline{A'C'} = a^2$.

b. Énoncer et démontrer la réciproque du résultat précédent.

c. (CC') est l'image par f d'un point c du plan P. Montrer que c appartient à une hyperbole équilatère $(\mathcal{H}_a)$ dont on déterminera l'équation dans le repère $\mathcal{R}$.

d. Réciproquement soit c un point de $(\mathcal{H}_a)$. Montrer que $f(c)$ est tangente à ($\mathcal{C}$).

2. Dans la suite on admettra la propriété suivante des coniques : « une droite est tangente à une conique si et seulement si elle admet un point commun et un seul avec celle-ci, sauf dans les deux cas suivants où le deuxième point d'intersection est à l'infini : droite parallèle à une asymptote d'une hyperbole, droite parallèle à l'axe d'une parabole ».

   a. Montrer que la droite g (K) dans (P) est tangente à $(\mathcal{H}_a)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

   b. La droite (AK) coupe (Δ') en Q', la droite (A'K) coupe (Δ) en Q. Montrer que C est milieu de [AQ] et C' milieu de [A'Q'].

   c. Quels sont les points p et q de (P) tels que $f(p) = $ (A'Q) et $f(q) = $ (AQ') ? (On remarquera que g (K) = (pq).)

   d. Déduire de ce qui précède que dans (P) c est milieu de $[pq]$. On retrouve ainsi une propriété classique de la tangente à une hyperbole que l'on énoncera avec précision.

3. L'affinité orthogonale.

   Soit k un réel non nul, on rappelle que l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport k est la transformation $\tau_{D,k}$ du plan euclidien qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que :
   - la droite (MM') est perpendiculaire à (D) ;
   - si H_M est le pied de la perpendiculaire issue de M à (D), on a $\overline{H_M M'} = k\,\overline{H_M M}$.

   a. Montrer que $\tau_{D,k}$ est une bijection du plan euclidien et que $\tau_{D,k}^{-1} = \tau_{D,\frac{1}{k}}$.

   b. Montrer que le transformé d'une droite non parallèle à (D) est une droite et que leur point d'intersection est sur (D).

   c. Montrer que le transformé d'un cercle centré sur (D) est une ellipse dont (D) est l'un des axes.

   On admettra que l'affinité orthogonale conserve les contacts (une courbe et sa tangente sont transformées en une courbe et sa tangente). Déduire de cette propriété et de celle démontrée en 2.*b*. une méthode de construction de la tangente en un point à une ellipse donnée par ses sommets et ce point.

4. On considère dans le plan (P) l'homothétie $h_{(O,k)}$ de centre O et de rapport k. L'affinité $\tau_{(AA'),k}$ sera interprétée comme une transformation de l'ensemble des droites de (P').

   Montrer que $f \circ h_{(O,k)} = \tau_{(AA'),k} \circ f$.

5. On considère dans le plan (P) l'hyperbole équilatère $(\mathcal{H}_b)$ d'équation $x.y = b^2$, $b \in \mathbb{R}^+ - \{0, a\}$. Soit c un point quelconque de $(\mathcal{H}_b)$. Montrer que $f(c)$ est tangente à une ellipse $(\mathcal{E}_b)$ dont on donnera les axes. Préciser sur quel axe sont les foyers suivant la valeur de b.

6. La tangente à $(\mathcal{H}_b)$ en c coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en p et l'axe $(O, \vec{j})$ en q. Avec les notations précédentes on a :

$$f(c) = (CC') \qquad f(p) = (A'N) \qquad f(q) = (AN')$$

   avec C, N sur (Δ) et C', N' sur (Δ').

   (i) Montrer que ces trois droites sont concourantes en K et que K $\in (\mathcal{E}_b)$.

   (ii) Montrer que C est le milieu de [AN] et C' le milieu de [A'N'].

7. Réciproquement on considère dans le plan (P') l'ellipse $(\mathcal{E}_b)$ dont A et A' sont deux sommets et dont l'autre axe est de demi-longueur b. Soit K un point de $(\mathcal{E}_b)$ distinct de A et A'. La tangente en K à $(\mathcal{E}_b)$ coupe (Δ) en C et (Δ') en C' ; (A'K) coupe (Δ) en N et (AK') coupe (Δ') en N'. Montrer que (CC') est l'image par f d'un point c de (P) appartenant à l'hyperbole $(\mathcal{H}_b)$ et que g (K) est tangente à $(\mathcal{H}_b)$ en c.

C

1. On considère dans le plan (P′) une hyperbole (Γ) de sommets A et A′ et de foyers F et F′. I est le milieu de [A′A]. On pose IF = IF′ = c. Soit K un point de (Γ) distinct de A et A′. La droite (KA′) coupe (Δ) en N et la droite (KA) coupe (Δ′) en N′. On désigne par M le milieu de [AN] et M′ le milieu de [A′N′] et m le point du plan (P) tel que $f(m) = (MM')$.

   a. Établir l'équation de (Γ) dans (P′) rapporté au repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$.

   b. Montrer que m appartient à l'hyperbole équilatère $(\mathcal{H}_b^*)$ d'équation $xy = -b^2$ où $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

2. Soit dans un plan euclidien un cercle (𝒞) de centre O et de rayon R, un point P et une droite (Δ) passant par P et coupant (𝒞) en M et M′. On montre facilement et on admettra que $\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = PO^2 - R^2$. Ce nombre, indépendant de Δ, s'appelle puissance de P par rapport à (𝒞) et sera noté 𝒞 (P). Ce résultat sera admis dans la suite.

   a. Dans le plan (P) on considère à nouveau l'hyperbole $(\mathcal{H}_b^*)$ du 1.*b*. d'équation $xy = -b^2$. Soit m un point de $(\mathcal{H}_b^*)$ non situé sur la seconde bissectrice des axes. La droite $f(m)$ du plan (P′) coupe (Δ) en M et (Δ′) en M′. Le cercle $(\mathcal{C}_m)$ de diamètre [MM′] recoupe (Δ) en M_1 et la droite (AA′) en F et F′.

      (i) Calculer la puissance $\mathcal{C}_m(A)$ de A par rapport au cercle $(\mathcal{C}_m)$. En déduire que les points F et F′ sont fixes quand m varie et que $c^2 = a^2 + b^2$ où $c = IF = IF'$.

      (ii) On projette F et F′ respectivement en H et H′ sur $f(m)$. (FH) recoupe $(\mathcal{C}_m)$ en H_1.
      - Montrer que les angles ((FH), (FF′)) et ((MM′), (Δ)) sont égaux.
      - Montrer que des angles inscrits égaux sous-tendent des cordes égales.
      - Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{M_1M'}$?
      - Déduire des deux points précédents que $F'H_1 = 2a$, puis que H et H′ appartiennent au cercle de diamètre [AA′].
      - Montrer que $\overline{FH} \cdot \overline{F'H'} = -b^2$.

   b. Dans (P) la tangente en m à $(\mathcal{H}_b^*)$ coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en p et l'axe $(O, \vec{j})$ en q. On a démontré au B.2.*d*. que m est le milieu de $[p, q]$. On sait (question A.6.) que dans (P′) les droites $f(p)$, $f(q)$, $f(m)$ sont concourantes en un point K de coordonnées (X, Y). On sait aussi que (x, y) sont les coordonnées de m, que $f(p)$ passe par A′ et $f(q)$ par A.

      (i) $f(p)$ coupe (Δ) en N et $f(q)$ coupe (Δ′) en N′. Quelles sont les positions relatives des points A, M, N et des points A′, M′, N′ ?

      (ii) Trouver deux expressions différentes liant X, Y, x, y. En déduire que K appartient à l'hyperbole (Γ) de sommets A et A′ et de foyers F et F′.

      (iii) Établir l'équation de la droite $f(m)$ et montrer qu'elle est tangente à l'hyperbole (Γ).

   c. Déduire de ce qui précède les théorèmes suivants :

      (i) dans une hyperbole les projetés des foyers sur une tangente quelconque sont sur le cercle principal (cercle de diamètre les sommets) ;

      (ii) dans une hyperbole le produit des distances algébriques des foyers à une tangente à l'hyperbole est égal à $-b^2$.

   d. Soit l'hyperbole définie par ses sommets et passant par un point K. Proposer une méthode de construction de la tangente en K et des foyers de cette hyperbole.

D

On considère dans le plan (P) l'hyperbole équilatère ($\mathcal{H}$) d'équation $x^2 - y^2 = a^2$.

1. Soit $m \in (\mathcal{H})$, montrer que dans (P′) A se projette orthogonalement sur $f(m)$ en un point H situé sur la médiatrice de [AA′].

2. Soient T le point d'intersection des droites (AA′) et $f(m)$, E le point de $f(m)$ tel que H est le milieu du segment [ET], H_1 le point d'intersection des droites (AH) et (Δ′).

   a. Montrer que H est milieu du segment $[AH_1]$ et que la droite (H_1E) est perpendiculaire à (Δ′).

   b. Montrer que E est un point de la parabole ($\mathcal{P}$) de foyer A et de directrice (Δ′).

3. Soit Q un point de $f(m)$ distinct de E, Q_1 la projection de Q sur (Δ′). Montrer que $QQ_1 < QA$. En déduire que $f(m)$ est tangente à ($\mathcal{P}$).

E

f conserve les contacts

On définit dans (P) l'arc paramétré (γ) ainsi : I est un intervalle de $\mathbb{R}$, φ et ψ deux fonctions de classe C^1, (γ) est l'ensemble des points de coordonnées $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$, $t \in I$. On suppose que (γ) n'a pas de tangente parallèle à la première bissectrice du repère $\mathcal{R}$ et que $\forall t \in I$, $\varphi'(t) \cdot \psi'(t) \neq 0$.

1. Soit $m \in (\gamma)$ de coordonnées $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$. Établir l'équation de la tangente (t_m) en m à (γ).

2. Chercher les coordonnées du point K_m de (P′) tel que $g(K_m) = t_m$.

3. Établir l'équation de la droite $f(m)$ et chercher son enveloppe (Γ) quand m décrit (γ).

4. Montrer que $K_m \in (\Gamma)$.

5. On étend la définition de f aux droites du plan (P) : si (d) est une droite de (P), on appelle $f(d)$ le point de (P′) commun à toutes les droites $f(m)$ où m est un élément de (d). Déduire de ce qui précède que f transforme le point de contact et la tangente d'un arc (γ) en la tangente et le point de contact d'un arc (Γ). On pose $\Gamma = f(\gamma)$.

6. Traduire dans ce langage les résultats des questions précédentes.

(P)

$\vec{j}$

$\vec{i}$

x

y

m

(P′)

(Δ′)

(Δ)

M

x

A′

I

A

y

M′

CAPES interne 1997 de Mathématiques deuxième composition

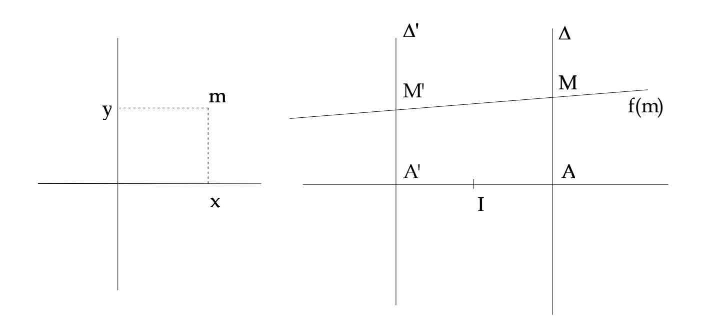
solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag41] v1.00

Solution de la seconde composition du CAPES interne 1997



A.1. $f(O) = (AA')$.

A.2. Si $m \in \left(O, \overrightarrow{i}\right)$, $y = 0$ donc $M' = A'$ et $f(m)$ contient A'. De même les images d'un point m de $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ passeront par A.

A.3. Tout point m de la seconde bissectrice de $\mathcal{R}$ admet des coordonnées de la forme $(x, -x)$, donc $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{v} = -y\overrightarrow{v} = \overrightarrow{M'A'}$. Le quadrilatère $AMA'M'$ sera un parallélogramme et ses diagonales se couperont en leur milieu. I sera milieu de $[MM']$ donc $I \in f(m)$.

A.4. Si $m(x,x)$ alors $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{v} = y\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A'M'}$. $AMM'A'$ sera un parallélogramme et $f(m) = (MM')$ sera parallèle à (AA').

A.5. Toute droite (D) de (P') non parallèle à (Δ) coupe (Δ) (resp. (Δ')) en un point M (resp. M') et il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{A'M'} = y\overrightarrow{v}$. Le point $m(x, y)$ vérifie alors $f(m) = (D)$. Par ailleurs $f(m) = f(m')$ entraîne évidemment $m = m'$.

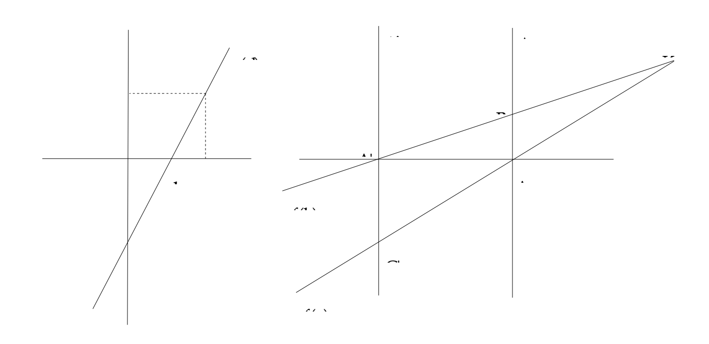


Figure A.6

[0] [ag41] v1.00 Dany-Jack Mercier

A.6. Le Théorème de Thalès dans le plan (P) donne

$$\frac{\overline{mc}}{\overline{mb}} = \frac{-x}{b_1 - x} = \frac{c_2 - y}{-y}$$

où $b\,(b_1, 0)$ et $c\,(0, c_2)$. Comme $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{-x}{b_1 - x}$ et $\frac{\overline{M'C'}}{\overline{M'A'}} = \frac{c_2 - y}{-y}$ on déduit bien les égalités

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'C'}}{\overline{M'A'}} = \frac{\overline{mc}}{\overline{mb}}.$$

L'homothétie h de centre K et de rapport $\frac{\overline{KC'}}{\overline{KA}}$ transforme (Δ) en (Δ'). $\overline{MA} = \frac{\overline{mc}}{\overline{mb}}\overline{MB}$ entraîne

$$\overline{h\,(M)\,C'} = \frac{\overline{mc}}{\overline{mb}}\overline{h\,(M)\,A'}$$

d'où

$$\frac{\overline{h\,(M)\,C'}}{\overline{h\,(M)\,A'}} = \frac{\overline{mc}}{\overline{mb}} = \frac{\overline{M'C'}}{\overline{M'A'}}. \quad (*)$$

On peut supposer que $\frac{\overline{mc}}{\overline{mb}} \neq 1$ (sinon $b = c = O$ entraîne $f\,(b) = f\,(O) = f\,(c)$ et le point K n'est plus défini !). $(*)$ entraîne alors $h\,(M) = M'$ (penser à l'unicité du barycentre) donc $K \in (MM') = f\,(m)$.

NB : Si $O \in (d)$ alors $b = c = O$ et $f\,(b) = f\,(O) = f\,(c)$. Dans ce cas le point K n'est plus défini. Ce cas est à exclure. Si $O \notin (d)$ alors (d) est parallèle à la première bissectrice si, et seulement si, $c = -b$, et cela équivaut à $(A'B)\,//\,(C'A)$, ou encore à la non existence de K. C'est pourquoi l'énoncé suppose que (d) n'est pas parallèle à la première bissectrice.

Le début de la question A.6 est mal libellé puisque la bonne condition à faire sur (d) pour assurer l'existence de K est de choisir (d) non parallèle à la première bissectrice, ne passant pas par O et coupant les axes de $\mathcal{R}$ respectivement en b et c.

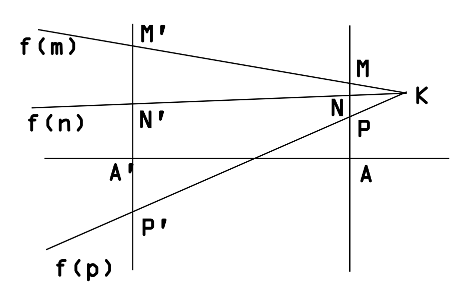


Figure A.7

A.7. Deux autres droites passant par K coupent (Δ) et (Δ') resp. en N et N' ; et en P et P'. Notons m, n, p les points de (P) tels que $f\,(m) = (MM')$, $f\,(n) = (NN')$ et $f\,(p) = (PP')$. Il s'agit de montrer que $m \in (np)$. Supposons $m \notin \{n, p\}$ sinon le résultat est trivial. Alors les droites $f\,(m)$, $f\,(n)$ et $f\,(p)$ sont distinctes.

• Si $K \notin (\Delta) \cup (\Delta')$, alors l'on aura soit M, N, P distincts deux à deux, soit M', N', P' distincts deux à deux. Supposons par exemple que les points M, N, P soient distincts deux à deux. Le Théorème de Thalès donne

$$\frac{\overline{P'M'}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{N'K}}{\overline{NK}} = \frac{\overline{P'N'}}{\overline{PN}}.$$

En notant systématiquement (x_m, y_m) les coordonnées de m, etc, on obtient, compte tenu de la définition de f :

$$\frac{y_m - y_p}{x_m - x_p} = \frac{y_n - y_p}{x_n - x_p}$$

ce qui signifie bien que $m \in (np)$. Par conséquent $g(K) = (\delta_K) = (np)$.

• Si $K \in (\Delta)$, notons $\overline{AK} = \alpha$. Alors $M = N = P = K$ et $x_m = x_n = x_p = \alpha$. Les trois points m, n, p appartiennent à la droite de (P) d'équation $x = \alpha$.

• Si $K \in (\Delta')$, notons $\overline{A'K} = \beta$. Alors $M' = N' = P' = K$ et $y_m = y_n = y_p = \beta$. Les trois points m, n, p appartiennent à la droite de (P) d'équation $y = \beta$.

A.8. $g(I) = (Om)$ où $m(x, -x)$ donc $g(I)$ est la seconde bissectrice. On vérifie que $g(A) = (Oy)$ et $g(A') = (Ox)$. Enfin $g(D) = (mn)$ où $m(0, a)$ et $n(a, 0)$ (faire un dessin). $g(D)$ est donc la parallèle à la seconde bissectrice passant par $m(0, a)$.

A.9. L'énoncé est faux puisque :

- g transforme les points D de la médiatrice de $[AA']$ en des droites parallèles.

- Les points $m(0, 1)$, $n(1, 2)$ et $p(2, 3)$ sont alignés sur la droite $y = x + 1$ et pourtant les droites $f(m)$, $f(n)$, $f(p)$ sont parallèles (faire un dessin).

On peut cependant rendre l'affirmation valide en remplaçant "concourantes" par "concourantes ou parallèles". Montrons par exemple :

Proposition : Les images de 3 points alignés par f sont trois droites concourantes ou parallèles.

preuve : Si m, n, p sont alignés, notons $f(m) = (MM')$, $f(n) = (NN')$ et $f(p) = (PP')$.

• Premier cas : Les points M, N, P sont distincts deux à deux ainsi que les points M', N', P'. L'alignement de m, n, p entraîne

$$\frac{\overline{P'M'}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{P'N'}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}}.$$

a) Si $f(m)$ coupe $f(n)$ en K, alors $K \notin \Delta$ (sinon $M = N$, rejeté par hypothèse). Un raisonnement utilisant l'homothétie de centre K transformant M en M' montre que $f(p)$ passe par K, comme à la question **A.6**).

b) Si $f(m)$ est parallèle à $f(n)$, $\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = 1$ donc $\frac{\overline{P'N'}}{\overline{PN}} = 1$ et les trois droites $f(m)$, $f(n)$, $f(p)$ seront parallèles.

• Second cas : Certains des points M, N, P ou bien M', N', P' sont confondus. Si par exemple $M = N$, alors m et n sont sur une même droite verticale, et p aussi donc $M = N = P$. Les trois droites $f(m)$, $f(n)$, $f(p)$ concourent alors en M).

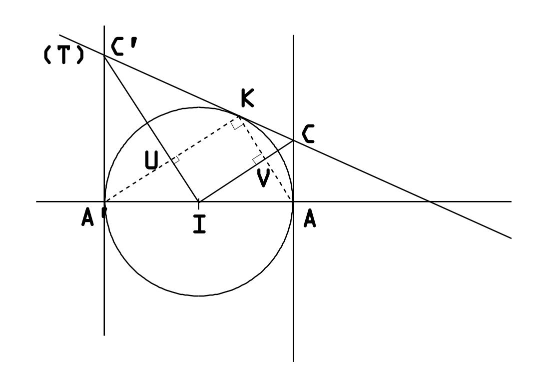


Fig. B.1.a

B.1.a. Les points A' et K sont les deux points de contact des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ menées de C'. Ils sont donc symétriques par rapport à (IC') et $(A'K) \perp (IC')$. De même $(AK) \perp (IC)$. Avec les notations de la figure ci-dessus, le quadrilatère $UIVK$ possède 3 angles droites donc est un rectangle, et ICC' est rectangle en I.

Comme K est le pied de la hauteur issue de I du triangle rectangle ICC', on trouve $IK^2 = KC.KC'$. Comme par symétrie $AC = KC$ et $A'C' = KC'$, on déduit $a^2 = AC.A'C'$, ou encore $\overline{AC}.\overline{A'C'} = a^2$ puisque $\overline{AC}$ et $\overline{A'C'}$ sont toujours du même signe.

NB : On aurait aussi pu écrire

$$\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'C'}\right) = -a^2 + \overline{AC}.\overline{A'C'} \quad (*)$$

de sorte que $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'} = 0$ soit équivalent à $\overline{AC}.\overline{A'C'} = a^2$.

B.1.b. Enonçons la réciproque : "Toute droite (T) coupant les droites (Δ) et (Δ') respectivement en C et C' tels que $\overline{AC}.\overline{A'C'} = a^2$ est tangente à $\mathcal{C}$".

preuve : D'après $(*)$, $\overline{AC}.\overline{A'C'} = a^2$ entraîne $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'} = 0$ et le triangle ICC' est rectangle en I.

• **Première solution** : On utilise des relations métriques dans les triangles rectangles. Soit K le pied de la hauteur issue de I du triangle ICC'. On a

$$IK \times CC' = IC \times IC'. \quad (\natural)$$

Notons $\overline{AC} = x > 0$ (on peut choisir l'orientation de Δ pour que ce nombre soit positif). Le Théorème de Pythagore donne

$$CC'^2 = AA'^2 + \left(\overline{A'C'} - \overline{AC}\right)^2 = (2a)^2 + \left(x - \frac{a^2}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2$$

mais aussi $IC = \sqrt{a^2 + x^2}$ et $IC' = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2}{x}\right)^2} = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 + x^2}$. En remplaçant dans $(\natural)$, on trouve

$$IK \times \left(x + \frac{a^2}{x}\right) = \frac{a}{x}\left(a^2 + x^2\right)$$

soit $IK = a$. Finalement $K \in \mathcal{C}$ et (IK) est perpendiculaire à (CC'), donc (CC') est bien la tangente à $\mathcal{C}$ menée de K.

• **Seconde solution** : Raisonnons analytiquement en nous plaçant dans le repère $\left(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{IA}}{\|\overrightarrow{IA}\|}$, et en posant $\overline{A'C'} = \alpha > 0$ (quitte à changer $\overrightarrow{j}$ de sens). On a $\overline{AC} = \frac{a^2}{\alpha}$, donc $C\left(a, \frac{a^2}{\alpha}\right)$ et $C'(-a, \alpha)$. Une équation de (CC') sera $y = \frac{\alpha - \frac{a^2}{\alpha}}{-2a}(x-a) + \frac{a^2}{\alpha}$, ou encore $\frac{a^2-\alpha^2}{2a\alpha}x - y + \frac{a^2+\alpha^2}{2\alpha} = 0$. La distance de I à la droite (CC') sera donc

$$d = \frac{\left|\frac{a^2+\alpha^2}{2\alpha}\right|}{\sqrt{\left(\frac{a^2-\alpha^2}{2a\alpha}\right)^2 + 1}} = a,$$

ce qui prouve bien que $(T) = (CC')$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

B.1.c. Le point $c(x, y)$ vérifie $f(c) = (CC')$ si, et seulement si, $x = \overline{AC}$ et $y = \overline{A'C'}$. La question précédente prouve que $xy = \overline{AC}.\overline{A'C'} = a^2$ autrement dit que c appartient à l'hyperbole équilatère $(\mathcal{H}_a)$ d'équation $xy = a^2$.

B.1.d. Si $c(x,y) \in (\mathcal{H}_a)$ alors $xy = \overline{AC}.\overline{A'C'} = a^2$ et $f(c)$ coupera (Δ) et (Δ') respectivement en C et C' tels que $x = \overline{AC}$ et $y = \overline{A'C'}$. Par suite $\overline{AC}.\overline{A'C'} = a^2$ et B.1.b montre que (CC') est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en K.

B.2.a. • On sait, d'après la question **A.7**, que $g(K) = (cd)$ où c et d sont des points de (P) vérifiant

$$f(c) = \left(CC'\right),\ f(d) = \left(DD'\right),\ C, D \in (\Delta),\ C', D' \in \left(\Delta'\right) \text{ et } \left(CC'\right) \cap \left(DD'\right) = \{K\}.$$

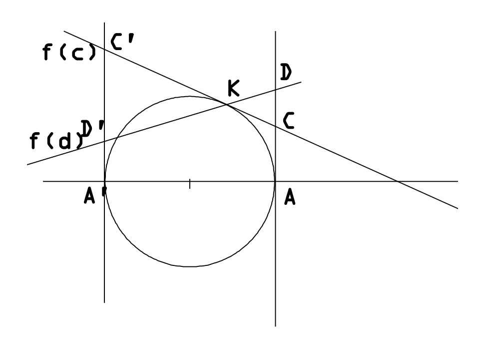


Figure B.2.a

On peut décider que (CC') soit la tangente à $\mathcal{C}$ en K, de sorte que $c \in (\mathcal{H}_a)$ d'après B.1.c.

• La droite $g(K)$ coupe $\mathcal{H}_a$ en au moins le point c. Comme $g(K)$ n'est pas parallèle à l'un des axes du repère de (P) (cela entraînerait c et d de même abscisses (ou ordonnées) et la figure ci-dessus montrerait alors $(CC') = (DD')$, absurde), montrer que $g(K)$ est tangente à $\mathcal{H}_a$ revient à prouver que $g(K)$ coupe $\mathcal{H}_a$ en un seul point.

• $g(K)$ n'est pas parallèle à la première bissectrice (sinon $g(K)$ admettrait une équation de la forme $y = x + cte$, les points $c(c_1, c_2)$ et $d(d_1, d_2)$ vérifieraient $c_2 = c_1 + cte$ et $d_2 = d_1 + cte$,

et les droites (CC') et (DD') seraient parallèles, ce qui est absurde) et ne contient pas O (sinon $g(K)$ admettrait une équation de la forme $y = kx$ (ou $x = ky$), les points $c(c_1, c_2)$ et $d(d_1, d_2)$ vérifieraient $c_2 = kc_1$ et $d_2 = kd_1$, et les droites (CC') et (DD') ne pourraient pas se couper en un point K dans la bande formée par les deux droites parallèles Δ et Δ').de sorte qu'on puisse appliquer la question **A.6**).

• Par l'absurde : si $g(K)$ coupait $\mathcal{H}_a$ en 2 points distincts c et d, on aurait $K \in f(c) \cap f(d)$ d'après la question **A.6**. La question **B.1.d** montre que $f(c)$ et $f(d)$ sont toutes les deux tangentes à $\mathcal{C}$, et cela ne peut être qu'en K. Cela entraîne $f(c) = f(d)$, puis $c = d$ puisque f est injective. Absurde.

B.2.b. On a montré l'orthogonalité $(IC) \perp (AK)$ en **B.1.a.** Comme $(A'K) \perp (AK)$, la droite (IC) sera parallèle à $(A'K)$ et l'on peut appliquer la réciproque du Théorème de Thalès : I est le milieu de $[AA']$, donc C sera le milieu de $[AQ]$. On montrerait de même que C' est le milieu de $[A'Q']$.

Figure B.2.b :

B.2.b. On a montré l'orthogonalité $(IC) \perp (AK)$ en **B.1.a.** Comme $(A'K) \perp (AK)$, la droite (IC) sera parallèle à $(A'K)$ et l'on peut appliquer la réciproque du Théorème de Thalès : I est le milieu de $[AA']$, donc C sera le milieu de $[AQ]$. On montrerait de même que C' est le milieu de $[A'Q']$.

B.2.c. Soit $p \in (Ox)$ tel que $f(p) = (A'Q)$, et soit $q \in (Oy)$ tel que $f(q) = (AQ')$. Comme $f(p)$, $f(q)$ et $f(c) = (CC')$ concourent en K, A.7 entraîne $p, q, c \in g(K)$. On sait aussi que $c \in \mathcal{H}_a$ et que $g(K)$ est la tangente à $\mathcal{H}_a$ en c. En conclusion les points p et q sont les intersections de la tangente en c à $\mathcal{H}_a$ avec les axes de coordonnées.

B.2.d. Sachant que C milieu de $[AQ]$ et C' milieu de $[A'Q']$, on aura $x_p = 2x_c$ et $y_q = 2y_c$. Comme $p(x_p, 0)$ et $q(0, y_q)$ on déduit

$$\begin{cases} x_c = \frac{x_p+0}{2} \\ y_c = \frac{0+y_q}{2} \end{cases} \Rightarrow c \text{ milieu de } [pq].$$

Comme $g(K)$ est la tangente à $\mathcal{H}_a$ en c, et comme $g(K)$ coupe les axes de coordonnées en p et q, la propriété classique concernant les hyperboles que l'on vient de montrer est :

Propriété : La tangente à $\mathcal{H}_a$ en c coupe les asymptotes (Ox) et (Oy) de $\mathcal{H}_a$ en p et q tels que c soit le milieu de $[pq]$.

B.3.a. En traduisant l'égalité $\overrightarrow{H_M M'} = k\overrightarrow{H_M M}$ dans un repère dont le premier axe serait (D), on obtient l'expression analytique de $\tau_{D,k}$:

$$\begin{pmatrix} x' - x \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - x \\ y \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \quad (*)$$

Il est alors facile de voir que $\tau_{D,k}$ est bijective. En effet, pour tout $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ il existe un unique couple (x,y) tel que $(*)$ soit vraie.

Remarque : On obtient une autre solution, plus géométrique, en notant que pour tout M, l'image $M' = \tau_{D,k}(M)$ appartient à la perpendiculaire (D') à (D) passant par M (et M'). Si M' est un point quelconque du plan, les seuls antécedents possibles à M seront donc sur cette perpendiculaire (D'). Ensuite on remarque que, restreinte à (D'), l'affinité $\tau_{D,k}$ coïncide avec l'homothétie de centre H_M et de rapport $k \neq 0$. Une telle homothétie étant bijective, on trouvera un et un seul antécédent à M' par $\tau_{D,k}$.

B.3.b. Soit A l'intersection de (D) et d'une droite (Δ). Si $M, N \in (\Delta) \setminus \{A\}$ on a

$$\overrightarrow{H_M M'} = k\overrightarrow{H_M M} \text{ et } \overrightarrow{H_N N'} = k\overrightarrow{H_N N}.$$

L'homothétie h de centre A transformant H_M en H_N transformera M en un point $h(M)$ situé à la fois sur (AM) et sur l'image $h((H_M M))$ de la droite $(H_M M)$ par h. On sait que $h((H_M M))$ est la droite passant par H_N et parallèle à $(H_M M)$. Donc $h((H_M M)) = (H_N N)$ et l'on aura (faire un dessin) :

$$h(M) \in (AM) \cap (H_N N) \Rightarrow h(M) = N.$$

Comme h est une application affine,

$$\overrightarrow{H_M M'} = k\overrightarrow{H_M M} \Rightarrow \overrightarrow{H_N h(M')} = k\overrightarrow{H_N N} = \overrightarrow{H_N N'} \Rightarrow h(M') = N'.$$

On a prouvé que A, M' et N' étaient alignés. Ainsi pour tout $N \in (\Delta) = (AM)$ on a $\tau_{D,k}(M) \in (AM')$, soit $\tau_{D,k}((\Delta)) \subset (\Delta')$ où l'on a posé $(\Delta') = (AM')$. Réciproquement, le sens direct montre que $\tau_{D,\frac{1}{k}}((\Delta')) \subset (\Delta)$ d'où en appliquant $\tau_{D,k}$ des deux côtés de cette inclusion, $(\Delta') \subset \tau_{D,k}((\Delta))$. En conclusion

$$\tau_{D,k}((\Delta)) = (\Delta') \text{ et } (\Delta) \cap (\Delta') = \{A\}.$$

B.3.c. On a déjà donné l'expression analytique de $\tau_{D,k}$ dans un repère adapté. C'est

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky. \end{cases}$$

Si $\mathcal{C}$ est le cercle d'équation $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ (centré sur (D)) alors $\tau_{D,k}(\mathcal{C})$ sera la courbe d'équation

$$(x' - x_0)^2 + \frac{y'^2}{k^2} = R^2$$

et l'on reconnaît une ellipse dont un axe est (D) et centrée en $(x_0, 0)$.

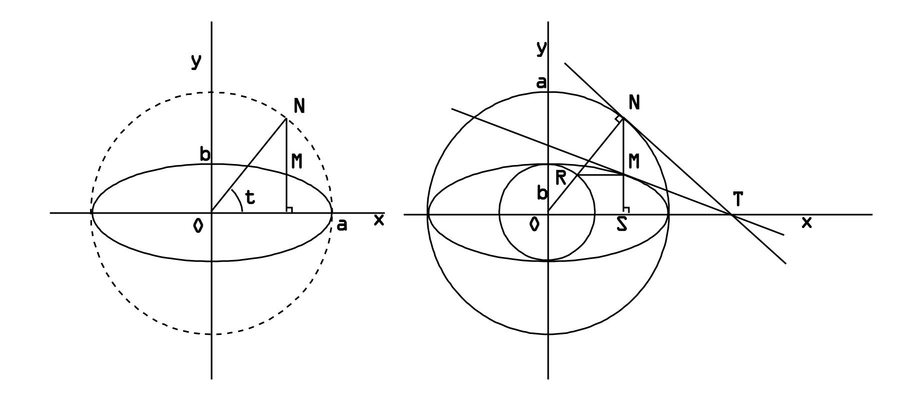


Fig. B.3.c

Application : Construction d'une ellipse par points et tangentes.
Notons $\tau_{D,k} = \tau$ l'affinité transformant le cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}_a$ de centre O et de rayon a en l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ici $k = \frac{b}{a}$. Si N appartient au cercle principal $\mathcal{C}_a$, le segment $[ON]$ coupe le cercle secondaire $\mathcal{C}_b$ en R (cf. fig.ci-dessus). Si S désigne le projeté orthogonal de N sur l'axe Ox, le point M d'intersection de (NS) et de la parallèle à (OS) passant par R vérifie, d'après le Théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{ON}} = \frac{b}{a}$$

donc $M = \tau(N) \in \mathcal{E}$. On sait qu'une droite D est tangente à l'ellipse si, et seulement si, elle la coupe en un et un seul point. f est une bijection affine, donc transforme la tangente en N au cercle principal en une droite coupant l'ellipse en un seul point M, i.e. en la tangente à $\mathcal{E}$ en M. La construction de cette tangente est facile si l'on fait intervenir le point d'intersection T de l'axe Ox et de la tangente à $\mathcal{C}_a$ en M. T est invariant par f donc $f(MT) = (NT)$ représente la tangente en N à $\mathcal{E}$.

B.4. Si $m(x,y)$ alors $h_{0,k}(m) = (km, ky)$ et $f(h_{0,k}(m)) = (NN')$ où l'on définit $\overrightarrow{AN} = kx\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{A'N'} = ky\overrightarrow{v}$.
$\tau_{AA',k} \circ f(m)$ est la droite $(\tau_{AA',k}(M)\,\tau_{AA',k}(M'))$ où $f(m) = (MM')$, autrement dit où $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{A'M'} = y\overrightarrow{v}$. Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A\tau_{AA',k}(M)} &= k\overrightarrow{AM} = kx\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow \tau_{AA',k}(M) = N \\ \overrightarrow{A'\tau_{AA',k}(M')} &= k\overrightarrow{A'M'} = ky\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A'N'} \Rightarrow \tau_{AA',k}(M') = N'. \end{aligned}$$

Par suite

$$\forall m \quad f \circ h_{0,k}(m) = \tau_{AA',k} \circ f(m)$$

i.e. $f \circ h_{0,k} = \tau_{AA',k} \circ f$.

B.5. $h_{0,k}$ est donnée par

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

si bien que $xy = b^2$ équivale à $x'y' = k^2b^2$. Si l'on prend $k = \frac{a}{b}$ on trouve

$$c\,(x,y) \in \mathcal{H}_b \Leftrightarrow h_{0,k}\,(c) \in \mathcal{H}_a \underset{\text{B.1}}{\Rightarrow} f\,(h_{0,k}\,(c)) \text{ tangente à } \mathcal{C}.$$

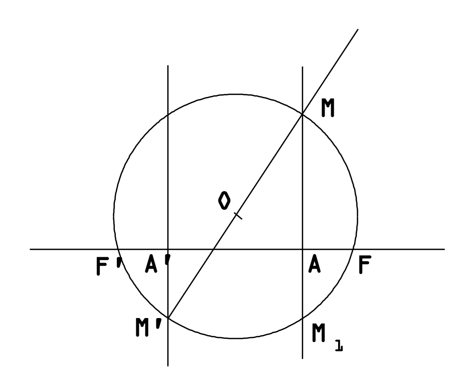
B.4 montre alors que $\tau_{AA',k} \circ f\,(c)$ est une tangente de $\mathcal{C}$. Comme l'affinité conserve les contacts, $f\,(c) = \tau_{AA',\frac{1}{k}}\left(\tau_{AA',k} \circ f\,(c)\right)$ sera tangente à l'ellipse $\tau_{AA',\frac{1}{k}}\,(\mathcal{C}) = \mathcal{E}_b$. Les axes de $\mathcal{E}_b$ sont $(I, \overrightarrow{u})$ et $(I, \overrightarrow{v})$. Comme $\mathcal{E}_b = \tau_{AA',\frac{b}{a}}\,(\mathcal{C})$, on aura

$$\begin{aligned} b &< a \Rightarrow \text{ l'axe focal est } (I, \overrightarrow{u}) \text{ et les foyer sont sur cet axe,} \\ b &> a \Rightarrow \text{ l'axe focal est } (I, \overrightarrow{v}) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{aligned}$$

NB : Une équation de $\mathcal{E}_b$ est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

B.6. à C.1.b inclus : Voir manuscrit pages 8.1 à 8.3.

C.2.a (i)



Ici $\mathcal{H}_b : xy = -b^2$ et $m\,(x_m, y_m) \in \mathcal{H}_b$ avec $x_m + y_m \neq 0$. La puissance de A par rapport au cercle $\mathcal{C}_m$ est :

$$\mathcal{C}_m\,(A) = \overline{AM_1}.\overline{AM} = \overline{AF}.\overline{AF'} = AO^2 - OM^2.$$

On a

$$M\,(a, x_m) \text{ et } M'\,(-a, y_m) \Rightarrow O\left(0, \frac{x_m + y_m}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} AO^2 = a^2 + \frac{1}{4}\,(x_m + y_m)^2 \\ OM^2 = a^2 + \frac{1}{4}\,(x_m - y_m)^2 \end{cases}$$

d'où

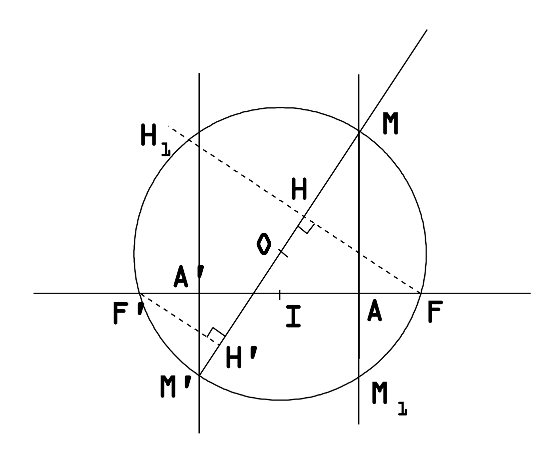
$$\mathcal{C}_m\,(A) = AO^2 - OM^2 = \frac{1}{4}\left[(x_m + y_m)^2 - (x_m - y_m)^2\right] = x_m y_m = -b^2.$$

Comme I est milieu de $[AA']$ et O est milieu de $[MM']$, la droite (OI) sera parallèle à Δ, et donc perpendiculaire à la corde $[FF']$. Par suite I sera aussi le milieu de $[FF']$. Les abscisses c et c' de F et F' vérifieront

$$\begin{cases} c' = -c \\ \mathcal{C}_m\,(A) = \overline{AF}.\overline{AF'} = (c - a)\,(c' - a) = -b^2 \end{cases}$$

d'où $c^2 = a^2 + b^2$. En conclusion les points F et F' seront fixes quand m varie et l'on aura $F\,(c, 0)$, $F'\,(-c, 0)$ et $c^2 = a^2 + b^2$.

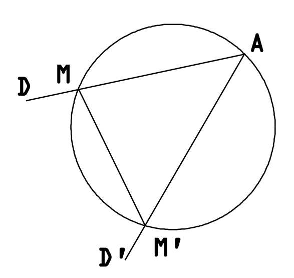
C.2.a (ii)



•

$$\left.\begin{array}{l}(FH)\perp(MM')\\(FF')\perp\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow\left((FH),(FF')\right)=\left((MM'),\Delta\right)\ (\pi).$$

• Des angles inscrits égaux sous-tendent des cordes égales : en effet dans la figure ci-dessous l'angle inscrit est $(D,D')=\theta\ (\pi)$ et la corde sous-tendue est $[MM']$.



On a

$$\frac{MM'}{\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)\right|}=2R$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle AMM'. Comme $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)=\theta\ (\pi)$, on déduit $MM'=2R\left|\sin\theta\right|$ qui est bien indépendante du choix de A sur le cercle. Dans notre problème, on déduit $F'H_1=M'M_1$.

• Le triangle MM_1M' est rectangle en M_1 car M_1 appartient au cercle de diamètre $[MM']$. Comme $(MM_1)\perp(AA')$ on déduit le parallélisme $(AA')\,//\,(M'M_1)$. Par hypothèse $(M'A')$ est parallèle à (AM_1), et donc $AM_1M'A'$ sera un parallélogramme. Comme il possède un angle droit en M_1, ce sera un rectangle. En conclusion $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{M_1M'}$.

• D'après ce qui précède : $F'H_1=M'M_1=AA'=2a$.

• Comme H est milieu de $[FH_1]$ et I est milieu de $[FF']$, le Théorème de Thalès donne

$$IH = \frac{F'H_1}{2} = \frac{AA'}{2}$$

et prouve que H appartient au cercle de diamètre $[AA']$. On raisonnerait de même avec l'intersection H_1' de $(F'H')$ et du cercle $\mathcal{C}_m$ pour prouver que H' appartient aussi au cercle de diamètre $[AA']$.

• En utilisant la puissance de M, puis de M', par rapport au cercle de diamètre $[AA']$, on trouve

$$\begin{cases} \overline{MA}^2 = \overline{MH}.\overline{MH'} \\ \overline{M'A'}^2 = \overline{M'H}.\overline{M'H'} \end{cases}$$

soit, en faisant le produit membre à membre,

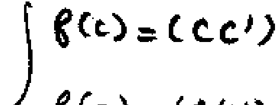
$$\begin{aligned} b^4 &= \overline{MH}.\overline{MH'}.\overline{M'H}.\overline{M'H'} = \left(\overline{OH} - \overline{OM}\right)\left(\overline{OH'} - \overline{OM}\right)\left(\overline{OH} - \overline{OM'}\right)\left(\overline{OH'} - \overline{OM'}\right) \\ &= \left(OH^2 - OM^2\right)\left(OH'^2 - OM^2\right) \\ &= \left(OF^2 - FH^2 - OM^2\right)\left(OF'^2 - F'H'^2 - OM^2\right) \quad \text{(d'après Pythagore)} \\ &= \left(\overline{FH}.\overline{F'H'}\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{FH}.\overline{F'H'} = \pm b^2$. Comme F et F' n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (MM'), on aura bien $\overline{FH}.\overline{F'H'} = -b^2$.

B.6

- D'après la prop. classique des tangentes à une hyperbole, c est milieu de $[pq]$.
Donc si $c(x_c, y_c)$, alors $p(2x_c, 0)$ et $q(0, 2y_c)$.

Comme on a posé :



$$\begin{cases} f(c) = (CC') \\ f(p) = (A'N) \\ f(q) = (AN') \end{cases} \qquad \begin{matrix} C, N \in \Delta \\ C', N' \in \Delta' \end{matrix}$$

on aura :

$$\left.\begin{matrix} \overline{AC} = x_c \\ \overline{AN} = x_p = 2x_c \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \text{ milieu de } [AN]$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{A'C'} = y_c \\ \overline{A'N'} = y_q = 2y_c \end{matrix}\right\} \Rightarrow C' \text{ milieu de } [A'N']$$

d'où le (ii).

- A.6 prouve que les droites $f(c)$, $f(p)$, $f(q)$ sont concourantes en un point K.
et l'on sait que $f(c)$ est une tangente à l'ellipse $\mathcal{E}_b : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ d'après B.5. On vérifie analytiquement que $K \in \mathcal{E}_b$, d'où (i).

- Vérification : $K \in \mathcal{E}_b$:

$$C\begin{pmatrix} a \\ x_c \end{pmatrix} \quad C'\begin{pmatrix} -a \\ \frac{b^2}{x_c} \end{pmatrix} \quad A'\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad N\begin{pmatrix} a \\ 2x_c \end{pmatrix}$$ donc

$$\begin{cases} (CC') : \ y = \dfrac{\frac{b^2}{x_c} - x_c}{-2a}(x - a) + x_c \\ (A'N) : \ y = \dfrac{2x_c}{2a}(x + a) \end{cases}$$

et K est à l'intersection de ces 2 droites, donc $K(x, y)$ vérifie

$$y = \frac{x_c}{a} x + x_c = \frac{x_c - \frac{b^2}{x_c}}{2a}(x-a) + x_c$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{b^2 - x_c^2}{b^2 + x_c^2} \\ y = \dfrac{2b^2 x_c}{b^2 + x_c^2} \end{cases}$$

soit $K\begin{pmatrix} a\,\dfrac{b^2-x_c^2}{b^2+x_c^2} \\ \dfrac{2b^2x_c}{b^2+x_c^2}\end{pmatrix}$, et il est facile de vérifier que les coordonnées de K vérifient l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ de $\mathcal{E}_b$:

$$\frac{x_K^2}{a^2} + \frac{y_K^2}{b^2} = \frac{(b^2-x_c^2)^2}{(b^2+x_c^2)^2} + \frac{4b^2x_c^2}{(b^2+x_c^2)^2} = 1$$

Conclusion : $\boxed{K \in \mathcal{E}_b}$

B.7

- On utilise B.1 et B.4 ; soit $S = \tau_{AA', \frac{a}{b}}(K) \in \mathcal{C}$.
(CC') $= f(c)$ est tgte en K à $\mathcal{E}_b$, donc

$$\tau_{AA', \frac{a}{b}}((CC')) = \tau_{AA', \frac{a}{b}} \circ f(c)$$

sera tangente au cercle $\mathcal{C}$ en S. Cette droite s'écrit aussi (B.4) :

$$f \circ h_{o, \frac{a}{b}}(c)$$

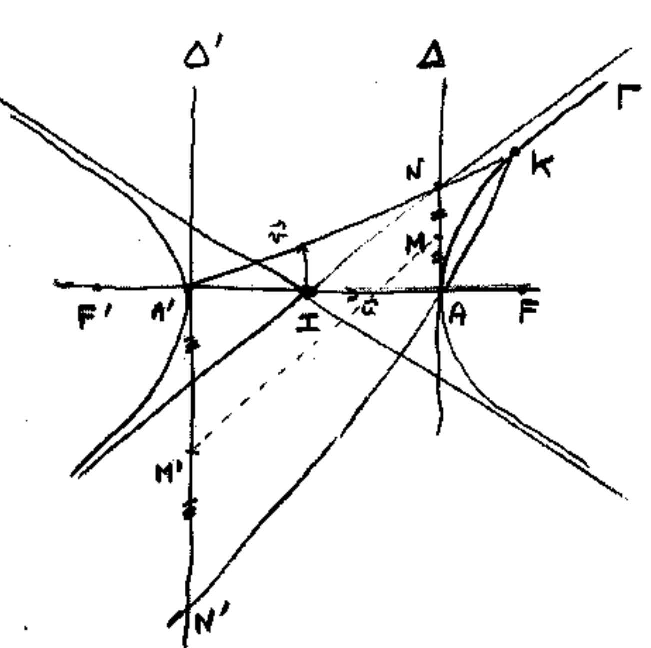
C'est la tangente en S à $\mathcal{C}$, donc (B.1.c) $h_{o,\frac{a}{b}}(c) \in \mathcal{H}_a$

ce qui entraîne $\boxed{c \in h_{o,\frac{b}{a}}(\mathcal{H}_a) = \mathcal{H}_b}$

• $g(K)$ est tangente à $\mathcal{H}_b$ en c :

Lemme : $g \circ \tau_{AA',k} = h_{O,k} \circ g$

Si l'on admet ce lemme, on peut utiliser B.2.a qui assure que $g(S) = g \circ \tau_{AA',\frac{a}{b}}(K) = h_{O,\frac{a}{b}} \circ g(K)$ est tangente à $\mathcal{H}_a$, et donc $g(K)$ sera tangente à $h_{O,\frac{b}{a}}(\mathcal{H}_a) = \mathcal{H}_b$



C.1.a

On a $a^2+b^2=c^2$ d'où $b=\sqrt{c^2-a^2}$ et Γ admet l'équation :

$$\Gamma : \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

C.1.b est un simple calcul en coordonnées.

$K(x_K, y_K)$ est sur Γ.

La droite $(A'K)$: $y = \frac{y_K}{x_K+a}(x+a)$ coupe Δ en $N(a, y_N)$

La droite (AK) : $y = \frac{y_K}{x_K-a}(x-a)$ coupe Δ' en $N'(-a, y_{N'})$

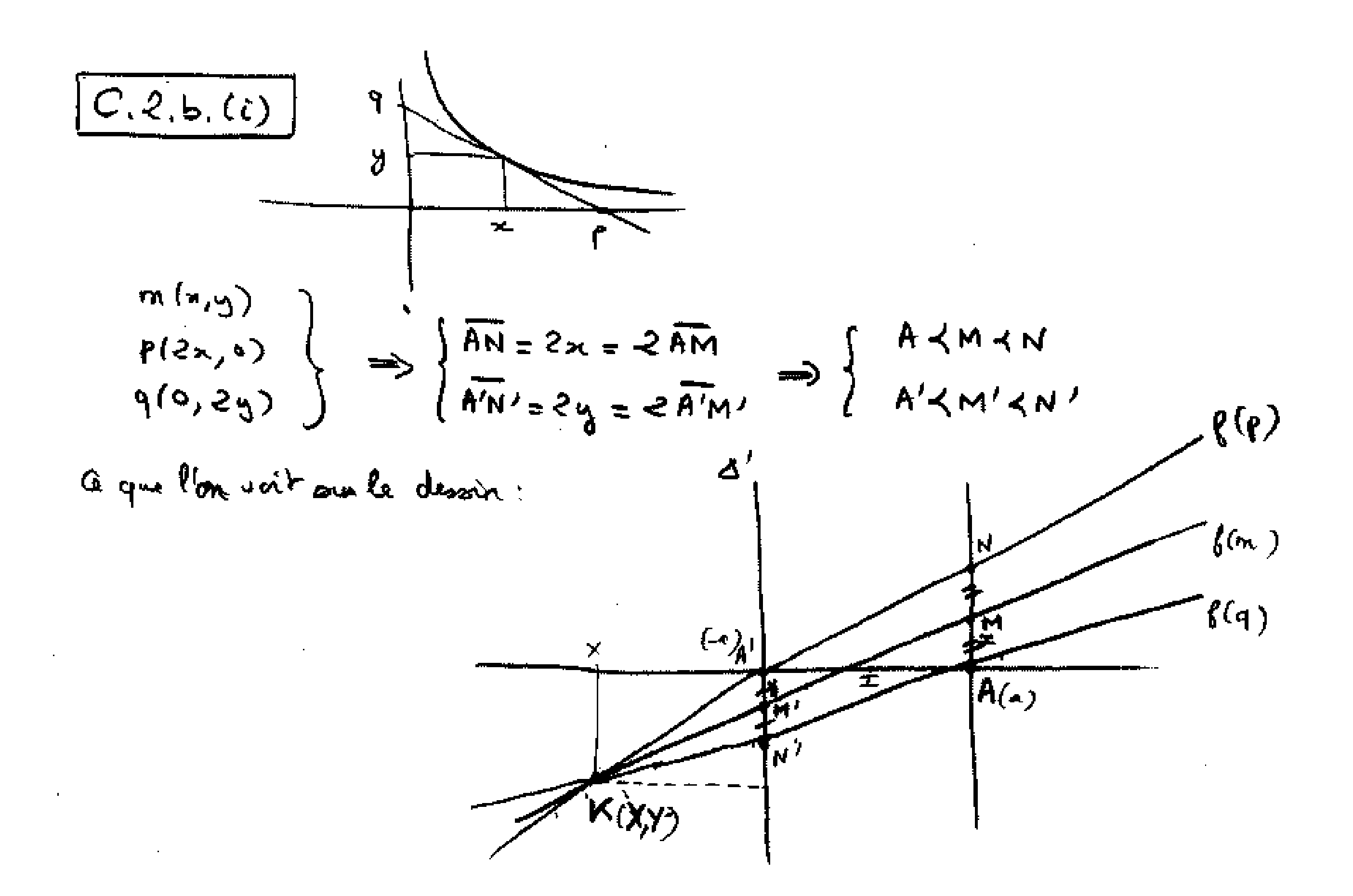
On a $\begin{cases} y_N = \frac{y_K}{x_K+a} \cdot 2a \\ y'_N = \frac{y_K}{x_K-a}(-2a) \end{cases}$ de sorte que $\begin{cases} M\left(a, \frac{a y_K}{x_K+a}\right) \\ M'\left(-a, -\frac{a y_K}{x_K+a}\right) \end{cases}$

Le point m de (P) admet les coordonnées (x_m, y_m) avec :

$$\begin{cases} x_m = \overline{AM} = y_M \\ y_m = \overline{A'M'} = y_{M'} \end{cases}$$

donc $x_m y_m = \frac{a y_K}{x_K+a} \cdot \frac{(-a y_K)}{x_K+a} = -a^2 \frac{y_K^2}{x_K^2-a^2} = -b^2$ (car $K \in \Gamma$) $\square$

C.2.b.(i)



$$\left.\begin{array}{l} m(x,y) \\ p(2x,0) \\ q(0,2y) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{AN} = 2x = 2\,\overline{AM} \\ \overline{A'N'} = 2y = 2\,\overline{A'M'} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A < M < N \\ A' < M' < N' \end{cases}$$

Ce que l'on voit sur le dessin :

C.2.b.(ii) Par Thalès

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{KN'}}{\overline{KA}} = \dfrac{\overline{KM'}}{\overline{KM}} = \dfrac{\overline{KA'}}{\overline{KN}} = \dfrac{\overline{A'N'}}{\overline{NA}} = \dfrac{2y}{-2x} = -\dfrac{y}{x} \\[2ex] \dfrac{\overline{KN'}}{\overline{KA}} = \dfrac{-a-X}{a-X} \quad \text{en projetant sur } (IA) \\[2ex] \dfrac{\overline{KN'}}{\overline{KA}} = \dfrac{2y-Y}{0-Y} = 1 - \dfrac{2y}{Y} \quad \text{en projetant sur } \Delta' \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dfrac{a+X}{a-X} = \dfrac{y}{x} \\[2ex] 1 - \dfrac{2y}{Y} = -\dfrac{y}{x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x+y)X = a(y-x) \\[1ex] (x+y)Y = 2xy = -2b^2 \end{cases}$$

Puis

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \frac{(y-x)^2}{(x+y)^2} - \frac{4b^2}{(x+y)^2} = \frac{(x-y)^2 + 4xy}{(x+y)^2} = 1$$

Cela signifie que $\boxed{K \in \Gamma}$.

C.2.b.(iii)

$M(a, x_m)$ $M'(-a, y_m)$ où $m(x_m, y_m)$

$f(m)$: $y = \frac{y_m - x_m}{-2a}(x-a) + x_m$

La tangente T en $K(X,Y)$ à $\mathcal{H}$ admet l'équation :

$$T : \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$$

sa pente est donc $m = \frac{\frac{X}{a^2}}{\frac{Y}{b^2}} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a(y_m - x_m)}{x_m + y_m} \cdot \frac{x_m + y_m}{-2b^2} = \frac{y_m - x_m}{-2a}$

$f(m)$ passe par $K \in T$ et c'est une droite de même pente que la tangente T à $\mathcal{H}$ en K, donc $\boxed{f(m) = T}$.

C.2.c.(i)

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans (P'), ~~et~~ $K \in \mathcal{H}$.

(C.1) mq qu'il existe $m \in (P)$ de coordonnées (x,y) tq $xy = -b^2$ et tq $f(m) = (MM')$ (avec les notations de C.1).

On peut appliquer C.2.a pour conclure à :

- les projetés des foyers F, F' de $\mathcal{H}$ appartiennent au cercle de diamètre $[AA']$ appelé cercle principal de $\mathcal{H}$
- $\overline{FH} \cdot \overline{F'H'} = -b^2$ et $\overline{FH}, \overline{F'H'}$ sont bien les distances algébriques des sommets de H à la tangente $f(m)$ en K à $\mathcal{H}$ (cf C.2.b).

C.2.d

Δ'   Δ

K   N'   A   F   H   M   N   A'

K ∈ ℋ   A, A' sommets de ℋ donnés.

- On réitère la construction de C.1 pour obtenir la tgte f(m) = (MM') à ℋ en K : (KA') coupe Δ en N, (KA) coupe Δ' en N', M (resp. M') est milieu de [AN] (resp. [A'N']) et f(m) = (MM') est <u>la tgte cherchée</u>.

- Le cercle principal de diamètre [AA'] coupe la tangente (MM') en H et H' qui ne sont autre que les projetés des foyers F et F' sur cette tangente. Il suffit donc de tracer la perpendiculaire à (MM') en H (resp H') qui coupe (AA') en F (resp. F') pour obtenir les foyers.

D.1 $m(x_m, y_m)$ avec $x_m^2 - y_m^2 = 4a^2$

$M(a, x_m)$ $M'(-a, y_m)$

$f(m)$: $y = \dfrac{x_m - y_m}{2a}(x - a) + x_m$

Soit H le milieu de [MM']. Il est sur la médiatrice de [AA'] d'après la réc. du Th. de Thalès, et $H\left(0 ; \frac{x_m+y_m}{2}\right)$.

On a $\vec{MH} \cdot \vec{AH} = \begin{pmatrix} -a \\ \frac{x_m+y_m}{2} - x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ \frac{x_m+y_m}{2} \end{pmatrix}$

$= a^2 + \frac{1}{4}(y_m^2 - x_m^2) = 0$

D.2.a • $(IH) \,//\, (A'H_1)$ et I milieu de [AA'] $\underset{\text{Thalès}}{\Longrightarrow}$ H milieu de $[AH_1]$

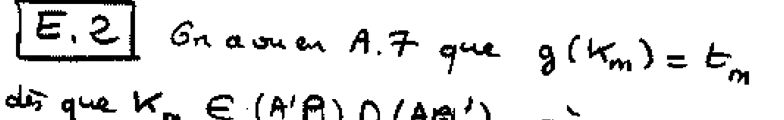
• $TAEH_1$ est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. Donc (H_1E) est parallèle à $(AT) = (AA')$. Comme $(AA') \perp \Delta'$, on aura nécessairement $\boxed{(H_1E) \perp \Delta'}$

D.2.b Comme $TAEH_1$ est un parallélogramme, $AT = EH_1$.
Comme (AH) est perpendiculaire à [TE] et coupe (TE) en H milieu de [TE], (AH) est la médiatrice de [TE] donc $AT = AE$.
Cela entraîne $EH_1 = EA$ et signifie que $E \in \mathcal{P}$.

E.1

$\vec{u}\,(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ dirige (t_m) donc

$$t_m : \quad y = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\left(x - \varphi(t_0)\right) + \psi(t_0)$$



E.2

On a vu en A.7 que $g(K_m) = t_m$ dès que $K_m \in (A'P) \cap (AQ')$ où

$$\begin{cases} P(a, x_p) \; ; \; p(x_p, 0) \text{ intersection de } t_m \text{ avec } Ox \\ Q'(-a, y_q) \; ; \; q(0, y_q) \text{ intersection de } t_m \text{ avec } Oy \end{cases}$$

Ici :

$$\boxed{\begin{cases} y_q = -\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\varphi(t_0) + \psi(t_0) \\ x_p = -\dfrac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}\psi(t_0) + \varphi(t_0) \end{cases}} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} (A'P) : \quad y = \dfrac{x_p - 0}{a-(-a)}(x+a) = \dfrac{x_p}{2a}(x+a) = \dfrac{x_p}{2a}x + \dfrac{x_p}{2} \\ (AQ') : \quad y = \dfrac{y_q - 0}{-a-a}(x-a) = \dfrac{y_q}{-2a}(x-a) = -\dfrac{y_q}{2a}x + \dfrac{y_q}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de K_m sont solution du système

$$\begin{cases} y = \dfrac{x_p}{2a}x + \dfrac{x_p}{2} \\ y = -\dfrac{y_q}{2a}x + \dfrac{y_q}{2} \end{cases}$$

d'où $\dfrac{x_p + y_q}{2a}x = \dfrac{y_q - x_p}{2} \Rightarrow x = a\dfrac{y_q - x_p}{y_q + x_p}$ et $y = \dfrac{x_p}{2}\cdot\dfrac{y_q - x_p}{y_q + x_p} + \dfrac{x_p}{2}$

$$y = \frac{x_p}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\,y_q}{y_q + x_p}$$

soit $$\boxed{K_m\left(a\,\frac{y_q - x_p}{y_q + x_p}\,,\; \frac{x_p y_q}{y_q + x_p}\right)} \qquad (2)$$

D.3

- Notons $Q(x_Q, y_Q)$ le pt de $f(m)$ distinct de E. Alors $Q_1(-a, y_Q)$ et :

$$\begin{cases} QQ_1^2 = (x_Q + a)^2 \\ QA^2 = (x_Q - a)^2 + y_Q^2 \end{cases}$$

Si $QQ_1^2 < QA^2 \Leftrightarrow (x_Q+a)^2 < (x_Q - a)^2 + y_Q^2$

$$\Leftrightarrow 4ax_Q < \left(\frac{x_m - y_m}{2a}(x_Q - a) + x_m \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4ax_Q < \frac{(x_m-y_m)^2}{4a^2}(x_Q-a)^2 + x_m^2 + \frac{x_m - y_m}{a} x_m (x_Q - a)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{(x_m-y_m)^2}{4a^2}(x_Q-a)^2 + \left(\frac{x_m^2 - x_m y_m}{a} - 4a \right)(x_Q - a) - 4a^2 + x_m^2$$

$$\Delta = \left(\frac{x_m(x_m-y_m)}{a} - 4a \right)^2 - 4 \frac{(x_m-y_m)^2}{4a^2} \cdot (x_m^2 - 4a^2)$$

$$= \frac{x_m^2}{a^2}(x_m - y_m)^2 + 16a^2 - 8x_m(x_m-y_m) - \frac{x_m^2(x_m-y_m)^2}{a^2} + 4(x_m-y_m)^2$$

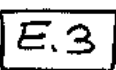
$$= 16a^2 - 8x_m^2 + 8x_m y_m + 4x_m^2 + 4y_m^2 - 8x_m y_m$$

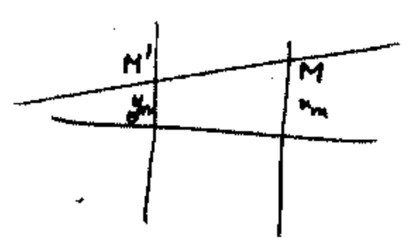
$$= 16a^2 + 4(y_m^2 - x_m^2)$$

$$= 0$$

Le trinôme est donc toujours > 0 sauf pour une seule valeur de x_Q (et l'on retrouve alors le point E)

- $f(m)$ est une droite qui coupe $\mathcal{P}$ en un unique point E (puisque $Q \in \mathcal{P} \Leftrightarrow QQ_1 = QA$ n'est possible que si $Q = E$) sans être perpendiculaire à la directrice Δ' de $\mathcal{P}$ (sinon $x_m = y_m$ et $a = 0$ absurde). C'est donc la tangente à $\mathcal{P}$ en E.





- $f(m)$: $y = \dfrac{x_m - y_m}{2a}(x-a) + x_m$

$$f(m) : \quad y = \frac{x_m - y_m}{2a} x + \frac{x_m + y_m}{2} \qquad \text{où } (x_m, y_m) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$$

- <u>Enveloppe Γ des droites $f(m)$ quand m décrit (γ)</u>

Rappel (cf Ramis V.1.6.2 ou Serfati IV p177) (cf [carc0002])

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u, v des fonctions de classe C^k $(k \geq 1)$ de I dans $\mathbb{R}$, tq pour tout $t \in I$ $(u(t), v(t)) \neq (0,0)$. On considère la famille de droites $\{D_t\}_{t \in I}$ où :

$$D_t : \quad u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$$

(équation dans un r.o. fixé)

On appelle <u>enveloppe de la famille</u> $\{D_t\}_{t\in I}$ tout arc paramétré $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ tq pour tout $t \in I$ la tangente à γ au point $\gamma(t)$ soit D_t.

<u>Condition nécessaire</u> : Si $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ est une enveloppe de $\{D_t\}_{t\in I}$, alors pour tout $t \in I$

$$\begin{cases} \gamma(t) \in D_t \\ \gamma'(t) \text{ colinéaire à } \begin{pmatrix} -v(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)\varphi(t) + v(t)\psi(t) + w(t) = 0 \\ u(t)\varphi'(t) + v(t)\psi'(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t)\varphi(t) + v(t)\psi(t) + w(t) = 0 \\ u'(t)\varphi(t) + v'(t)\psi(t) + w'(t) = 0 \end{cases} \quad (S)$$

(dériver)

on a obtenu d'abord : $u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$, $u'(t)x + v'(t)y + w'(t) = 0$

et il suffit de résoudre le système (S) pour obtenir une courbe $\gamma(t)$ <u>susceptible</u> d'être une enveloppe de $\{D_t\}$. Dans le Ramis, on étudie une réciproque possible : si $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ vérifie (S) et si tous les pts de $\gamma(t)$ sont réguliers (resp. et si le premier entier caractéristique non nul est toujours $\leq k+1$), alors γ est une enveloppe de $\{D_t\}$.

Ici $\beta(m) = D_t$: $y = \frac{1}{2a}(\varphi(t) - \psi(t))x + \frac{1}{2}(\varphi(t) + \psi(t))$

et $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ s'obtient en résolvant le système

$$(S) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2a}(\varphi + \psi)x + \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \\ 0 = \frac{1}{2a}(\varphi' - \psi')x + \frac{1}{2}(\varphi' + \psi') \end{cases}$$

donc

$$(2) \quad \begin{cases} x = a\,\frac{\varphi' + \psi'}{\psi' - \varphi'} \\ y = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)\frac{\varphi' + \psi'}{\psi' - \varphi'} + \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \end{cases}$$

($\varphi' - \psi' \neq 0$ car γ n'a pas de tgte à la 1$^{\text{re}}$ bissectrice)

L'enveloppe Γ cherchée est l'arc paramétré $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ défini par (2) si, et seulement si, l'on peut vérifier que cet arc Γ est dérivable et n'a pas de point stationnaire (ce qui assure l'existence d'une tgte en chaque pt de Γ, d'où (1)).

Les hypothèses faites sur φ et ψ sont trop faibles ! On supposera que φ et ψ sont au moins 2 fois dérivables pour que x et y soient dérivables. De plus, vérifier que Γ est régulier revient à vérifier que $\forall t \quad (x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ et cela équivaut à

$$\begin{cases} x' = 2a\,\frac{\varphi''\psi' - \varphi'\psi''}{(\psi' - \varphi')^2} \\ y' = \frac{1}{2}\left[(\varphi - \psi)\frac{\varphi''\psi' - \varphi'\psi''}{(\psi' - \varphi')^2} + \frac{\varphi'^2 - \psi'^2}{\psi' - \varphi'} + \varphi' + \psi'\right] \end{cases}$$

non nuls en même temps.

Si $\varphi''\psi' - \varphi'\psi'' = 0$, $x'(t)$ s'annule et malheureusement y' aussi ! Dire que Γ est régulier équivaut donc à faire la supposition

$$\forall t \quad \varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t) \neq 0$$

E.6

La propriété E.5 de conservation des contacts a été utilisée tout au long du problème, par ex. dans la partie D où

$$\begin{cases} \gamma \text{ est l'hyperbole } \mathcal{H} : x^2 - y^2 = 4a^2 \\ m \in \gamma \\ f(m) \text{ est tangente à la parabole } \mathcal{P} \text{ de foyer } A \text{ et directrice } \Delta' \end{cases}$$

(.

E.4 On avait $K_m(x_{K_m}, y_{K_m})$ avec

$$x_{K_m} = a\,\frac{y_q - x_p}{y_q + x_p} = a\,\frac{-\frac{\psi'}{\varphi'}\varphi + \psi + \frac{\varphi'}{\psi'}\psi - \varphi}{-\frac{\psi'}{\varphi'}\varphi + \psi - \frac{\varphi'}{\psi'}\psi + \varphi}$$

$$= a\,\frac{-\varphi\psi'^2 + \psi\varphi'\psi' + \psi\varphi'^2 - \varphi\varphi'\psi'}{-\varphi\psi'^2 + \psi\varphi'\psi' - \psi\varphi'^2 + \varphi\varphi'\psi'}$$

$$= a\,\frac{(\varphi'+\psi')(\psi\varphi' - \varphi\psi')}{(\psi'-\varphi')(\psi\varphi' - \varphi\psi')}$$

On calculerait y_{K_m} de la même façon pour constater que les coordonnées de K_m vérifient le système (2) de E.3, et cela signifie que $\boxed{K_m \in \Gamma}$

E.5

Vu l'élargissement de la définition de f, on peut dire que $K_m = f(t_m)$

On a :

$$\begin{cases} m \in \gamma & t_m \text{ tangente à } \gamma \text{ en } m \\ f(m) \text{ tangente à l'enveloppe } \Gamma & \text{en } K_m = f(t_m) \end{cases}$$

ie f transforme bien tangente et point de contact de γ en pt de contact et tangente de Γ.

E.6

La propriété E.5 de conservation des contacts a été utilisée tout au long du problème, par ex. dans la partie D où

$$\begin{cases} \gamma \text{ est l'hyperbole } \mathcal{H} : x^2 - y^2 = 4a^2 \\ m \in \gamma \\ f(m) \text{ est tangente à la parabole } \Gamma \text{ de foyer } A \text{ et directrice } \Delta' \end{cases}$$

FIN

1998

I

Calcul approché de racines carrées par l'algorithme de Babylone

L'objectif de cette partie est de donner un algorithme de calcul des racines carrées (appelé algorithme de Babylone) et de préciser la rapidité de convergence. Les méthodes utilisées sont des méthodes classiques d'étude des suites numériques récurrentes. Les six premières questions sont consacrées à la description de cet algorithme dans le cas particulier du calcul approché de $\sqrt{2}$. La question I.7. étend ces résultats au cas du calcul approché de $\sqrt{\alpha}$ pour tout réel positif α.

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels, on dit que cette suite est décroissante à partir du rang k si :

$$\forall n \geq k, \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

On dit qu'elle est globalement décroissante si elle est décroissante à partir du rang 0.

I.1. On définit une fonction φ sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

a. Étudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative.

b. Prouver les inégalités suivantes :

$$\text{(i)} \quad \forall x > 0, \quad \varphi(x) \geq \sqrt{2};$$

$$\text{(ii)} \quad \forall x > \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} < \varphi(x) < x.$$

I.2. On choisit un nombre u_0 strictement positif et on définit par récurrence une suite $(u_n)_n$ par :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

On fera dans la suite l'hypothèse que le nombre u_0 est différent de $\sqrt{2}$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante à partir du rang 1.

b. Comment faut-il choisir u_0 pour que la suite $(u_n)_n$ soit globalement décroissante ?

I.3. Établir la convergence de la suite $(u_n)_n$ et préciser sa limite.

On étudie maintenant la rapidité de convergence de la suite $(u_n)_n$ vers sa limite. Afin de simplifier la discussion, on supposera dans les deux questions suivantes que le nombre u_0 est strictement supérieur à $\sqrt{2}$.

I.4. Soit x strictement plus grand que $\sqrt{2}$. Montrer (en utilisant la définition de φ) l'inégalité :

$$0 < \varphi(x) - \sqrt{2} < \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}.$$

I.5. On définit la suite $(v_n)_n$ par $v_n = \ln\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

a. Justifier l'existence de v_n pour tout entier naturel n et montrer que cette suite vérifie l'inégalité :

$$v_{n+1} < 2\, v_n - a \qquad \text{où} \qquad a = 3 \ln\left(\sqrt{2}\right).$$

b. Montrer qu'il existe n_0 tel que $v_{n_0} < 0$.

c. Prouver que pour tout entier naturel n :

$$v_{n+n_0} \leq 2^n\, v_{n_0} - (2^n - 1)\, a \leq -(2^n - 1)\, a.$$

I.6. *Application numérique :* on suppose $u_0 = 16$.

Déterminer le premier indice n_0 tel que $v_{n_0} < 0$. Au vu des résultats de la question précédente, à partir de quel rang k est-on certain que $u_k - \sqrt{2} \leqslant 10^{-12}$? (On utilisera les inégalités $\ln 10 < 2{,}4$ et $a > 1{,}03$).

I.7. **Cas général.**

On se donne dans la suite un nombre α strictement positif et on définit la fonction φ_α pour tout nombre réel strictement positif par :

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right).$$

On définit la suite (u_n) par la donnée de u_0, nombre réel strictement positif, et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \varphi_\alpha(u_n).$$

a. Énoncer et prouver pour la fonction φ_α des résultats analogues aux inégalités (i) et (ii) de la question I.1.*b*.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers $\sqrt{\alpha}$.

c. On suppose de nouveau que $u_0 > \sqrt{\alpha}$ et on définit la suite (v_n) par :

$$v_n = \ln\left(u_n - \sqrt{\alpha}\right).$$

Prouver l'existence de n_0 tel que $v_{n_0} < 0$ et vérifier, pour $n \geqslant 0$, l'inégalité :

$$v_{n+n_0} \leqslant -(2^n - 1)\, a_\alpha.$$

où le nombre a_α vaut maintenant $\ln\left(2\sqrt{\alpha}\right)$.

d. Application numérique.

On suppose $\alpha = e$ et $u_0 = 2$. Vérifier que $n_0 = 0$ et trouver, en utilisant la majoration obtenue en *c.*, une valeur de k telle que $u_k - \sqrt{e} < 10^{-12}$. (On utilisera les inégalités $\ln 10 < 2{,}4$ et $\ln 2 > 0{,}69$).

II

Méthode de Newton et algorithme de Babylone

L'objectif de cette partie est de donner un deuxième point de vue sur l'algorithme de Babylone, en le retrouvant comme cas particulier de la méthode de Newton pour le calcul des racines d'une équation numérique. Le cadre d'étude est le suivant : on considère une fonction f définie et de classe C^2 sur un intervalle ouvert I (f est deux fois dérivable sur I et sa dérivée seconde est continue sur I) et strictement monotone sur I. On suppose qu'il existe deux points a et b de I tels que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

II.1. Montrer qu'il existe un unique élément 1 de $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Pour simplifier la rédaction, on fera l'hypothèse dans la suite de cette partie que f est strictement décroissante sur I (si elle ne l'était pas, il suffirait d'appliquer les résultats qui suivent à $-f$ pour les étendre au cas général). On fait en outre l'hypothèse que $a < b$, de sorte que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Enfin on suppose que la fonction f'' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

La méthode de Newton consiste alors à calculer c comme limite de la suite (u_n) définie de la manière suivante : on part de $u_0 = a$ (dans le cas où f'' est positive sur $[a, b]$) ou de $u_0 = b$ (dans le cas où f'' est négative sur $[a, b]$) et, pour tout $n \geqslant 0$, on désigne par u_{n+1} le point de $[a, b]$ intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe représentative de f menée par le point de cette courbe d'abscisse u_n.

On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

II.2. **Un exemple graphique.**

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 - 4x - 6 .$$

On pose $a = -2$ et $b = -1$.

a. Vérifier que f satisfait les hypothèses ci-dessus.

b. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à $[-2, -1]$. Dessiner les tangentes nécessaires au calcul de u_1, u_2 et u_3. Quelles propriétés de la suite (u_n) conjecturez-vous ?

II.3. **Étude du cas où f'' est positive sur $[a, b]$.**

On suppose dans cette question que la fonction f'' est positive sur $[a, b]$ (on dit alors que la fonction f est convexe sur $[a, b]$) et on pose $u_0 = a$.

a. Montrer qu'alors $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b[$ et que $f'(a) \leqslant \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ pour tout $t \in]a, b]$.
Donner une interprétation géométrique de ces résultats.

b. En déduire que $u_1 \in]a, c]$ et que $f(u_1) \geqslant 0$.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

d. Montrer que la suite (u_n) converge vers c .

II.4. **Étude du cas où f'' est négative sur $[a, b]$.**

On suppose dans cette question que f'' est négative sur $[a, b]$ (on dit alors que f est concave sur $[a, b]$) et on pose $u_0 = b$. En adaptant la démonstration faite à la question précédente, montrer que la suite (u_n) est décroissante et prouver qu'elle converge vers c .

(On pourra soit modifier les arguments donnés dans le cas où f est convexe, soit se ramener à ce cas en introduisant la fonction auxiliaire qui à x associe $-f(-x)$, définie sur l'intervalle $[-b, -a]$.)

II.5. Soit α un nombre réel strictement positif. On pose $f_\alpha(x) = -x^2 + \alpha$ et $I =]0, 2\alpha + 1[$. On choisit un nombre a strictement positif inférieur à $\sqrt{\alpha}$ (par exemple $a = 1$ si $\alpha > 1$ et $a = \dfrac{\alpha}{2}$ sinon) et $b = 1 + \alpha$.

a. Vérifier que la fonction ainsi définie satisfait à l'ensemble des hypothèses faites dans cette partie. Est-on dans la situation de la question II.3. (cas des fonctions convexes) ou dans celle de II.4. (cas des fonctions concaves) ?

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Qu'en pensez-vous ?

III

Une approche arithmétique de l'algorithme de Babylone

Dans cette partie, on s'intéresse à une nouvelle approche de l'algorithme de Babylone utilisant des propriétés de nature plus arithmétique. On se donne un nombre réel $d > 1$ et on définit des suites (p_n) et (q_n) par $p_0 = q_0 = 1$ et la formule de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n^2 + d q_n^2 \\ q_{n+1} = 2 p_n q_n . \end{cases}$$

L'objectif de cette partie est de prouver la convergence de la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ vers $\sqrt{d}$ sans utiliser les techniques de la partie précédente (le lien entre cette suite et les résultats de la partie I étant explicité dans la question III.8.).

III.1. Montrer que les suites (p_n) et (q_n) sont strictement croissantes et que la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ est minorée par 1.

III.2. Prouver les inégalités suivantes, valables pour tout $n \geqslant 1$:

$$\text{(i)} \quad p_n \geqslant d^{(2^{n-1})};$$

$$\text{(ii)} \quad q_n \geqslant 2^n d^{(2^{n-1}-1)}.$$

III.3. Montrer que les suites (p_n) et (q_n) tendent vers $+\infty$.

III.4. Calculer $p_{n+1}^2 - dq_{n+1}^2$ en fonction de $p_n^2 - dq_n^2$.

III.5. On pose $A = d - 1$. Montrer que $\left|p_n^2 - dq_n^2\right| = A^{(2^n)}$. En déduire l'égalité :

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}\right| = \frac{A^{(2^n)}}{q_n^2} \frac{1}{\left(\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{d}\right)}.$$

III.6. Montrer soigneusement l'équivalence entre les propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ tend vers $\sqrt{d}$;

(ii) la suite $\left(\frac{A^{(2^n)}}{q_n^2}\right)$ tend vers 0.

III.7. En utilisant les propriétés de la question III.2. et de la question III.6., montrer la convergence de la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ vers $\sqrt{d}$.

III.8. On pose $\frac{p_n}{q_n} = u_n$, déterminer la relation de récurrence liant u_{n+1} à u_n et retrouver le résultat de la question III.7. en utilisant la partie I.

IV

Accélération de la convergence par un meilleur choix de (p_0, q_0).

Dans cette dernière partie, nous nous limitons au cas où d est un nombre entier au moins égal à 2 et nous étudions comment choisir des entiers naturels p_0 et q_0 de manière à rendre la convergence vers $\sqrt{d}$ de la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ étudiée dans la partie I la plus rapide possible. Au vu de l'égalité démontrée à la question III.5. de cette partie, il faudrait pour cela rendre le nombre $B = \left|p_0^2 - dq_0^2\right|$ le plus petit possible. Nous ferons l'hypothèse que d **n'est pas le carré d'un nombre entier.**

IV.1. Montrer que si $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$, le nombre B est non nul. En déduire que $\sqrt{d}$ est un nombre irrationnel.

Nous allons montrer l'existence d'entiers non nuls p_0 et q_0 tels que $p_0^2 - dq_0^2 = 1$. Pour cela, nous étudions la périodicité d'une suite (x_n) associée au nombre d. On pose $x_0 = \sqrt{d}$ et on définit, pour tout $n \geqslant 0$, le nombre x_{n+1} par :

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \mathrm{E}(x_n)}$$

où $\mathrm{E}(x_n)$ désigne la partie entière de x_n, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x_n.

IV.2. Vérifier que la suite (x_n) est bien définie (on commencera par prouver que tous les nombres x_n sont irrationnels).

IV.3. Prouver que, pout tout n, il existe des entiers α_n, β_n, γ_n et δ_n tels que :

$$x_n = \frac{\alpha_n x_0 + \beta_n}{\gamma_n x_0 + \delta_n}$$

et vérifier que $\alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = (-1)^n$.

IV.4. En partant de la relation $x_0^2 - d = 0$, montrer par récurrence que, pour tout n, le nombre x_n est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers :

$$\mathrm{A}_n x^2 + \mathrm{B}_n x + \mathrm{C}_n = 0$$

telle que $|\mathrm{B}_n^2 - 4\mathrm{A}_n \mathrm{C}_n| = 4d$.

On admettra dans la suite que, pout tout n, les nombres A_n et C_n sont non nuls et de signes contraires.

IV.5. Montrer que la suite (B_n) est bornée, puis que les suites (A_n) et (C_n) le sont (on notera que $|\mathrm{A}_n|$ et $|\mathrm{C}_n|$ sont au moins égaux à 1).

IV.6. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de trinômes $\mathrm{A}_n x^2 + \mathrm{B}_n x + \mathrm{C}_n$, puis qu'il existe des entiers distincts n_0 et n_1 tels que $x_{n_0} = x_{n_1}$.

IV.7. En utilisant la question IV.3., montrer qu'il existe des nombres entiers α, β, γ et δ tels que :

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha\sqrt{d} + \beta}{\gamma\sqrt{d} + \delta}$$

et tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. On admettra que le quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est différent de $\mp (1,0,0,1)$. (Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat relevant de la théorie des nombres.)

IV.8. Prouver que $\delta = \alpha$ et $\beta = \gamma d$ et en déduire $\alpha^2 - d\gamma^2 = \pm 1$.

Corrigé de la première composition 1998

I

I.1 La fonction φ est définie pour $x \neq 0$. Comme elle est impaire ($\varphi(-x) = -\varphi(x)$), on il suffit d'étudier ses variations sur l'intervalle $]0, \infty[$. On a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}.$$

II.4. Posons $g(x) = -f(-x)$. On trouve $g'(x) = f'(-x)$ et $g''(x) = -f''(-x) > 0$ pour tout x de $[-b, -a]$. Si on pose $s(x) = -x$, les fonctions f et s sont décroissantes. Il en donc de même de la fonction $g = s \circ f \circ s$. La fonction g satisfait donc aux hypothèses de la question 3.d. Le graphe de g se déduit du graphe de f par une symétrie par rapport à l'origine. Notons (v_n) la suite associée à la fonction g et (u_n) celle qui est associée à f. On trouve :

$$u_0 = b, \qquad 0 = f(u_n) + f'(u_n)\,(u_{n+1} - u_n)$$
$$v_0 = -b, \qquad 0 = g(v_n) + g'(v_n)\,(v_{n+1} - v_n) = -f(-v_n) + f'(-v_n)\,(v_{n+1} - v_n),$$

d'où on déduit immédiatement par récurrence que $v_n = -u_n$. En appliquant les résultats de la question 3.d. à la suite (v_n), on en déduit que la suite (u_n) est décroissante et tend vers c avec :

$$0 = g(-c) = -f(c) \qquad -c \in]-b, -a[\text{ soit } c \in]a, b[.$$

II.5.a. On a $f'_\alpha = -2x > 0$ pour $x \in I$. Donc f est strictement décroissante sur I. Par suite $f(a) \rangle f(\sqrt{\alpha}) = 0$. Par ailleurs $f(b) = -1 - \alpha\text{-}\alpha^2 \langle 0$, donc $f(a)f(b) < 0$. Finalement, comme $f''(x) = -2$, on est dans le) = cas de la question 3.

II.5.b. On a $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = u_n - f(u_n)/f'(u_n) = u_n + (-u_n^2 + \alpha)/2u_n = \varphi_\alpha(u_n)$. On retrouve la suite de la question I.7. On vient donc de redémontrer que cette suite converge vers $c = \sqrt{\alpha}$.

III

III.1. On montre d'abord, par récurrence, que $p_n \geq q_n \geq 1$ pour tout entier n.
C'est vrai par hypothèse pour $n = 0$. Si c'est vrai au rang n, alors

$$q_{n+1} \geq 2 \geq 1 \qquad p_{n+1} - q_{n+1} \geq p_n^2 + q_n^2 - 2p_n q_n = (p_n - q_n)^2 \geq 0$$

et c'est vrai au rang $n + 1$. En particulier, la suite (p_n/q_n) est minorée par 1.
Maintenant, on a pour tout entier n :

$$p_{n+1} \geq p_n^2 + d > p_n^2 \geq p_n \qquad q_{n+1n} 2q_n > q_n$$

et les suites (u_n) et (v_n) sont décroissantes.

III.2. On a bien :

$$(i.1) \quad p_1 = 1 + d \geq d \qquad (ii.1) \quad q_1 = 2 \geq 2\,d^0$$

En supposant les relations (i) et (ii) vérifiées à l'ordre n, on trouve :

$$p_{n+1} \geq p_n^2 \geq d^{2\,2^{n-1}} = d^{2^{(n+1)-1}} \qquad q_{n+1} \geq 2\,d^{2^{n-1}} 2^n d^{2^{n-1}-1} = 2^{n+1} d^{2^{(n+1)-1}-1}$$

et les relations sont vérifie=ées à l'ordre $n + 1$.

III.3. La suite 2^{n-1} tend vers l'infini. Comme $d > 1$, il en est de même de la suite $d^{2^{n-1}}$ et, par suite, aussi des suites (p_n) et (q_n).

III.4. On trouve $p_{n+1}^2 - d\,q_{n+1}^2 = p_n^4 + d^2 q_n^4 + 2d\,p_n^2 q_n^2 - 4d\,p_n^2 q_n^2 = \left(p_n^2 - d\,q_n^2\right)^2$.

III.5. On a $p_0^2 - d\,q_0^2 = 1 - d = -A$. L'égalité de la question précédente montre, par récurrence, que $p_n^2 - d\,q_n^2 = A^{2^n}$ pour $n \geq 1$. Autrement dit, pour $n \geq 1$, on a :

$$\frac{A^{2^n}}{q_n^2\left(\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{d}\right)} = \frac{p_n^2 - d\,q_n^2}{q_n^2\left(\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{d}\right)} = \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}.$$

III.6. Supposons la condition (i) vérifiée. Alors la suite $\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{d}$ tend vers $2\sqrt{d} > 0$ et la suite $\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}$ tend vers 0. Il en résulte que la suite :

$$\frac{A^{2^n}}{q_n^2} = \left(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}\right)\left(\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{d}\right)$$

tend vers 0.

Supposons la condition (ii) vérifiée. Comme, d'après III.1., la suite (p_n/q_n) est minorée par 1, on trouve

$$0 \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}\right| \leq \frac{A^{2^n}}{q_n^2}\,\frac{1}{1+\sqrt{d}}$$

et le théorème des gendarmes montre que la suite $\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}$ tend vers 0.

III.7. D'après la définition de A et III.2.(ii), on a :

$$0 \leq \frac{A^{2^n}}{q_n^2} \leq \frac{(d-1)^{2^n}}{4^n\,d^{2^n-2}} = 4^{-n}\,d^2\left(1 - \frac{1}{d}\right)^{2^n} \leq 4^{-n}\,d^2$$

Le théorème des gendarme assure maintenant que la condition III.6.(ii) est vérifiée donc que la suite (p_n/q_n) tend vers 0.

III.8. On trouve :

$$u_0 = 1 > 0, \qquad u_{n+1} = \frac{p_n^2 + dq_n^2}{2p_n\,q_n} = \frac{1}{2}\,u_n + \frac{d}{2u_n} = \varphi_d(u_n).$$

Il résulte de la question I.7.b. que la suite (u_n) tend vers $\sqrt{d}$.

IV

IV.1. Supposons $B = 0$. Le nombre entier $d \geq 2$ a une décomposition en produit de fadcteurs premiers de la forme $d = \prod_{i=1}^{\nu} r_i^{\delta_i}$ avec $\nu \geq 1$ et $\delta_i \geq 1$. Si tous les nombres dδ_i étaient pairs, le nombre d serait un carré ce qui n'est pas. Donc il existe un indice i_0 pour lequel le nombre i_0 est impaire. Notons $\alpha \geq 0$ (resp. $\beta \geq 0$) la puissance du nombre r_{i_0} apparaissant dans la décomposition de p_0 (resp. q_0) en produit de facteurs premiers. On trouve $2\alpha = \delta_{i_0} + 2\beta$ ce qui est impossible car 2α est un nombre pair et $\delta_{i_0} + 2\beta$ est un nombre impair. Donc $B \neq 0$.

Si le nombre $\sqrt{d} > 0$ était rationnel, il s'écrirait sous la forme p/q avec p et q entier strictement positifs. Le nombre $B = p^2 - dq^2$ serait nul ce qui n'est pas d'après le raisonnement précédent.

IV.2. Le nombre $x_0 = \sqrt{d}$ n'est pas rationnel.

Supposons que x_n soit irrationnel. Si x_{n+1} était rationnel, on aurait $x_n =$E$(x_{n+1}) + 1/x_{n+1}$ rationnel (E(x_n) est un entier donc rationnel) ce qui n'est pas. Donc x_{n+1} est rationnel.

On vient de montrer par récurrence que x_n était irrationnel, en particulier non entier. Donc, pour tout n, on a x_n-E$(x_{n+1}) \neq 0$ et la suite x_n est bien définie.

IV.3. La propriété est vraie à l'ordre 0 avec $\alpha_0 = \delta_0 = 1$ et $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ car on a $x_0 = \frac{1\,x_0+0}{0\,x_0+1}$ et $\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0 = 1$.

Supposons la vraie à l'ordre n et posons E$(x_n) = \varepsilon_n$. On trouve :

$$x_{n+1} = \frac{1}{\frac{\alpha_n x_0 + \beta_n}{\gamma_n x_0 + \delta_n} - \varepsilon_n} = \frac{\alpha_{n+1}x_0 + \beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}x_0 + \delta_{n+1}}$$

avec $\alpha_{n+1} = \gamma_n$, $\beta_{n+1} = \delta_n$, $\gamma_{n+1} = \alpha_n - \varepsilon_n\gamma_n$, $\delta_{n+1} = \beta_n - \varepsilon_n\delta_n$, c'est-à-dire :

$$\alpha_{n+1}\delta_{n+1}\text{-}\beta_{n+1}\gamma_{n+1} = \gamma_n(\beta_n - \varepsilon_n\delta_n) - \delta_n(\alpha_n - \varepsilon_n\gamma_n) = -\alpha_n\delta_n + \beta_n\gamma_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

La propriété est démontrée, par récurrence, pour tout n.

Remarque. Pour simplifier les calculs, on peut utiliser le fait que la composition des fonctions homographiques revient à faire le produit des matrices 2×2 correspondantes. Par exemple, ici, on trouve :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

et la seconde formule découle imédiatement du calcul du déterminant du produit de deux matrices.

IV.4. x_0 est racine de l'équation du second degré $A_0x^2 + B_0x + C_0$ avec $A_0 = 1$, $B_0 = 0$ et $C_0 = -d$, c'est-à-dire $B_0^2 - 4A_0C_0 = 4d$.

Supposons le résultat acquis à l'ordre n. Comme $x_n = \varepsilon_n + \frac{1}{x_{n+1}}$, on trouve :

$$A_n(\varepsilon_n^2 + 2\varepsilon_n \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+1}^2}) + B_n(\varepsilon_n + \frac{1}{x_{n+1}}) + C_n = 0$$

c'est-à-dire :

$$(A_n\varepsilon_n^2 + B_n\varepsilon_n + C_n)\, x_{n+1}^2 + (2\, A_n\varepsilon_n + B_n)\, x_{n+1} + A_n = 0$$

On obtient une relation du type cherché avec

$$A_{n+1} = A_n\varepsilon_n^2 + B_n\varepsilon_n + C_n, \quad B_{n+1} = 2\, A_n\varepsilon_n + B_n, \quad C_{n+1} = A_n$$

En particulier, on a :

$$B_{n+1}^2 - 4A_{n+1}C_{n+1} = 4A_n^2\varepsilon_n^2 + 4A_nB_n\varepsilon_n + B_n^2 - 4A_n^2\varepsilon_n^2 - 4A_nB_n\varepsilon_n - 4A_nC_n = B_n^2 - 4A_nC_n = 4d$$

Remarques. 1) Le discriminant du trinôme est forcément positif car ce trinôme a racine réelle.
2) Si $A = 0$ (resp. $C = 0$), la racine x_n du trinôme serait rationnelle ce qui n'est pas. Donc $AC \neq 0$.
3) On peut aussi trouver la relation en écrivant :

$$d = x_0^2 = \left(\frac{\delta_n x_n - \beta_n}{-\gamma_n x_n + \delta_n} \right)^2$$

En développant, on trouve :

$$A_n = \delta_n^2 - \gamma_n^2 d \quad B_n = 2\delta_n\beta_n - d\,\alpha_n\gamma_n \quad C_n = \beta_n^2 - \alpha_n^2 d$$

4) Comme $x_n > \mathrm{E}(x_n)$, on constate que $x_n > 0$ pour tout n.

La méthode exposée en 3) montre que la seconde racine du trinôme n'est autre que le nombre $y_n = (-\alpha_n\sqrt{d} + \beta_n)/(-\gamma_n\sqrt{d} + \delta_n)$ obtenu en remplaçant $x_0 = \sqrt{d}$ par l'autre racine de l'équation $x^2 - d = 0$.

On vérifie facilement que l'on a $y_{n+1} = 1/(y_n - \varepsilon_n)$ d'où on déduit par récurrence que $y_n < 0$. Il vient alors $C_n/A_n = x_ny_n < 0$ c'est-à-dire $A_nC_n < 0$.

IV.5. On a clairement $B_n^2 = 4d + A_nC_n \leq 4d$. La suite B_n^2 est donc bornée. Il en est de même de la suite B_n $(-2\sqrt{d} < B < 2\sqrt{d})$. Finalement, on a :

$$|A_n| = |B_n^2 - 4d|/4|C_n| \leq d \qquad |C_n| = |B_n^2 - 4d|/4|A_n| \leq d$$

IV.6. Puisque les entiers B_n (resp. A_n, C_n) sont bornés, ilis sont en nombre fini $2\mathrm{E}(\sqrt{d}) + 1$ (resp. $2d$). Il n'existe donc qu'un nombre fini de trinôme $A_nx^2 + B_nx + C_n$ (au plus $(2\mathrm{E}(\sqrt{d}) + 1)2d^2$), donc un nombre fini de valeurs possibles pour la racine x_n d'un tel polynôme (au plus $2(2\mathrm{E}(\sqrt{d}) + 1)2d^2$). Comme le nombre d'indice n est infini, il y a deux indices distincts n_0 et n_1 pour lesquels les nombres $x_{n_0} = x_{n_1}$.

IV.7. On a (la notation matricielle de la remarque à la question IV.3 simplifie bien les calculs) :

$$x_{n_0} = \frac{\alpha_{n_0}x_0 + \beta_{n_0}}{\gamma_{n_0}x_0 + \delta_{n_0}} = \frac{\alpha_{n_1}x_0 + \beta_{n_1}}{\gamma_{n_1}x_0 + \delta_{n_1}} \qquad x_0 = \frac{\delta_{n_0}x_{n_0} - \beta_{n_0}}{-\gamma_{n_0}x_{n_0} + \alpha_{n_0}} = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta}$$

avec $\alpha = \delta_{n_0}\alpha_{n_1} - \beta_{n_0}\gamma_{n_1}$, $\beta = \delta_{n_0}\beta_{n_1} - \beta_{n_0}\delta_{n_1}$, $\gamma = -\gamma_{n_0}\alpha_{n_1} + \alpha_{n_0}\gamma_{n_1}$, $\delta = -\gamma_{n_0}\beta_{n_1} + \alpha_{n_0}\delta_{n_1}$.

Autrement dit on a :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{n_0} & -\beta_{n_0} \\ -\gamma_{n_0} & \alpha_{n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n_1} & \beta_{n_1} \\ \gamma_{n_1} & \delta_{n_1} \end{pmatrix}$$

D'où $\alpha\delta - \beta\gamma = (\delta_{n_0}\alpha_{n_0} - \beta_{n_0}\gamma_{n_0})(\alpha_{n_1}\delta_{n_1} - \beta_{n_1}\gamma_{n_1}) = (-1)^{n_0}(-1)^{n_1} = \pm 1$.

IV.8. D'après la question précédente, on a :

$$\gamma x_0^2 + (\delta - \alpha)x_0 - \beta = 0 \qquad x_0^2 - d = 0$$

On en déduit, que $(\delta - \alpha)x_0 - \beta + \gamma d = 0$. Les nombres $\delta - \alpha$ et $\gamma d - \beta$ sont des entiers. D'après la question IV.1 (irrationalité de $x_0 = \sqrt{d}$), ceci implique que $\delta - \alpha = \gamma d - \beta = 0$. On obtient donc $\alpha^2 - d\gamma^2 = \alpha\delta - b\gamma = \pm 1$. Bien entendu, cette relation a la solution triviale $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ que l'on élimine en supposant que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq \mp(1, 0, 0, 1)$.

Énoncé de la deuxième composition du CAPES interne 1998

Le problème qui suit comporte quatre parties. Il a pour objectif :
1) d'établir que la section d'un cône de révolution par un plan non parallèle à une génératrice, non perpendiculaire à l'axe et qui ne coupe qu'une des nappes du cône, est une ellipse qui a pour foyers les points de contact avec le plan de coupe des sphères «inscrite» et «exinscrite» (théorème de Dandelin) ;
2) d'étudier quelques propriétés des tangentes à une ellipse, notamment les premier et deuxième théorèmes de Poncelet.

Les parties **I** et **IV** ont pour cadre la géométrie plane. Les parties **II** et **III** sont, pour l'essentiel, consacrées à la géométrie dans l'espace.
Pour les parties **III** et **IV**, on considère comme connus la définition des coniques par foyer, directrice et excentricité ; les éléments de symétrie d'une ellipse ; les notions d'intérieur et d'extérieur d'une ellipse.
La partie **IV** peut être abordée et quasiment résolue, sans qu'il soit nécessaire de traiter les parties **II** et **III**, grâce au rappel de certains résultats établis en amont, et qui sont, à ce niveau, considérés comme acquis.
En annexe sont donnés les premiers éléments des figures pour chacune des parties **I** (annexe 1), **II** (annexe 2), **III** (annexe 3) et **IV** (annexe 4) qui devraient permettre au candidat de gagner du temps. *Ces annexes complétées devront être jointes à la copie.*

I

On considère un triangle SAA' tel que $SA < SA'$. Le cercle inscrit $(\mathcal{C})$ est tangent en α à (SA), en α' à (SA'), en F à (AA'). Le cercle exinscrit $(\mathcal{C}')$ dans le secteur $\widehat{ASA'}$ est tangent en β à (SA), en β' à (SA') et en F' à (AA'). On appelle I et I' respectivement les intersections de (AA') avec $(\alpha\alpha')$ et $(\beta\beta')$. W est le point de $(\mathcal{C})$ diamétralement opposé à F. La tangente en W à $(\mathcal{C})$ coupe $(\alpha\alpha')$ en i'. Les droites $(W\alpha)$ et $(W\alpha')$ coupent (AA') en a et a' respectivement.

I.1. Comparer les distances suivantes : $A\alpha$ et AF, $A\beta$ et AF', $A'F$ et $A'\alpha'$, $A'F'$ et $A'\beta'$, $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$. En déduire que les segments $[AA']$ et $[FF']$ ont même milieu O.

I.2. Montrer que les distances de A à $(\alpha\alpha')$ et de A' à $(\beta\beta')$ sont égales. En déduire que $IA = I'A'$ et que O est le milieu du segment $[II']$.

I.3. 2θ est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{ASA'}$, et ψ celle de l'angle $\widehat{AI\alpha}$. Montrer que :

$$\frac{AF}{AI} = \frac{A'F}{A'I} = \frac{\sin\psi}{\cos\theta}$$

(On pourra faire intervenir les relations métriques dans les triangles αAI et $\alpha' A'I$)

Pourquoi a-t-on $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AI}} = -\dfrac{\overline{A'F}}{\overline{A'I}}$?

Déduire de cette égalité que $OA^2 = \overline{OF}\cdot\overline{OI}$.

I.4. On considère l'homothétie de centre S qui envoie β sur α.
(i) Montrer que les points S, W et F' sont alignés.
(ii) Montrer que les points S, i' et I' sont alignés.

I.5. Montrer que $0 < \psi < \dfrac{\pi}{2} - \theta$.

I.6. Montrer que les points A et A' sont les milieux respectifs des segments $[Fa]$ et $[Fa']$ (on pourra par exemple considérer le triangle $F\alpha A$).
En déduire que F' est le milieu du segment $[aa']$.

I.7. On pose $OA = \lambda$. Justifier les égalités suivantes : $AA' = \alpha\beta = F'a = 2\lambda$.

II

On considère dans l'espace deux plans (P) et (Q) sécants selon une droite (D^*), S un point non situé sur (P) ou (Q). Dans le plan (π) passant par S et orthogonal à (D^*), on prend un point W non situé sur (P) ou (Q). On appelle I le point d'intersection de (D^*) et (π), F' celui de (Q) et de (SW). On appelle i' le point de (P) tel que les droites (Wi') et (IF') soient parallèles. La droite (Si') coupe (Q) en I'. On appelle $(D^{*'})$ la droite de (Q) passant par I' et parallèle à (D^*).

II.A.

II.A.1. Montrer que I, F' et I' sont alignés.

II.A.2. Montrer que le plan passant par S et contenant $(D^{*'})$ coupe (P) selon une droite $(\delta^{*'})$ parallèle à (D^*).

II.A.3. Montrer que le plan passant par W et contenant $(\delta^{*'})$ est parallèle à (Q).

II.B. Soit M un point de (Q), μ le point d'intersection de (SM) et de (P), m le point d'intersection de $(W\mu)$ et de (Q) (sous réserve d'existence), quand (SM) est

parallèle à (P), $(W\mu)$ est remplacée par la parallèle à (SM) issue de W. On pose $\tau(M) = m$.

II.B.1. τ est une application du plan (Q) privé d'une droite dans lui-même.
(i) Caractériser cette droite.
(ii) Montrer que les points m, M et F' sont alignés.

II.B.2. Soit (D) une droite du plan (Q) passant par M qui coupe (D^*) en R et $(D^{*'})$ en R'. La droite (SR') coupe (P) en r'.
Montrer successivement que :
(i) r' est sur la droite $(\delta^{*'})$;
(ii) les droites (Wr') et $(F'R')$ sont parallèles ;
(iii) le plan défini par W et (Rm) est parallèle à $(F'R')$.
En déduire que (Rm) et $(F'R')$ sont parallèles dans (Q).

II.B.3. Montrer que la transformée d'une droite (D) de (Q) non parallèle à (D^*) et privée d'un point est incluse dans une droite (d) que l'on précisera.

II.B.4. Il est facile de constater (et on admettra) que τ est injective. Étudions la surjectivité de τ. Soit m un point de (Q). On cherche M tel que $\tau(M) = m$. Montrer qu'il existe une droite (D_1) de (Q) telle que si m n'appartient pas à (D_1), M existe. On précisera cette droite.
En déduire que τ est une bijection de $(Q)\backslash(D^{*'})$ dans $(Q)\backslash(D_1)$.

II.B.5. On se place dans le plan (Q). On considère les droites (D^*), $(D^{*'})$ et le point F'. Soit M un point de $(Q)\backslash(D^{*'})$. Déduire de ce qui précède une construction simple de m (on pourra considérer une droite (D) passant par M et construire la droite (d) transformée de (D) par τ).

II.B.6. Construire la droite (D_1).

III

Soit un cône de révolution de sommet S et de demi-angle au sommet de mesure θ. Un plan (Q) non parallèle à une génératrice et non perpendiculaire à l'axe coupe le cône selon une courbe (Γ) que l'on cherche à déterminer. On supposera dans la suite que (Q) ne coupe qu'une des nappes du cône. On appelle (π) le plan de symétrie de la figure. On considère les sphères (Σ) et (Σ') tangentes au cône selon les cercles (γ) et (γ') respectivement et tangentes au plan (Q) en F et F' respectivement.
L'intersection de la figure précédente avec le plan (π) donne la configuration plane de la partie **I** dont on reprend les notations. Les intersections des plans (P) et (P') des cercles (γ) et (γ') avec le plan (Q) sont les droites (D^*) et $(D^{*'})$ respectivement. On appelle ψ la mesure de l'angle géométrique des plans (P) et (Q).
Pour la configuration liée aux points S, W et aux plans (P) et (Q), on reprend les notations de la partie **II**.
Soit M un point de (Γ), μ est le point de (γ) sur la génératrice (SM) et μ' celui de (γ') ; $(W\mu)$ coupe (Q) en m ; M^* et m_0 sont les projetés orthogonaux de M sur (D^*) et (P) respectivement.

III.1. Montrer successivement que :
(i) $MF = M\mu$;
(ii) $\dfrac{M\mu}{Mm_0} = \dfrac{1}{\cos\theta}$;
(iii) $\dfrac{Mm_0}{MM^*} = \sin\psi$;

(iv) En déduire que M appartient à une ellipse de foyer F et de directrice (D^*) dont on précisera l'excentricité.

(v) Par quel argument peut-on conclure que la courbe (Γ) est l'ellipse précédente ?

III.2. Comparer $\mu\mu'$ et $\alpha\beta$. En déduire que M est tel que

$$MF + MF' = \alpha\beta = 2\lambda.$$

III.3. Donner les foyers, les directrices, les sommets de (Γ).

III.4. On cherche maintenant la transformée de (Γ) par τ.

a. Soit $M^{*'}$ le projeté orthogonal de M sur $(D^{*'})$.
Montrer que $\dfrac{Mm}{MF'} = \dfrac{MM^*}{MM^{*'}}$.
En déduire que :
(i) $Mm = MF$;
(ii) M appartient au segment $[F'm]$.

b. *On rappelle le théorème de Ménélaüs : «Soit ABC un triangle. Si M, N, P sont trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB), distincts des sommets A, B et C du triangle, les points M, N, P sont alignés si et seulement si :* $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1$».
En appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle $SF'M$ coupé par la sécante $(W\mu)$, montrer que la distance de m à F' est constante.

c. En prenant $M = A$, montrer que $F'm = 2\lambda$. On note $(\mathcal{C})$ le cercle de centre F' et de rayon 2λ. Que dire des ensembles $\tau(\Gamma)$ et $(\mathcal{C})$?

d. On admet que le segment ayant pour extrémités F' et un point de $(\mathcal{C})$ a, avec l'ellipse (Γ), un unique point commun.
Montrer alors que $\tau^{-1}((\mathcal{C})) \subseteq (\Gamma)$. Conclure.

IV

On va utiliser la transformation τ pour démontrer quelques propriétés des ellipses. Dans ce qui suit on supposera que τ (et donc τ^{-1}) respecte les contacts (une courbe et sa tangente sont transformées en une courbe et sa tangente). Les notations sont celles des parties précédentes.

Dans le plan (Q) de **III**, on considère l'ellipse (Γ) intersection de (Q) et du cône de sommet S. On appelle F et F' les foyers de (Γ), (D^*) et $(D^{*'})$ les directrices associées. On appelle $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[aa']$. On sait que $(\mathcal{C}) = \tau(\Gamma)$.

IV.1. Soit m un point de $(\mathcal{C})$ distinct de a et a'. La tangente en m à $(\mathcal{C})$ coupe (D^*) en t.

(i) Construire le point M de (Γ) tel que $\tau(M) = m$ et la tangente en M à (Γ). Elle passe par t et coupe $(D^{*'})$ en T_1.

(ii) On considère le foyer F', la directrice $(D^{*'})$ et le segment $[MT_1]$. Montrer le théorème 1 suivant :
Théorème 1 : le segment de tangente situé entre le point de contact et la directrice est vu du foyer correspondant sous un angle droit.

(iii) En déduire que l'angle $\widehat{MFt}$ est droit. On sait par ailleurs que $Mm = MF$ (question III.4.a. (iii)). Montrer que les points m et F sont symétriques par rapport à la droite (Mt).

(iv) En déduire le théorème 2 suivant :
Théorème 2 : la tangente en un point M d'une ellipse de foyers F et F' (M n'appartenant pas à la droite (FF')) est une bissectrice extérieure du triangle MFF'.

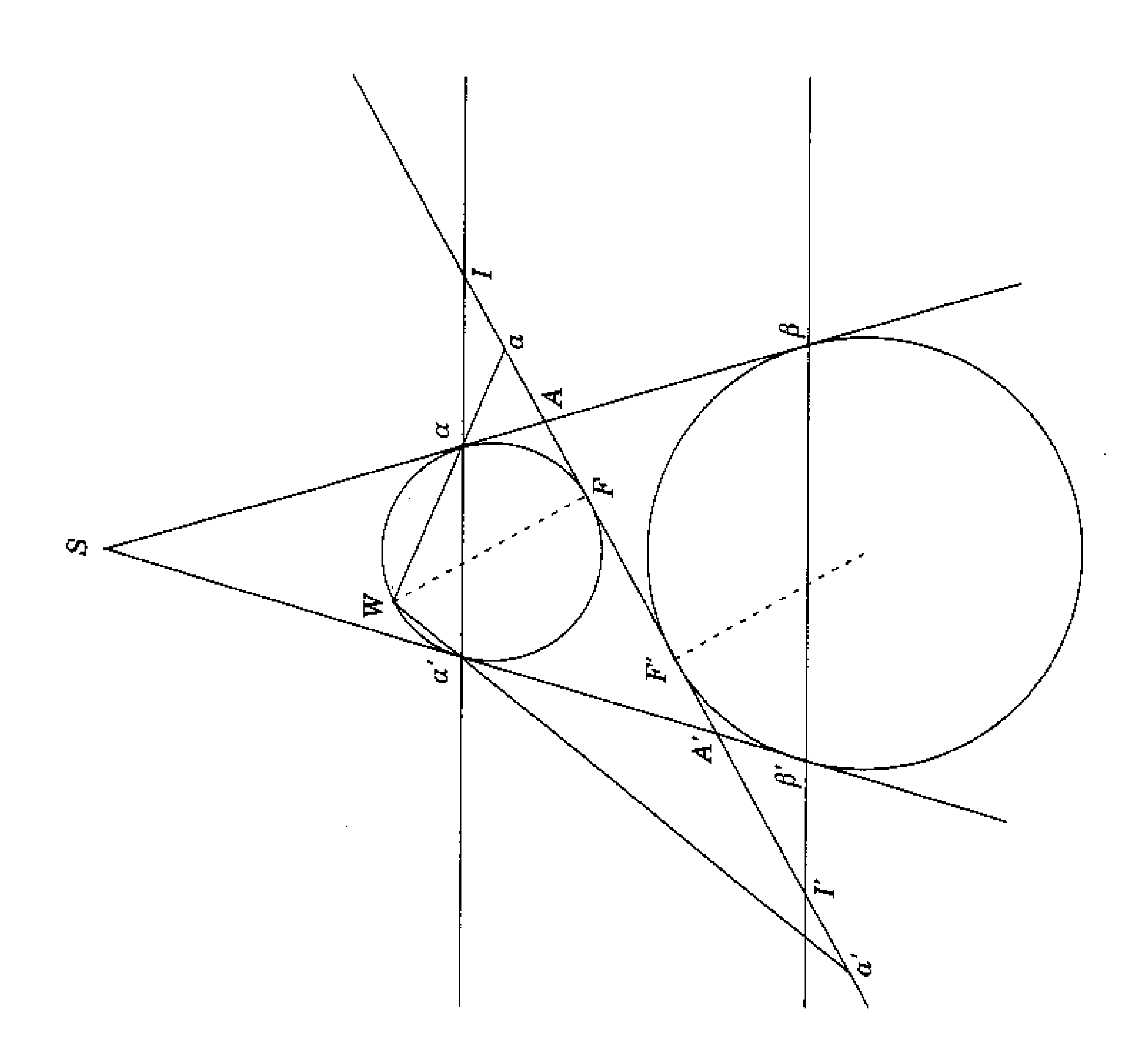
IV.2. Soit K un point de (Q) extérieur à (Γ) et non situé sur $(D^{*'})$.

a. Construire le point k, image de K par τ, les points de contact m et m' des tangentes issues de k à (C), les points M et M' tels que $\tau(M) = m$ et $\tau(M') = m'$. Montrer que la droite (KF) est bissectrice des droites (FM) et (FM').

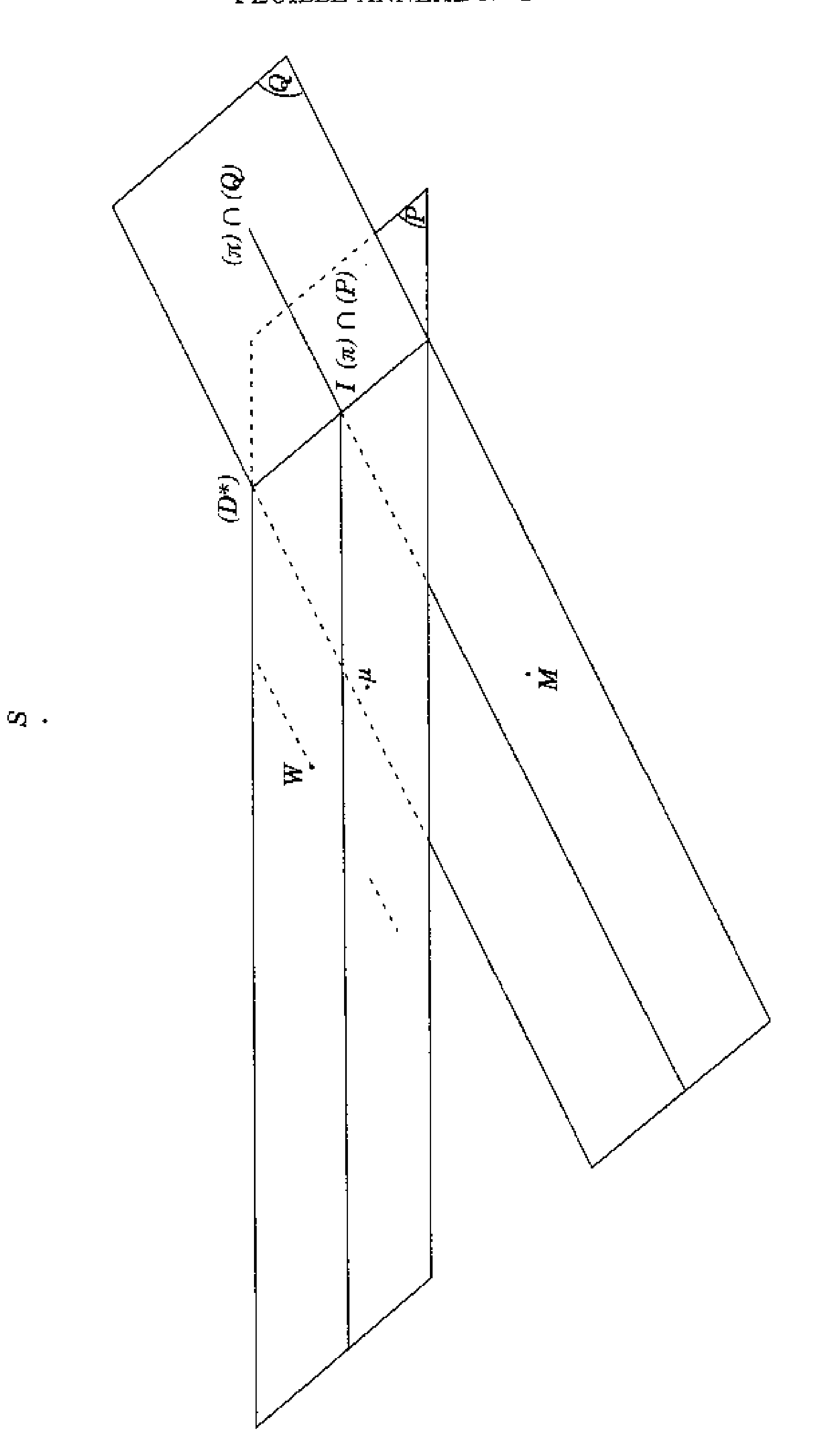
b. Démontrer le premier théorème de Poncelet :
Si d'un point K on mène les tangentes en M et M' à une ellipse de foyers F et F', la droite (KF') (resp. (KF)) est bissectrice des droites $(F'M)$ et $(F'M')$ (resp. (FM) et (FM')).

c. Le cercle de centre K passant par F, m et m' coupe la droite (kF') en I et J. Montrer que les droites (FI) et (FJ) sont les bissectrices des droites (Fm) et (Fm') et sont parallèles aux bissectrices des droites (KM) et (KM'). Montrer qu'elles sont aussi parallèles aux bissectrices des droites (KF) et (KF') (on remarquera que les triangles KFI et KFJ sont isocèles).
En déduire le deuxième théorème de Poncelet : les droites (KM) et (KM') d'une part et (KF) et (KF') d'autre part ont les mêmes bissectrices.

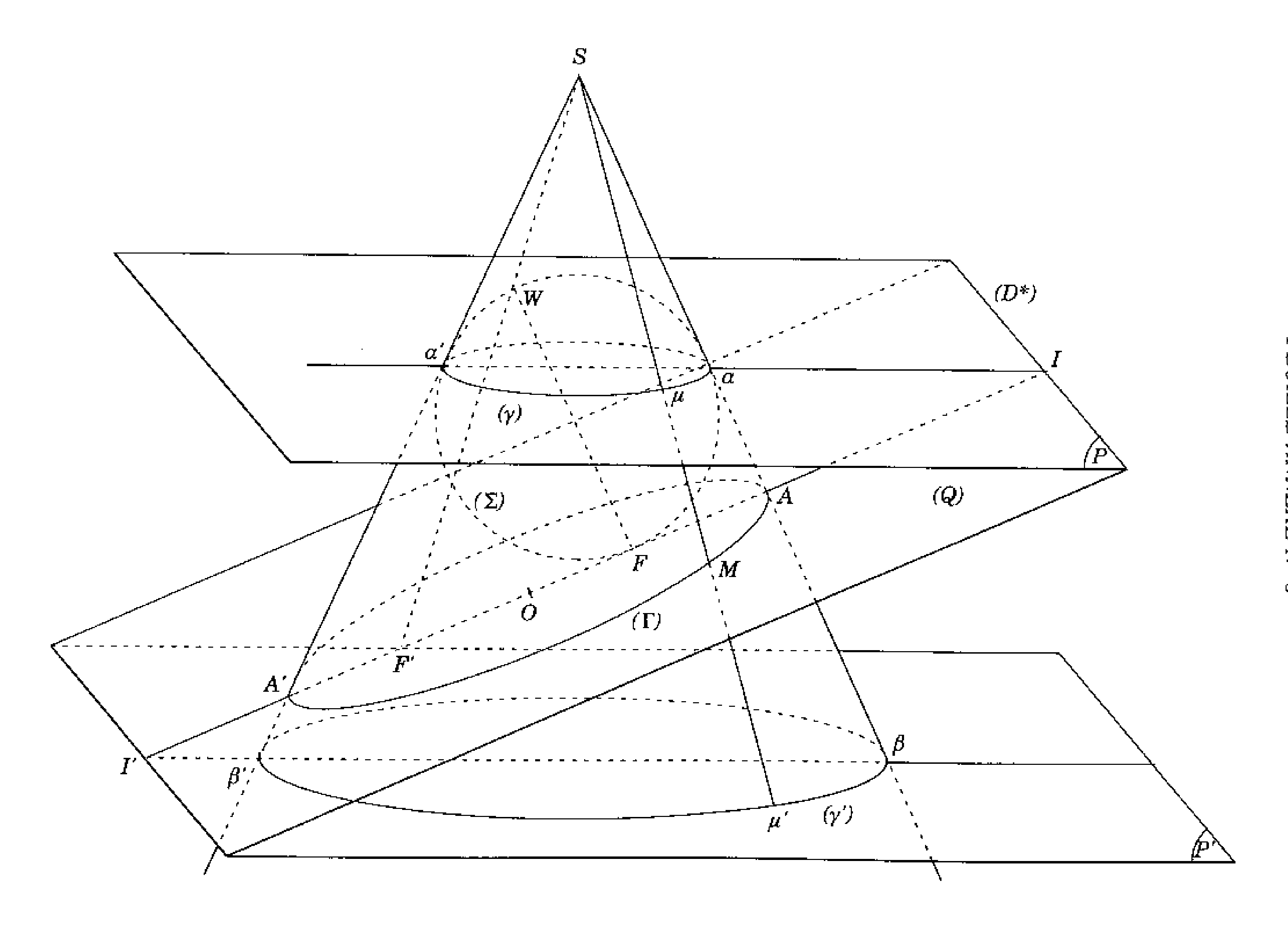
FEUILLE ANNEXE N° 1



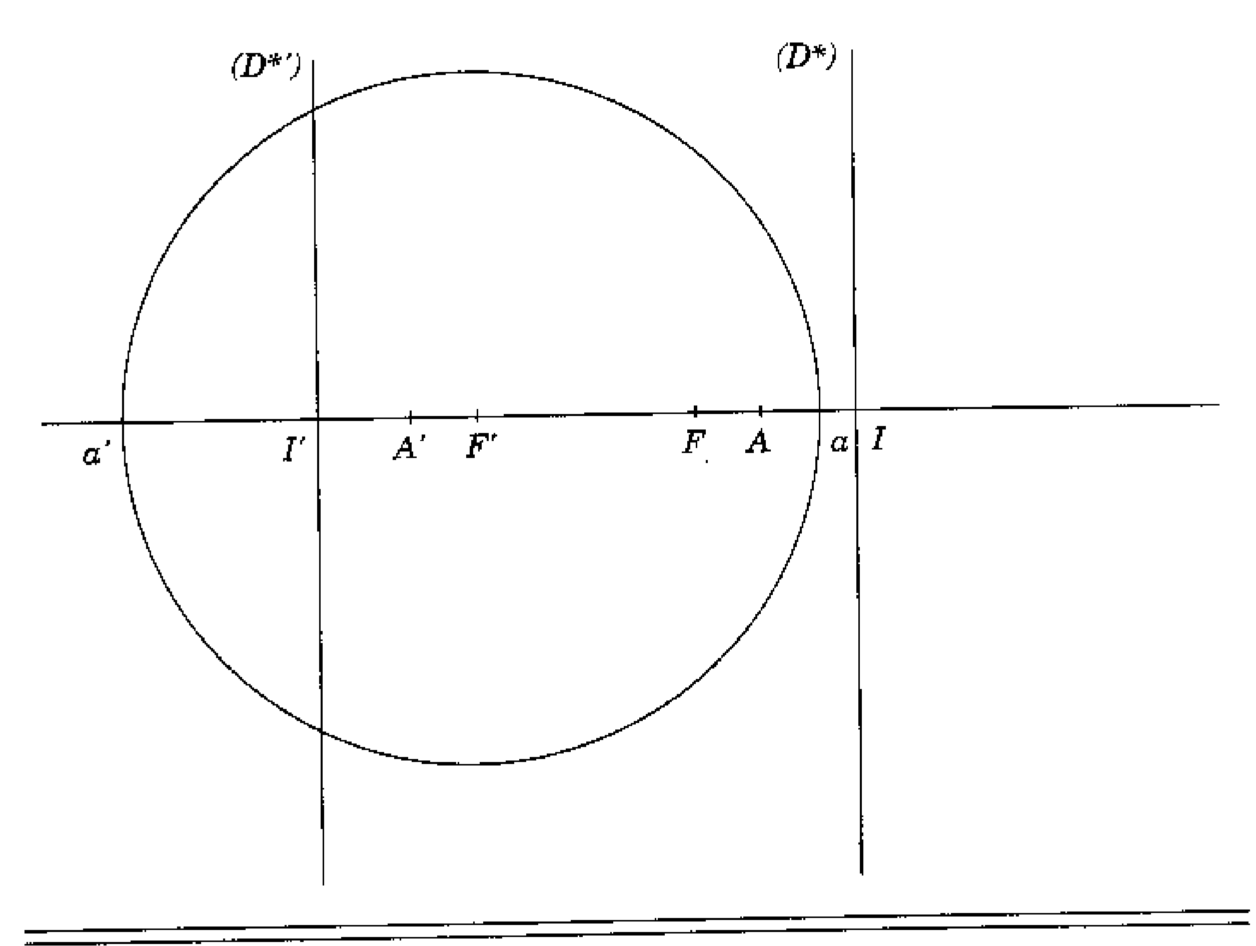
FEUILLE ANNEXE N° 2

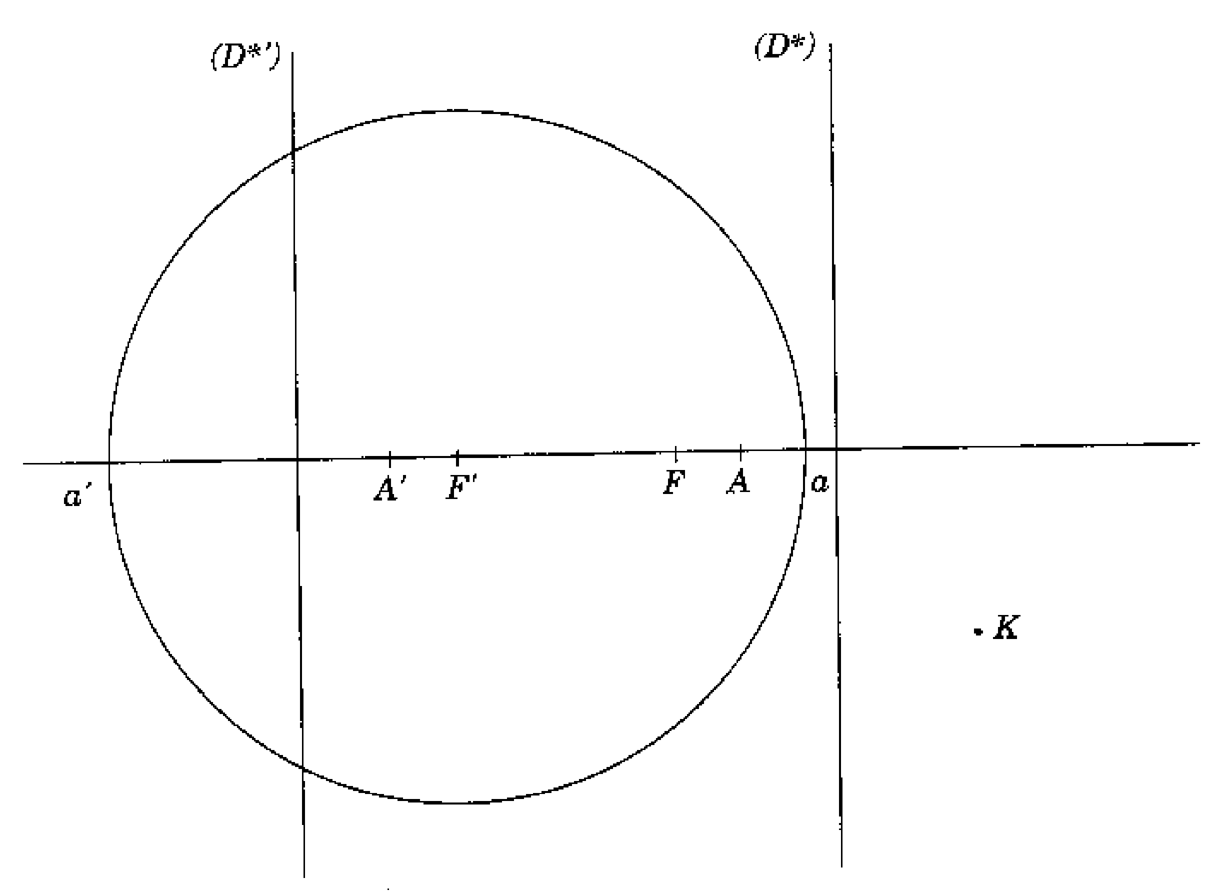


FEUILLE ANNEXE N° 3



FEUILLE ANNEXE N° 4





Université Pierre et Marie Curie

Préparation au capes interne de mathématiques

Pierre JARRAUD

Algèbre
(épreuve de février 1998)[1]

I

Figure : voir annexe 1

I.1. Nous allons utiliser plusieurs fois l'égalité des longueurs des tangentes issues d'un point extérieur à un cercle (on peut la démontrer par exemple avec le théorème de Pythagore).

On a

$$A\alpha = AF \text{ et } A\beta = AF' \text{ (tangentes issues de } A \text{ à } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C}')^2,$$
$$A'F = A'\alpha' \text{ et } A'F' = A'\beta' \text{ (tangentes issues de } A' \text{ à } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C}'),$$
$$S\alpha = S\alpha' \text{ et } S\beta = S\beta' \text{ (tangentes issues de } S \text{ à } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C}'),$$

d'où l'on déduit par différence $\alpha\beta = \alpha'\beta'$. Puis écrivant

$AF + AF' = A\alpha + A\beta = \alpha\beta$ et $A'F + A'F' = A'\alpha' + A'\beta' = \alpha'\beta'$

---

1 Pour de nombreuses questions, il y a d'autres solutions que celles de ce corrigé. Si le lecteur a une solution différente, il ne doit pas en déduire qu'elle est fausse.

2 Contrairement à l'énoncé et à certains glorieux ancêtres comme Lebesgue, nous suivons la pratique actuelle et ne mettons pas de parenthèses autour des noms d'ensembles, sauf, bien sûr, pour un sous-espace affine (par exemple une droite ou un plan) défini par des points.

on en déduit que $2AF+FF' = 2A'F'+FF'$ soit $AF = A'F'$ et les segments $[AA']$ et $[FF']$ ont même milieu : O.

I.2. Soit d (resp d') la distance de A (resp A') à la droite $(\alpha\alpha')$ (resp $(\beta\beta')$), utilisant les notations de la question suivante on a

$$d = A\alpha\cos\theta = AF\cos\theta \text{ et } d' = A'\beta\cos\theta = A'F'\cos\theta$$

donc $d = d'$. De même

$$d = IA\cos(\pi/2 - \psi) = IA\sin\psi \text{ et } d' = I'A'\sin\psi$$

d'où $IA = I'A'$ et O est le milieu du segment $[II']$.

I.3. Le calcul précédent montre que

$$\frac{AF}{AI} = \frac{A\alpha}{AI} = \frac{d}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\psi}{d} = \frac{\sin\psi}{\cos\theta} \text{ et de même pour } \frac{A'F}{A'I}.$$

La configuration de la figure ($SA < SA'$) fait que $\frac{\overline{AF}}{\overline{AI}} < 0$ et $\frac{\overline{A'F}}{\overline{A'I}} > 0$,

comme les valeurs absolues sont égales, on en déduit que $\frac{\overline{AF}}{\overline{AI}} = -\frac{\overline{A'F}}{\overline{A'I}}$.

Prenant les abscisses f, a, a', i de F, A, A', I sur la droite (AA') avec origine en O, on obtient (remarquant que $a' = -a$) :

$$\frac{f-a}{i-a} = -\frac{f+a}{i+a}$$

soit $0 = fi - ai + af - a^2 + fi - af + ia - a^2 = 2fi - 2a^2$

qui est la relation demandée : $OA^2 = \overline{OF}\cdot\overline{OI}$.

I.4. Soit h l'homothétie de centre S telle que $h(\beta) = \alpha$. Alors $h(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$.

(i) Appelons c et c' les centres des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Le droite $(c'F')$, orthogonale à (AA'), est transformée en une droite parallèle diamètre de $\mathcal{C}$: le diamètre de $\mathcal{C}$ orthogonal à (AA') : (Fc)

$h(F')$ est à la fois sur $\mathcal{C}$ et sur (cF), $h(F') = W$.

(ii) h transforme la tangente en F' en la tangente en W, et la droite $(\beta\beta')$ en la droite $(\alpha\alpha')$ donc en prenant l'intersection : $h(I') = i'$ et S, i', I' sont alignés.

I.5. Par A menons la parallèle à (SA'). Elle coupe $(\alpha\alpha')$ en J. La mesure de l'angle $\widehat{\alpha JA}$ est $\pi/2 - \theta$. Puisque la droite (AA') coupe les demi-droites $[SA)$ et $[SA')$ on a $\widehat{\alpha IA} < \widehat{\alpha JA}$ ce qui donne $\psi < \pi/2 - \theta$. L'inégalité $0 < \psi$ est triviale puisqu'il s'agit d'un angle géométrique non réduit à 0 $(SA < SA')$.

I.6. Le triangle $F\alpha a$ est rectangle car (WF) est un diamètre de $\mathcal{C}$ donc la médiatrice de $[\alpha F]$ coupe l'hypothénuse $[Fa]$ en son milieu et A, qui est sur cette médiatrice et sur l'hypothénuse, est donc le milieu de $[Fa]$.

Le même argument appliqué au triangle $F\alpha'a'$ montre que A' est le milieu de $[Fa']$.

On a alors les égalités

$F'a' = F'A' + A'a' = F'A' + A'F = 2A'F' + FF' = 2AF + FF' = F'A + Aa = F'a$

donc F' est le milieu du segment $[aa']$.

I.7 Comme O est le milieu de $[AA']$ on a $AA' = 2\lambda$ puis $\alpha\beta = AA' = 2\lambda$ et enfin $F'a = F'A + Aa = F'A + AF = AA' = 2\lambda$

II

Figure : voir annexe 2

Nous allons utiliser plusieurs fois l'argument d'alignement suivant : étant donné trois points A, B, C d'un plan P, s'ils appartiennent aussi à un plan Q, sécant à P, alors les trois points sont alignés (sur la droite d'intersection $P \bigcap Q$).

II.A.

II.A.1 I, I' et F' sont par définition dans le plan Q.

I est dans π. S, W donc la droite (SW) et F' sont dans π.

(Wi') est la droite parallèle à une droite de π, (IF'), menée par le point W de π donc (Wi') est dans π. Par suite i', donc (Si') et I' sont dans π.

Donc I, F' et I' sont alignés sur $Q \bigcap \pi$.

II.A.2 Soit $\delta^{*\prime}$ la droite parallèle à D^* menée par i', $\delta^{*\prime}$ est dans P car i' et D^* sont dans P .

Le plan $(S, D^{*\prime})$ défini par S et $D^{*\prime}$, contient S et I' donc (SI') et i'. Il contient alors la parallèle passant par i' à $D^{*\prime}$ et D^* : $\delta^{*\prime}$.

Cette droite est donc l'intersection des deux plans (qui sont sécants car S n'est pas dans P).

II.A.3. Le plan passant par W contenant $\delta^{*\prime}$ contient i', donc $(i'W)$ qui est parallèle à (IF'). Il contient donc deux droites sécantes (δ'^* et $(i'W)$) parallèles à des droites de Q : il est parallèle à Q.

II.B.

II.B.1.

(i) $\tau(M)$ est défini sauf si la droite $(W\mu)$ est parallèle à Q, c'est à dire est dans le plan parallèle à Q passant par W : le plan (W, δ'^*), si et

seulement si μ n'est pas sur l'intersection de ce plan et du plan P , la droite δ'^*, si et seulement si M est sur la parallèle à D^* par F' : $D^{*\prime}$.

(ii) m, F', M sont dans le plan (SWM) et dans le plan Q donc dans leur intersection. Ces points sont alignés.

Si (SM) est parallèle à P, le plan (SWM) contient F', M et m car (Wm) est parallèle à (SM) donc F', M, m sont sur la droite $(SWM)\bigcap P$.

II.B.2.

(i) r' est dans le plan $(SI'R')$ et dans le plan P donc sur leur droite d'intersection (S n'est pas dans P donc les plans sont sécants).

$\delta^{*\prime}$ est dans $(SI'R')$ car cette droite est parallèle à la droite $(I'R') = D^{*\prime}$ et contient le point i'. Donc $(SI'R')\bigcap P = \delta^{*\prime}$ et r' est sur cette droite.

(ii) Soit h l'homothétie de centre S telle que $h(i') = I'$. Alors $h(r') = R'$ et $h(W) = F'$ (à cause du parallèlisme de $(i'r')$, $(I'R')$ d'une part et $(i'W)$, $(I'F')$ de l'autre). Donc les droites (Wr') et $(R'F')$ sont parallèles.

(iii) r', μ et R sont alignés car dans $P\bigcap(SMR)$, on en déduit que r', W, m, R sont coplanaires , on vient de voir que la droite $(R'F')$ est parallèle à (Wr'), donc est parallèle à une droite du plan défini par W et(Rm), elle n'est pas contenue dans ce plan (sinon ce plan serait le plan Q) donc elle lui est parallèle.

Comme les doites (Rm) et $(F'R')$ sont coplanaires (dans Q) et ne peuvent avoir de point commun (elles sont dans deux plans parallèles) elles sont parallèles.

II.B.3. Soit D une droite de Q non parallèle à D^*, elle coupe D^* en R et $D^{*\prime}$ en R'. D'après la question question précédente, si M est un point de D d'image m , (Rm) et $(F'R')$ sont parallèles, donc m appartient à la droite d parallèle à $(F'R')$ par R.

Il faut bien sûr supposer $M \notin D\bigcap D^{*\prime}$.

II.B.4.

Si m est donné dans Q , on peut trouver un μ dans P tel que $(W\mu)$ coupe Q en m sauf si (Wm) est parallèle à P[3]. Le problème alors est de savoir s'il existe un M tel que (SM) coupe P en μ : c'est bien le cas sauf si $(S\mu)$ est parallèle à Q donc si μ est sur la droite Δ' intersection de P et du plan parallèle à Q passant par S, cela correspond à m dans l'intersection de Q et du plan passant par W et contenant Δ'.

Voir figure 1

Précisons cette intersection, c'est une droite parallèle à D^*, orthogonale à π. Pour la caractériser il suffit de déterminer son intersection avec π.

[3] Le cas $(Wm)//P$ correspond au cas (SM) parallèle à P et ne pose pas de problème.

Par S on mène la parallèle à (IF'), elle coupe P (ou (Ii')) en J'. La droite $(J'W)$ coupe Q (ou (IF')) en J : D_1 est la droite passant par J et orthogonale à π. Les homothéties h de centre S et h' de centre J' telles que $h(W) = F'$ et $h'(W) = J$ ont le même rapport k (le rapport des distances de S et J' aux droites $(i'W)$ et $(I'J)$). On en déduit que $\overrightarrow{IJ} = k \cdot \overrightarrow{i'W} = \overrightarrow{I'F'}$. Ce qui détermine J.

τ est donc surjective de $Q \backslash D^{*\prime}$ dans $Q \backslash D_1$.

II.B.5

Soit M un point de $Q \backslash D^{*\prime}$, prenons une droite D passant par M et coupant D^* en R et $D^{*\prime}$ en R'. On choisit D ne passant par F'. L'image par τ de D est d parallèle à $(F'R')$ passant par R. Alors m est l'intersection de $(F'M)$ et d (ces droites ne sont pas parallèles car R' n'est pas sur $(F'M)$).

Cas particulier : $M = F'$, $(F'M)$ n'est pas définie mais la construction est évidente car alors $m = F'$.

Voir figure 2

II.B.6. La construction de D_1 est évidente à partir de la remarque faite en **4**.

III

Figure : voir annexe 3

Pour avoir la configuration de la partie **I**, il faut (ce que l'énoncé ne précise pas clairement) supposer que l'on prend pour W le point diamétralement opposé à F sur la sphère Σ.

III.1

(i) $MF = M\mu$ car ce sont deux tangentes issues du point M extérieur à Σ (et de même $MF' = M\mu'$) ;

(ii) $\dfrac{M\mu}{Mm_0} = \dfrac{1}{\cos\theta}$: définition de θ ;

(iii) $\dfrac{Mm_0}{MM^*} = \sin\psi$: définition de ψ ;

(iv) En faisant le rapport on obtient que $\dfrac{MF}{MM^*} = \dfrac{\sin\psi}{\cos\theta}$. M appartient donc à l'ellipse de foyer F, de directrice D^* et d'excentricité[4] $\dfrac{\sin\psi}{\cos\theta}$.

[4] Inférieure à 1 d'après **I.5**.

(v) On sait (c'est la définition depuis plus de 2000 ans) que l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan est une conique, la courbe Γ est donc une conique, contenue dans l'ellipse précédente, elle lui est égale.

III.2. Appelons Δ l'axe du cône. Il existe une rotation d'axe Δ telle que α ait pour image μ , alors β a pour image μ' et on en déduit que $\mu\mu' = \alpha\beta = 2\lambda$

On a alors $MF + MF' = M\mu + M\mu' = \mu\mu' = 2\lambda$.

III.3. Les foyers sont F et F', les directrices D^* et (symétrie par rapport au milieu O de $[FF']$) $D^{*\prime}$, enfin les sommets (principaux) sont les points A et A'.

III.4.

a. D'après la définition de m et la partie **II**, (M^*m) et $(F'M^{*\prime})$ sont parallèles donc en appliquant le théorème de Thalès : $\dfrac{Mm}{MF'} = \dfrac{MM^*}{MM^{*\prime}}$,

soit $\dfrac{Mm}{MM^*} = \dfrac{MF'}{MM^{*\prime}} = \dfrac{MF}{MM^*}$. On en déduit que

(i) $Mm = MF$,

(ii) (on sait déja que M, m et F' sont alignés) M est sur le segment $[F'm]$ puisque M est sur le segment $[M^*M^{*\prime}]$.

b. En appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle $SF'M$ coupé par la sécante $(W\mu)$ on a

$$\frac{\overline{mM}}{\overline{mF'}} \cdot \frac{\overline{\mu S}}{\overline{\mu M}} \cdot \frac{\overline{WF'}}{\overline{WS}} = 1$$

or $\mu M = MF = Mm$ et μS, WF' et WS sont constantes, on en déduit que mF' est constante.

c. Prenons $M = A$, $\mu = \alpha$ et $m = a$ (notations du **I**). $F'a = 2\lambda$ est alors l'égalité **I.7.**

Il est alors clair que si M est sur Γ, $m = \tau(M)$ est sur $\mathcal{C}$ et donc $\tau(\Gamma) \subset \mathcal{C}$.

d. Soit n un point de $\mathcal{C}$, on admet (ce qui n'est pas évident) que le segment $[F'n]$ a un unique point commun (appelons le M) avec l'ellipse Γ. Soit $m = \tau(M)$, m est sur le diamètre $(F'M)$ et M appartient à $[F'm]$ donc $m = n$ et $\tau^{-1}(\mathcal{C}) \subset \Gamma$. On a une double inclusion d'où l'égalité $\mathcal{S} = \tau(\Gamma)$.

IV[5]

Figure : voir annexe 4

IV.1.

(i) Le point M cherché est sur la droite $(F'm)$, d'autre part si la droite dont la tangente en m à $\mathcal{C}$ est l'image coupe $D^{*\prime}$ en T_1 et D^* en T, on a que $T = t$ et que $(F'T_1)$ est parallèle à (mt). On obtient donc M en prenant l'intersection de $(F'm)$ et de la parallèle à (mT) par F'. La tangente à Γ est alors (tT_1).

(ii) Comme $(F'T_1)$ est parallèle à (tm), elle est perpendiculaire à $(F'M)$ et l'angle $\widehat{T_1F'M}$ est droit on a donc montré que

> le segment de tangente situé entre le point de contact et la directrice est vu du foyer correspondant sous un angle droit.

(iii) Appliquant ce résultat à F et D^*, l'angle $\widehat{MFt}$ est droit. Comme $Mm = MF$, d'après le premier cas d'égalité[6] des triangles rectangles (un côté et l'hypothénuse égaux) les triangles MFt et Mmt sont égaux et donc F et m sont symétriques par rapport à la droite (Mt).

(iv) Cela démontre que

> la tangente en un point M (non sur l'axe focal) d'une ellipse de foyers F et F' est bissectrice (extérieure) du triangle MFF'.

IV.2.

a. Pour construire k on utilise la technique de **II.B.5**, puis on mène de k les tangentes à $\mathcal{C}$, on note m et m' les points de contact de ces tangents à $\mathcal{C}$. La construction de M et M' se fait en prenant l'image inverse par τ des tangentes puis leur intersection avec $(F'm)$ et $(F'm')$. $(F'k)$ est bissectrice des droites $(F'm)$ et $(F'm')$, ce qui peut se dire $(F'K)$ est bissectrice des droites $(F'M)$ et $(F'M')$. En permutant le rôle de F et F', c'est le résultat demandé.

b. On vient donc de montrer (*modulo ce qui a été admis, et n'est pas trivial*) le premier théorème de Poncelet car si τ respecte les contacts,

---

5 La solution présentée ici utilise les résultats démontrés aux questions précédentes et pas seulement ceux cités dans les énoncés. La vérification de l'assertion : "la partie **IV** peut être abordée et quasiment résolue sans qu'il soit nécessaire de traiter les parties **II** et **III** ... " est laissée au lecteur.

6 Si on ne veut pas utiliser cette terminologie 'rétro', bien accordée à l'énoncé, on peut dire que le théorème de Pythagore montre que $Ft = mt$ et que les triangles MFt et Mmt sont isométriques.

(km) et (km') étant les tangentes à C menées par k, (KM) et (KM') sont les tangentes à Γ issues de K.

c. m et m' sont symétriques par rapport à $(F'k) = (IJ)$ donc les arcs $\overset{\frown}{Jm}$ et $\overset{\frown}{Jm'}$ sont égaux ce qui implique l'égalité des angles inscrits qui les interceptent : par exemple $\widehat{m'FJ}$ et $\widehat{mFJ}$ donc (FJ) est bissectrice des droites (Fm) et (Fm') (et aussi (FI), puisque (FI) et (FJ) sont perpendiculaires).

Voir figure 3

Grâce à la symétrie évoquée plus haut, la droite (Fm) et la tangente en M, (MK), sont orthogonales, de même pour (Fm') et $(M'K)$. Donc les couples de droites $((Fm), (Fm'))$ d'une part et $((KM), (KM'))$ de l'autre ont des bissectrices parallèles (vectoriellement, on passe d'un couple à l'autre par une rotation d'angle $\pi/2$ qui laisse invariante globalement l'union des bissectrices).

Comme le triangle KFI est isocèle, sa base (FI) est parallèle à une bissectrice des droites $(KI) = (KF')$ et (KF) (de même pour (FJ) en utilisant KFJ).

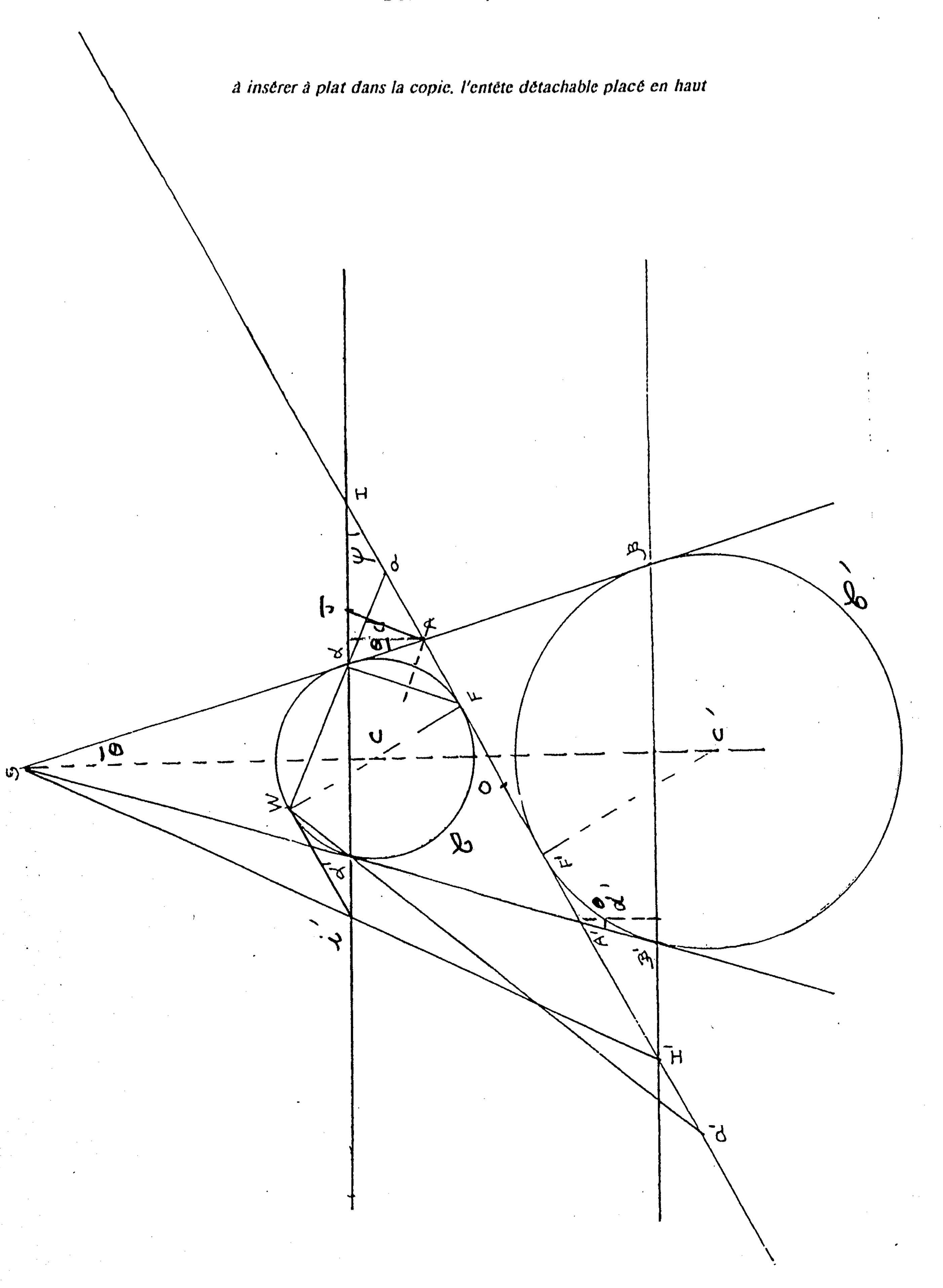
Si K est sur $D^{*\prime}$ par symétrie on se ramène au cas K sur D^* et on a donc montré

> Si K est un point extérieur à une ellipse de foyers F et F', si on appelle M et M' les points de contact alors les droites (KM) et (KM') d'une part et (KF) et (KF') de l'autre ont les mêmes bissectrices.

FEUILLE ANNEXE N° 1

Document–réponse

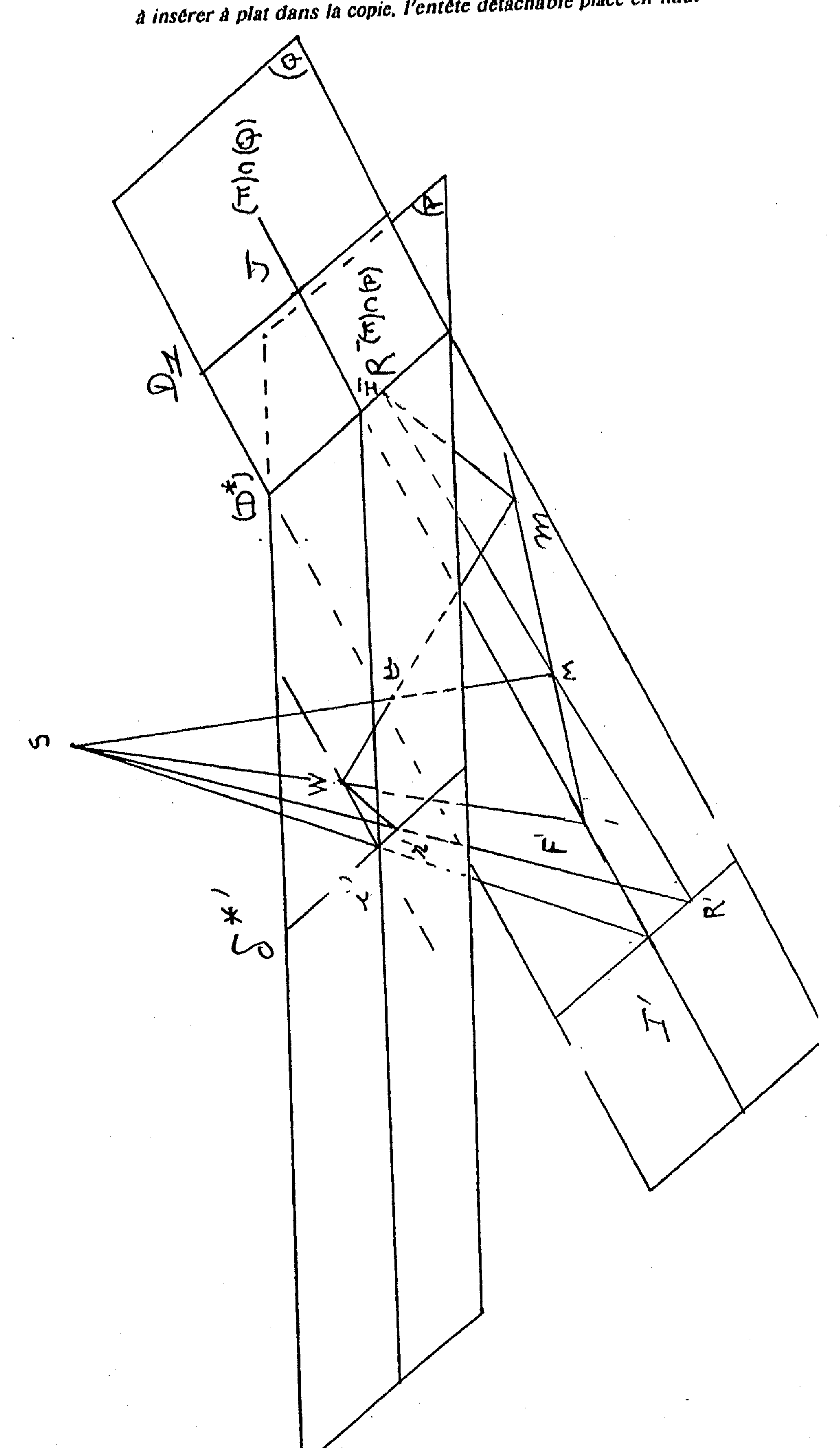
à insérer à plat dans la copie, l'entête détachable placé en haut



FEUILLE ANNEXE N° 2

Document–réponse

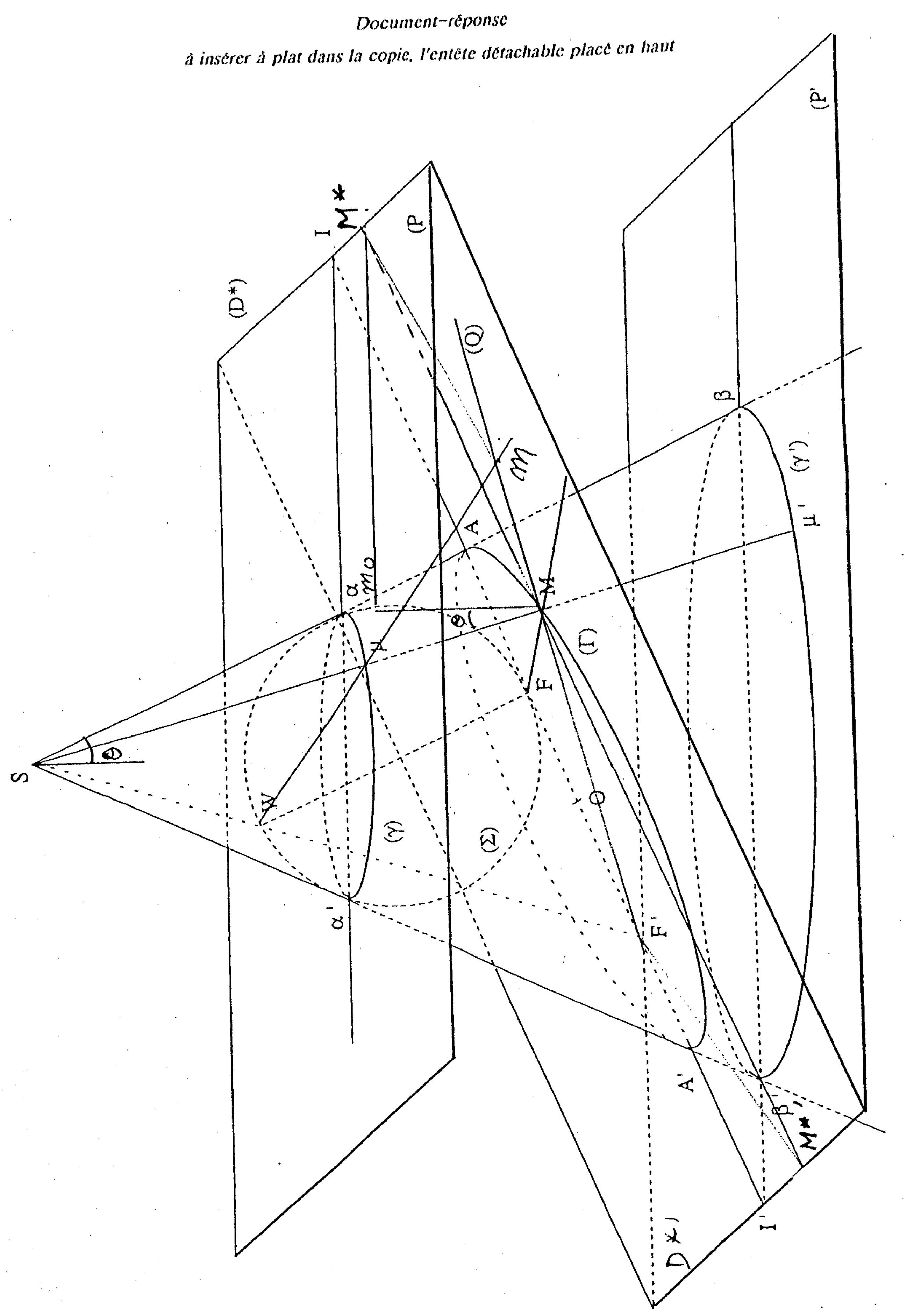
à insérer à plat dans la copie, l'entête détachable placé en haut



FEUILLE ANNEXE N° 3

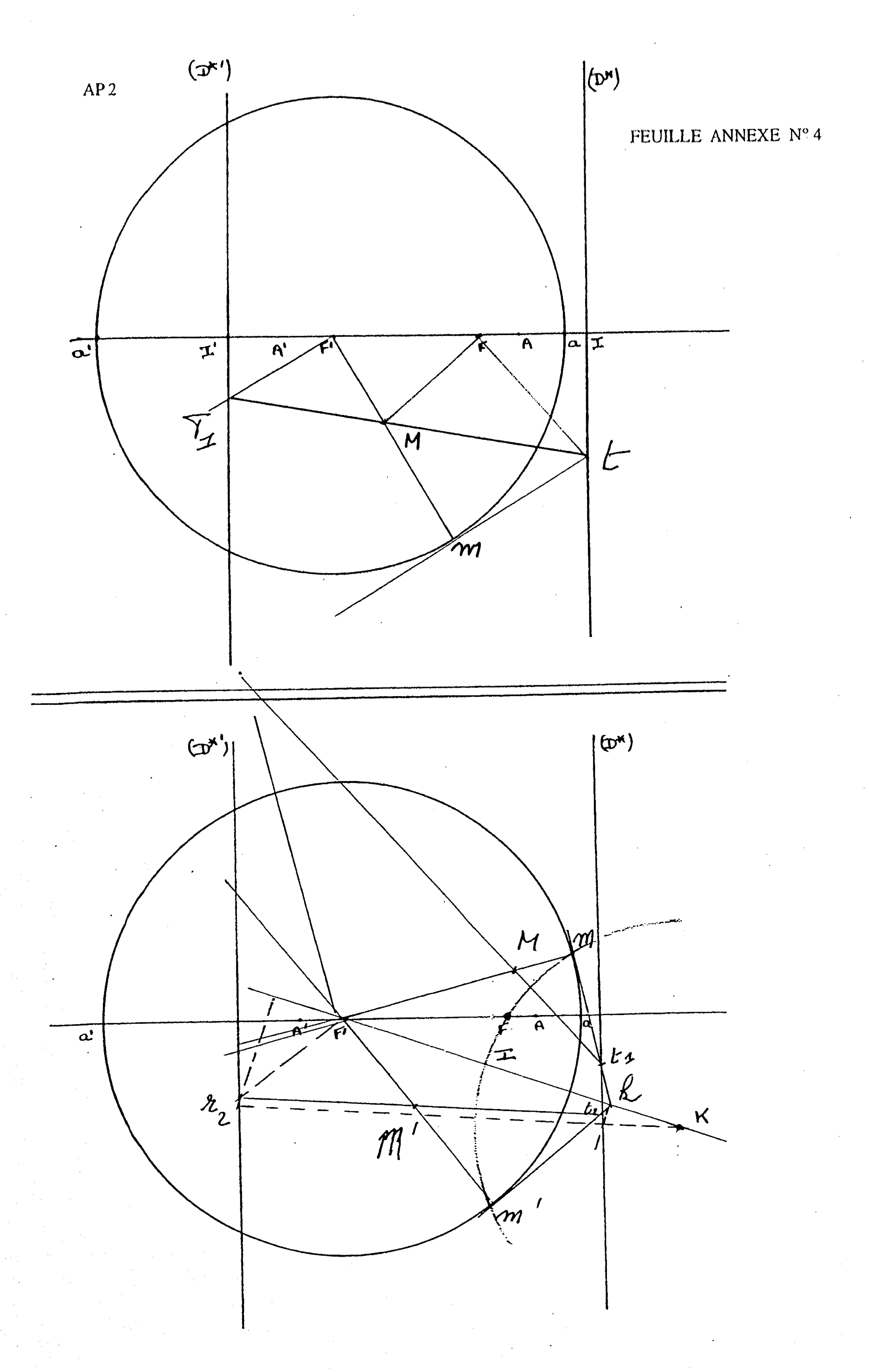
Document–réponse

à insérer à plat dans la copie, l'entête détachable placé en haut



AP 2

FEUILLE ANNEXE N° 4



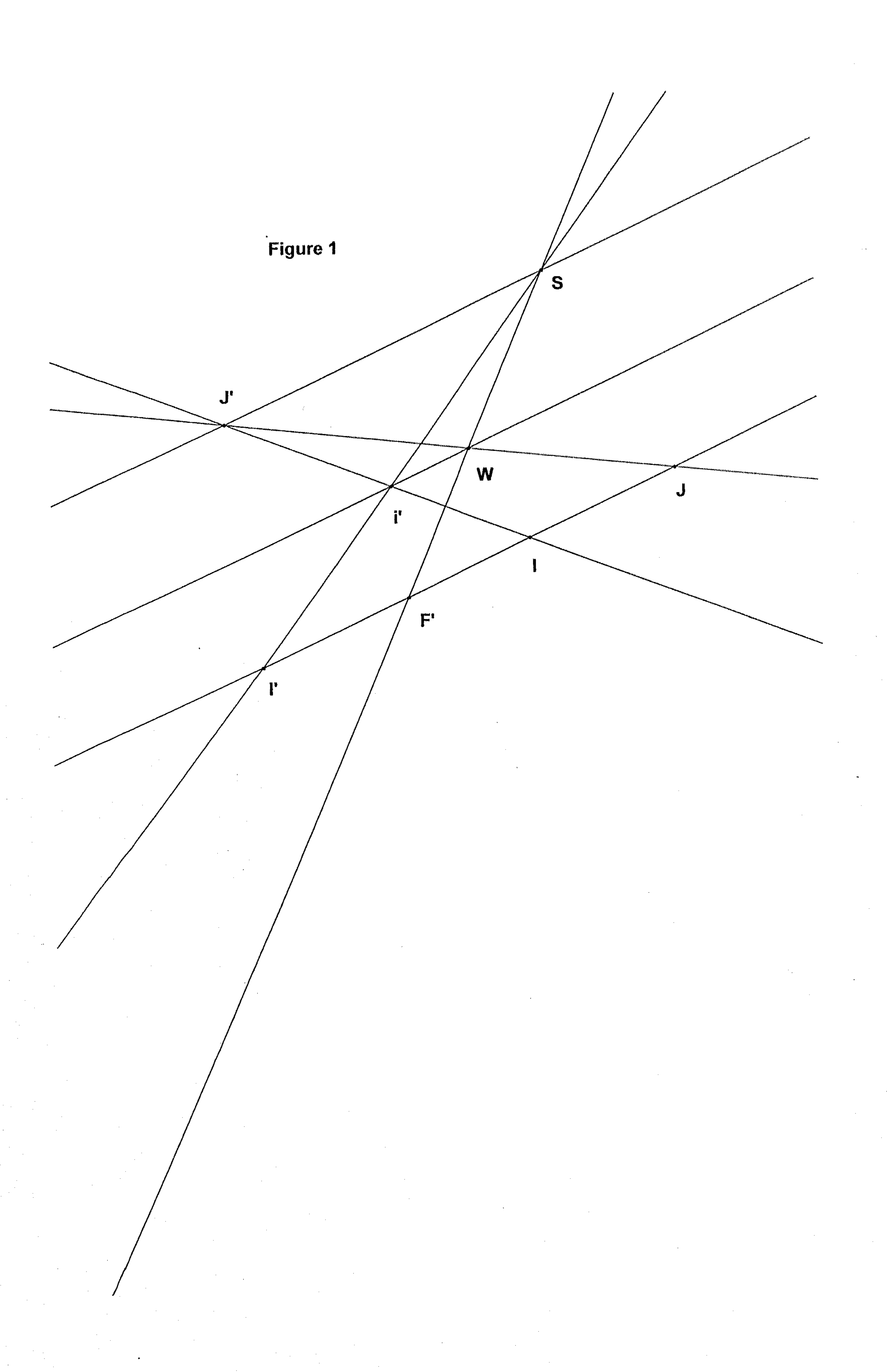


Figure 1
S
J'
W
J
i'
I
F'
I'

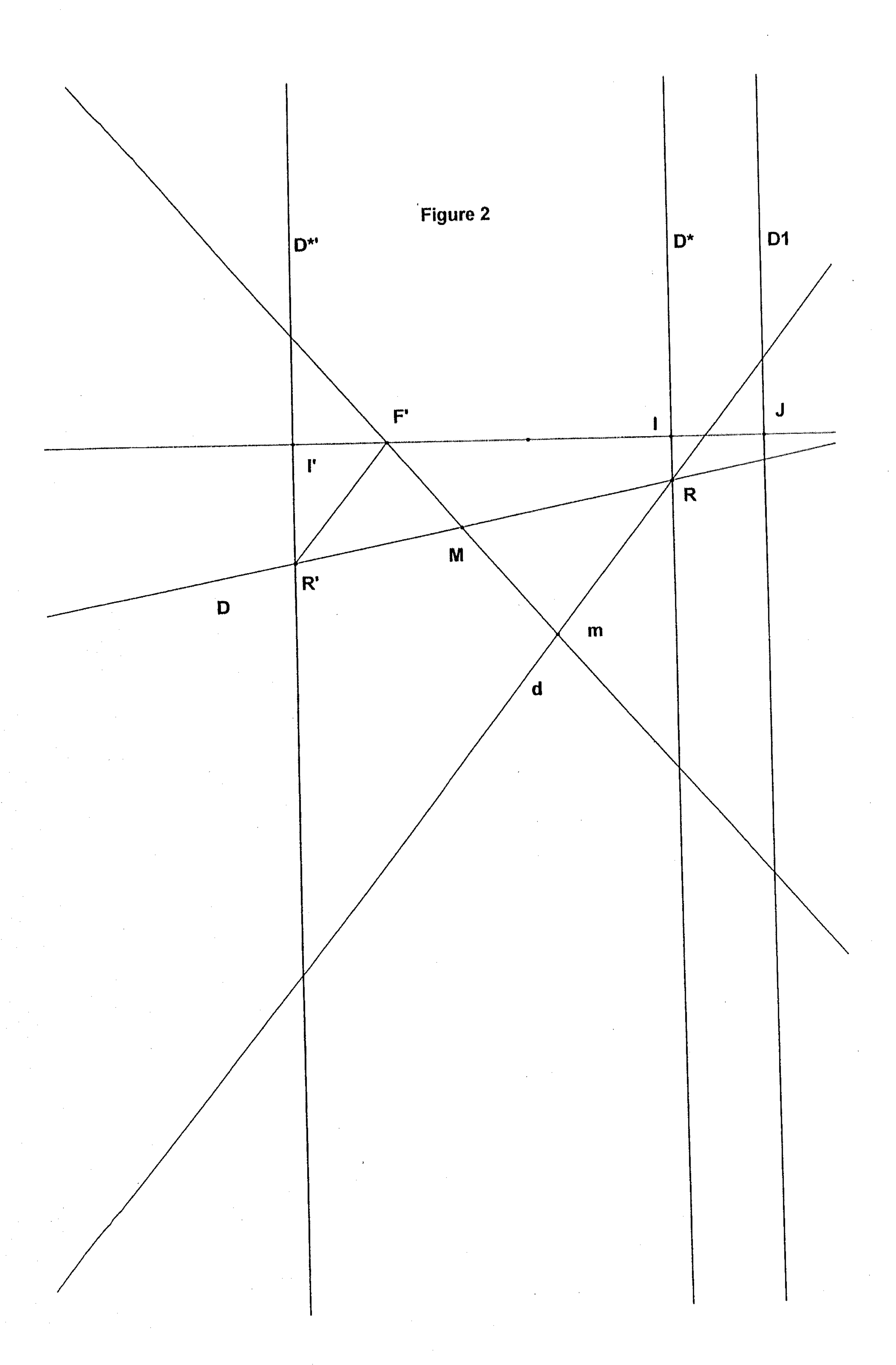


Figure 2
D*'
D*
D1
F'
I
J
I'
R
M
R'
D
m
d

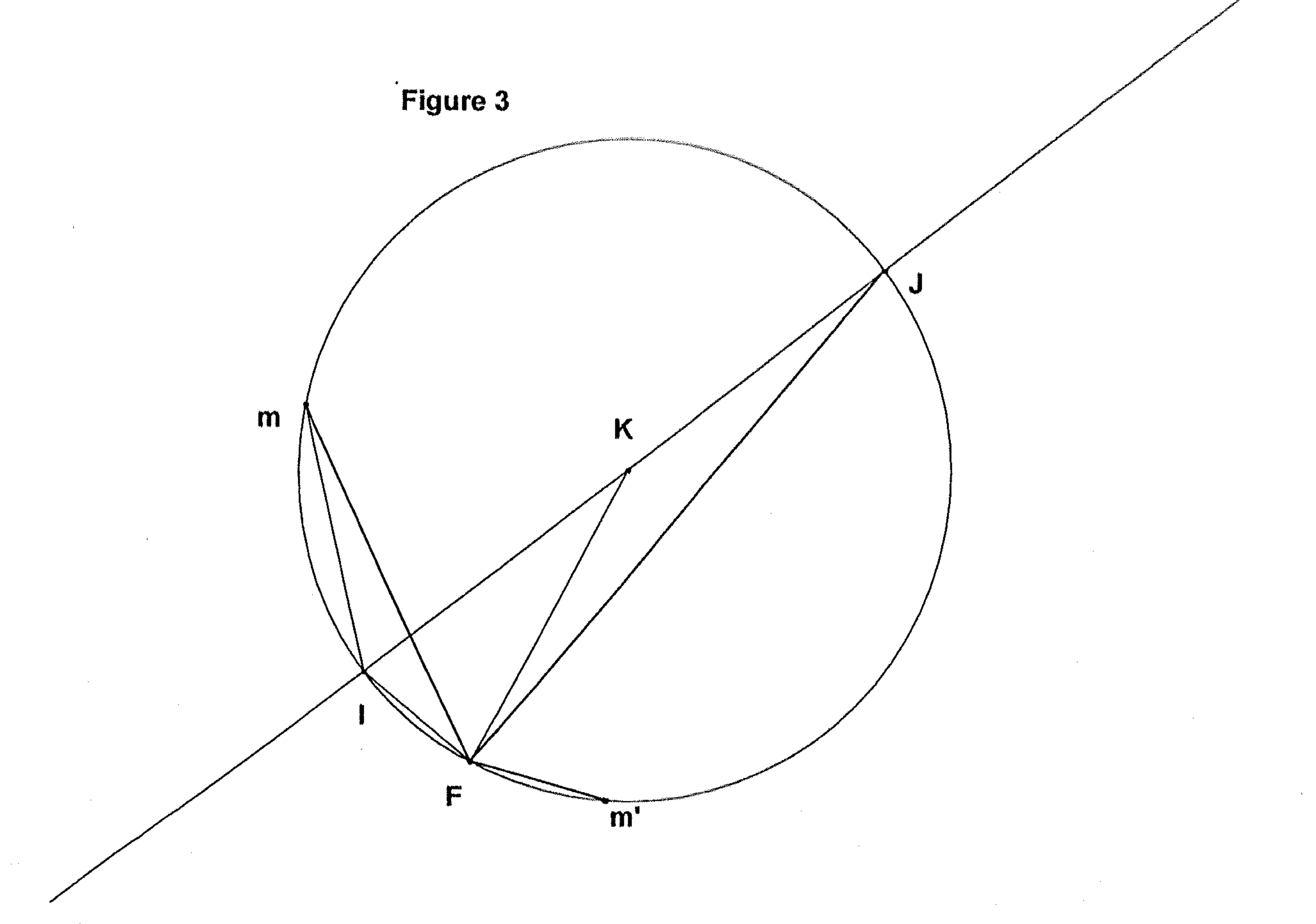


Figure 3
m
K
J
I
F
m'

CAPES interne de Mathématiques
session 1999
première composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [capesint99comp1e]

APPROXIMATION DE LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES ET DE FONCTIONS CIRCULAIRES

Au Livre I de sa « Composition mathématique » (l'*Almageste*, rédigée au IIe siècle), Claude Ptolémée entreprend la construction explicite d'une table donnant la longueur d'une corde d'un cercle, dont le diamètre a pour mesure 120 et dont la circonférence est partagée en 360 parties égales, en fonction de l'arc sous-tendu.

La détermination de la longueur des cordes, puis des lignes trigonométriques, donna, au cours des siècles, matière à de très nombreux travaux. Les parties I et II proposent d'examiner quelques techniques d'approximation. Dans la partie III, on examine quelques résultats cités ou mis à jour par Claude Ptolémée. Les trois parties sont indépendantes.

I

Étude de méthodes d'approximation du sinus et du cosinus

Dans cette partie, on suppose que les fonctions circulaires ont été introduites au niveau d'un enseignement de lycée, par exemple par l'image de l'enroulement d'un fil, que le lien avec la géométrie a été fait (les formules d'addition sont connues, les éléments de symétrie des courbes représentatives aussi). *On admet :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (*).$$

1. Montrer que (*) permet d'établir que, pour tout x réel, il existe une fonction ε telle que :

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{et pour tout } h \text{ réel} \quad \cos(x+h) - \cos x = -h \sin x + h\,\varepsilon(h)$$

et que les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en tout point x.

2. ***Étude d'un schéma d'approximation décentré.***

A tout réel t on associe les suites $(C_n(t))$ et $(S_n(t))$ définies par les relations :

$$C_0(t) = 1, \qquad S_0(t) = 0 \qquad \text{et pour tout entier } n \geqslant 0 \quad \begin{cases} C_{n+1}(t) = C_n(t) - t\,S_n(t) \\ S_{n+1}(t) = t\,C_n(t) + S_n(t). \end{cases}$$

a. On s'attend à ce que, pour t petit, $C_n(t)$ et $S_n(t)$ soient des valeurs approchées de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$. Pourquoi? (On pourra introduire les suites $(U_n(t))$ et $(V_n(t))$ où $U_n(t) = \cos nt$ et $V_n(t) = \sin nt$ et les caractériser sous une forme proche de celle de $(C_n(t))$ et de $(S_n(t))$.)

b. Calculer $C_3(t)$ et $S_3(t)$.

c. Montrer que, pour tout x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \leqslant x.$$

d. Vérifier que, pour tout x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant S_3\left(\frac{x}{3}\right) \leqslant x.$$

A-t-on $S_3\left(\frac{x}{3}\right) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$?

e. Montrer qu'il existe un nombre complexe $z(t)$ tel que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$C_n(t) + i\,S_n(t) = \left(z(t)\right)^n.$$

Montrer que pour tout t différent de 0 on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(C_n(t)\right)^2 + \left((S_n(t)\right)^2\right] = +\infty.$$

En quoi ce résultat est-il inquiétant pour la qualité des approximations obtenues?

f. Étudier le comportement de la suite de fonctions, définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Peut-on espérer que pour n assez grand et x fixé, $C_n\left(\frac{x}{n}\right)$ et $S_n\left(\frac{x}{n}\right)$ soient proches de $\cos x$ et $\sin x$?

g. Donner les valeurs obtenues à l'aide d'une calculatrice programmable pour $S_6\left(\frac{\pi}{180}\right)$ et $S_{12}\left(\frac{\pi}{360}\right)$.

Comparer avec la valeur fournie par la calculatrice pour $\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)$.

3. ***Étude d'un schéma centré.***

Dans le schéma précédent, on passe du point de coordonnées $(x, \cos x)$ au point de coordonnées $\left(x+h, \overline{\cos(x+h)}\right)$, où $\overline{\cos(x+h)}$ est une valeur approchée de $\cos(x+h)$, en suivant la tangente à la courbe représentative du cosinus au point de coordonnées $(x, \cos x)$. Dans le schéma centré proposé à présent, on suit la droite passant par le point de coordonnées $(x, \cos x)$ et ayant pour pente la demi-somme des pentes des tangentes aux points de coordonnées respectives $(x, \cos x)$ et $(x+h, \cos(x+h))$.

a. En utilisant un encadrement analogue à celui du I.2.c., justifier, pour tout x réel, l'existence d'une fonction η telle que $\lim_{h \to 0} \eta(h) = 0$ et que pour tout h réel on ait :

$$\cos(x+h) - \cos x + \frac{h}{2}\left(\sin(x+h) + \sin x\right) = h^2\,\eta(h).$$

b. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, les relations :

$\Gamma_0(t) = 1$, $\quad \Sigma_0(t) = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$ $\begin{cases} 2\,\Gamma_{n+1}(t) + t\,\Sigma_{n+1}(t) = 2\,\Gamma_n(t) - t\,\Sigma_n(t) \\ t\,\Gamma_{n+1}(t) - 2\,\Sigma_{n+1}(t) = -t\,\Gamma_n(t) - 2\,\Sigma_n(t) \end{cases}$

permettent de définir deux suites $\left(\Gamma_n(t)\right)$ et $\left(\Sigma_n(t)\right)$.

c. Calculer $\Gamma_1(t)$ et $\Sigma_1(t)$.

d. Montrer que, pour tout t strictement positif, il existe un nombre complexe $\zeta(t)$ tel que pour tout entier naturel n on ait :

$$\Gamma_n(t) + i\,\Sigma_n(t) = \left(\zeta(t)\right)^n.$$

e. Quel est le module de $\zeta(t)$?

f. Donner la valeur obtenue à l'aide d'une calculatrice pour $\Sigma_6\left(\frac{\pi}{180}\right)$.

4. ***Algorithme utilisant la duplication.***

La valeur approchée $\Gamma_1(t)$ obtenue pour $\cos t$ grâce au schéma précédent, pour de très petites valeurs de t, est utilisée dans cet algorithme comme point de départ.

a. Montrer que, pour tout t élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$$

$$\text{et} \quad 1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \Gamma_1(t) \leqslant 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}.$$

b. On note f l'application $x \to 2x^2 - 1$. On pose $f_1 = f$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on définit f_n par $f_n = f_{n-1} \circ f$. Justifier que $f_n(\cos t) = \cos(2^n t)$.

c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, $f_5\left(\Gamma_1\left(\frac{\pi}{192}\right)\right)$. La valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ obtenue paraît-elle satisfaisante ?

d. Calculer de même $f_{20}\left(\Gamma_1\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{20}}\right)\right)$. Comment expliquer ce résultat ?

II

Approximation du sinus comme solution d'une équation différentielle

Dans cette partie, la fonction sinus est définie comme l'unique solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants satisfaisant deux données initiales. Une suite est construite sur le modèle de cette équation.

1. On se propose tout d'abord de reétablir un résultat classique.

   On considère l'équation différentielle (E) dont les solutions sont des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables :

$$f + f'' = 0 \qquad (E).$$

   a. Montrer que l'ensemble F des solutions de cette équation est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que les fonctions sin et cos sont des solutions de cette équation.

   c. Montrer que le sous-espace vectoriel de F engendré par sin et cos est de dimension 2.

   d. Pour toute fonction ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable, montrer qu'on peut trouver deux fonctions u et v, dérivables, telles que pour tout réel t on ait :

$$\begin{cases} u(t)\cos t + v(t)\sin t = \phi(t) \\ -u(t)\sin t + v(t)\cos t = \phi'(t). \end{cases}$$

   e. En déduire que les fonctions sin et cos constituent une base de F.

   f. En déduire finalement que la fonction sin est la seule solution de (E) satisfaisant les conditions initiales

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1 .$$

2. ***Mise en place d'un schéma d'approximation.***

   a. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable, montrer que, pour tout x réel, il existe une fonction v vérifiant :

$$\lim_{h \to 0} v(h) = 0 \qquad \text{et pour tout } h \text{ réel} \qquad f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2 f''(x) + h^2 v(h) .$$

   b. Pour tout réel t, on définit la suite $(s_n(t))$, qu'on notera plus simplement (s_n), par :

$$s_0 = 0, \qquad s_1 = t \qquad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1, \quad s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} = -t^2 s_n .$$

   Justifier que, comme dans la partie I, on peut s'attendre à ce que $s_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$ soit une valeur approchée de $\sin x$.

   c. Montrer qu'il existe deux constantes A et B et un nombre complexe z de module 1, dépendant de t, tel que pour t suffisamment petit les termes de la suite (s_n) s'écrivent :

$$s_n = A z^n + B \bar{z}^n.$$

   (On pourra utiliser le fait que l'ensemble des suites réelles (s_n) vérifiant $s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} = -t^2 s_n$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$).

   d. On note θ un argument de z dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Exprimer le nombre $s_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$ en fonction de θ, puis en fonction de x et de n.

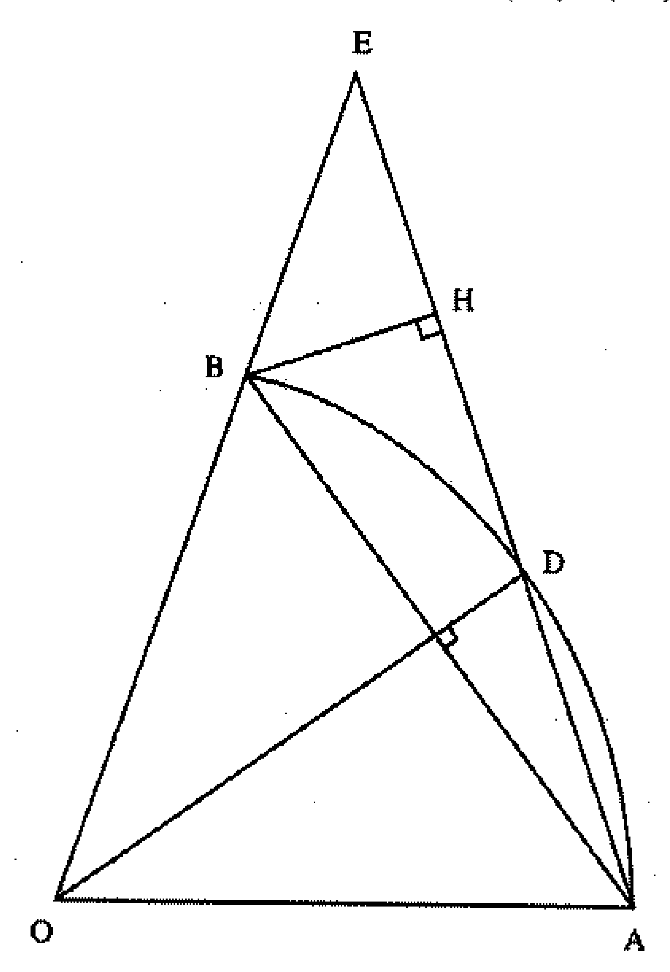
III

La « Table des droites inscrites dans le cercle » de Claude Ptolémée

Dans cette partie, on examine quelques résultats cités ou mis à jour par Claude Ptolémée et qui interviennent dans la confection de la table. Le langage utilisé est moderne. Le candidat n'a pas à craindre les anachronismes, hormis naturellement l'utilisation prématurée de lignes trigonométriques... On n'utilisera donc pas les fonctions sin, cos et tan dans les parties III.1., III.2. et III.3.

1. ***Détermination de quelques valeurs exactes (exemples).***

Dans la figure ci-dessous, [AB] est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon [OA], [AD] celui d'un décagone régulier inscrit dans le même cercle. (OB) et (AD) se coupent en E.



a. Montrer que les triangles OAB, DAB, EOA et BDE sont isocèles.

b. En déduire que ED = OA et que EB = DA.

c. Montrer que $\dfrac{AD}{OA} = \dfrac{ED}{OE}$.

Montrer que cette égalité permet un calcul explicite de DA en fonction du rayon OA du cercle.

d. En considérant des triangles rectangles de sommet H, montrer que :

$$AB^2 = OA^2 + AD^2.$$

« Le carré du côté du pentagone est égal à la somme des carrés des côtés du décagone et de l'hexagone inscrits dans le même cercle ».

e. Pour DA, Ptolémée fournit la valeur $37^p\,4'\,55''$, où ^{p} indique l'unité (le diamètre est 120^p), le système utilisé étant sexagésimal. Estimer la qualité de l'approximation.

2. ***Le théorème de Ptolémée (version moderne).***

On donne quatre points trois à trois non alignés A, B, C, D et la similitude directe σ de centre A transformant B en C. On pose :

$$\sigma(D) = E.$$

a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe τ transformant B en D et C en E et que cette similitude a pour centre A.

b. En déduire que : $AC \cdot BD = AB \cdot CE$

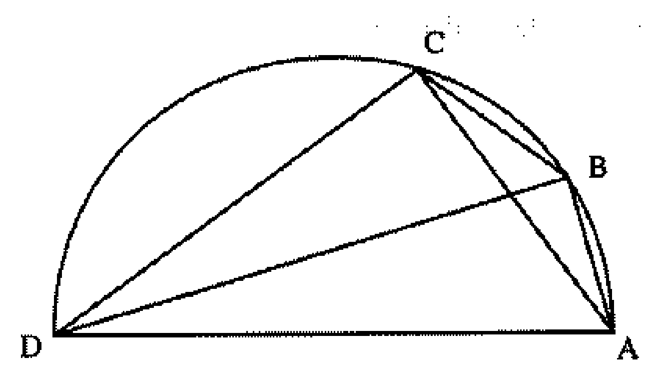
et que : $AD \cdot BC = AB \cdot DE$,

puis que : $AC \cdot BD + AD \cdot BC \geqslant AB \cdot CD$.

c. Montrer finalement que *le quadrilatère convexe ACBD est inscriptible si et seulement si :*

$$AC \cdot BD + AD \cdot BC = AB \cdot CD.$$

3. ***Une formule pour les différences d'arcs.***



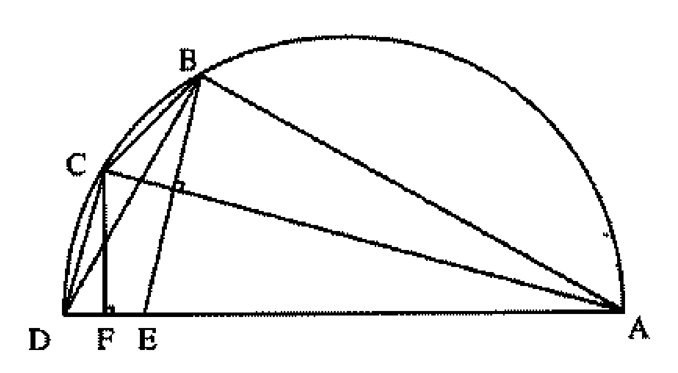
a. Montrer que l'application dans la situation ci-dessus ([AD] est un diamètre donné) du théorème précédent permet le calcul explicite de la corde BC lorsque AB et AC sont connues.

b. Dans le cercle de référence (voir introduction), quelle est la longueur de la corde sous-tendant un arc de 12° ? On donnera le résultat dans le système sexagésimal utilisé par Ptolémée.

Le théorème précédent permet également d'établir une formule pour les sommes d'arcs. Elle n'est pas demandée ici.

4. ***Une formule de dichotomie.***

Dans la figure ci-dessous, [AD] est un diamètre et les cordes [BC] et [CD] sont de même mesure. E est l'image de B dans la réflexion d'axe (AC) et F le projeté orthogonal de C sur (AD). Exprimer CD en fonction de BD et de AD.



Ptolémée indique qu'il peut, grâce à ces résultats, parvenir à déterminer la longueur de la corde sous-tendant un angle de un degré et demi, et même bien sûr de la moitié de cette valeur, mais qu'il ne parvient pas à déterminer exactement la longueur de la corde sous-tendant un angle de un degré (ce qui se ramènerait à un problème de trisection). Il met donc en œuvre un procédé d'approximation.

Tournez la page S.V.P.

5. ***Recherche d'une valeur approchée de la corde sous-tendant un angle de un degré.***

Des comparaisons fines de rapports d'aires conduisent Ptolémée au résultat suivant, admis dans ce problème :

Deux arcs inégaux, $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$, dont $\widehat{AB}$ est le plus petit, sont sous-tendus par des cordes croissant en moindre raison :

$$\text{si } \widehat{AB} < \widehat{BC} \text{ alors } \frac{AB}{BC} > \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} \qquad (**).$$

a. Appliquer le résultat précédent à la corde AB sous-tendant l'arc de 1°, sachant que les mesures trouvées par Ptolémée pour les cordes AC et AG sous-tendant respectivement les arcs de 1°30′ et 45′ sont :

$$AC \cong 1^p\,34'\,15'' \quad \text{et} \quad AG \cong 0^p\,47'\,8''.$$

b. Estimer la qualité de l'approximation.

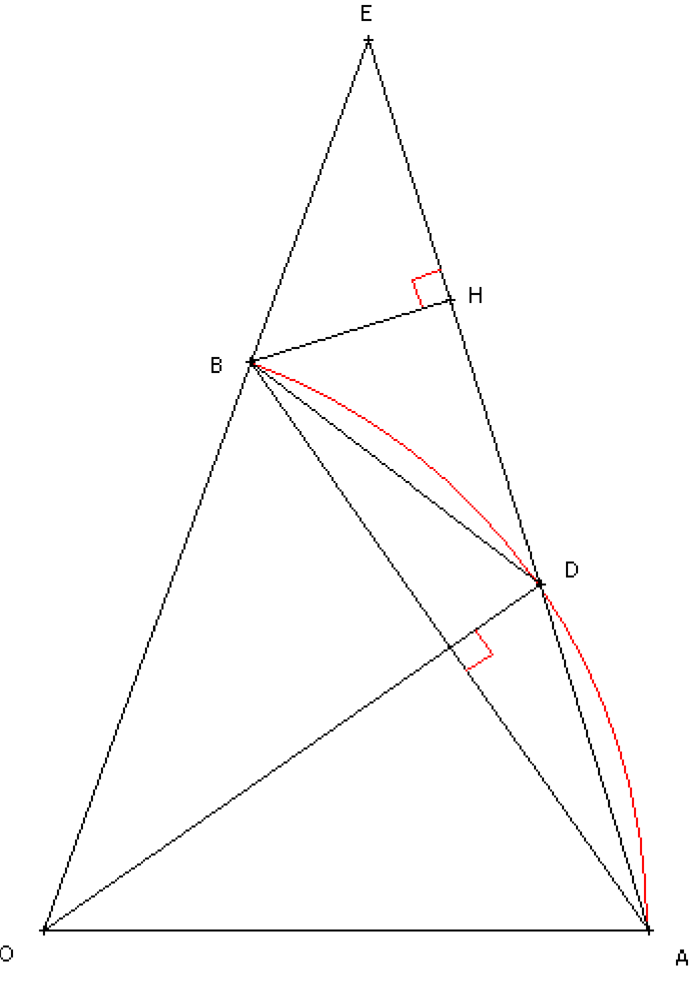
c. En étudiant les variations de la fonction $x \to \dfrac{x}{\sin x}$ sur un intervalle convenable, et en utilisant un langage moderne, retrouver le résultat (**).

Partie III

La "table des droites inscrites dans le cercle" de Claude Ptolémée

On se place dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{i},\ \vec{j})$.
Dans tout le problème, on confondra angle et mesure d'un angle.

1. Détermination de quelques valeurs exactes (exemples).
   $\mathscr{C}$ est le cercle de rayon $[OA]$.
   $[AB]$ est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans $\mathscr{C}$ et $[AD]$ le côté d'un décagone régulier inscrit dans $\mathscr{C}$.
   Les droites (OB) et (AD) se coupent en *E*.



1.a. Les triangles *OAB*, *DAB*, *EOA* et *BDE* sont isocèles.

- Triangle *OAB*
  A et *B* appartiennent au cercle $\mathscr{C}$, donc $OA=OB$.
  Le triangle *OAB* est donc isocèle en *O*.

- Triangle *DAB*
  $[AD]$ est le côté d'un décagone régulier inscrit dans $\mathscr{C}$, donc l'angle $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OD})=\dfrac{2\pi}{10}=\dfrac{\pi}{5}$.

$[AB]$ est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans $\mathscr{C}$, donc l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})=\frac{2\pi}{5}$.
On en déduit que la droite (OD) est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
Or le triangle *OAB* est isocèle en *O*, donc (OD) est également médiatrice de $[AB]$.
Par suite, dans le triangle *BAD*, la médiatrice du côté $[AB]$ passe par le sommet *D*.
On en déduit que le triangle BAD est isocèle en *D*.

- Triangle *EOA*
  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})=\frac{2\pi}{5}$.

  $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO})$, donc, d'après la relation de Chasles,
  $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$.

  Or *OAB* est isocèle, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}\left[\pi-(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right]=\frac{1}{2}\left[\pi-\frac{2\pi}{5}\right]=\frac{3\pi}{10}$.

  L'angle inscrit $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$ et l'angle au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ interceptent la même corde $[AB]$.
  Par suite, $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})=\frac{1}{2}\left[2\pi-(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right]=\pi-\frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{2}=\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}$.

  Or *DAB* est isocèle, donc $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}\left[\pi-(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})\right]=\frac{\pi}{10}$.

  On obtient donc : $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})=\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{10}=\frac{2\pi}{5}$ et par suite :

  $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

  On en déduit que le triangle *EOA* est isocèle en *E*.

- Triangle *BDE*
  Les angles $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DB})$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$ sont supplémentaires puisque *A*, *D* et *E* sont alignés, on a donc $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DB})=\pi-(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})=\pi-\frac{4\pi}{5}=\frac{\pi}{5}$.

  Par ailleurs, *EOA* est isocèle et donc $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})=\frac{2\pi}{5}$. Par suite :

  $(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EA})=\pi-2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})=\pi-\frac{4\pi}{5}=\frac{\pi}{5}$.

  On a donc $(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EA})=(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DB})$ et par conséquent le triangle *BDE* est isocèle en *B*.

1.b. $ED=OA$ et $EB=DA$.
D'après III.1.2.,
EOA est isocèle en *E*, donc $EO=EA$, donc $EB+BO=ED+DA$.
DAB est isocèle en *D*, donc $DA=DB$.
BDE est isocèle en *B*, donc $BD=BE$.
On en déduit $DA=EB$.

EOA est isocèle en E, donc $EO=EA$, donc $EB+BO=ED+DA$.
Comme $DA=EB$, $BO=ED$.
Or $[OA]$, et $[OB]$ sont des rayons du cercle $\mathscr{C}$, donc $OA=OB$.
On en déduit $OA=ED$.

1.c. $\dfrac{AD}{OA}=\dfrac{ED}{OE}$.

- Montrons que les triangles ODB et EOA sont semblables :

  On sait que (OD) est bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, donc $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})=\dfrac{\pi}{5}$.
  Or $(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EA})=\dfrac{\pi}{5}$, donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EA})$.

  $[OB]$ et $[OD]$ sont des rayons de $\mathscr{C}$, donc $OB=OD$: le triangle ODB est isocèle en O. Par suite, $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DO})=\dfrac{1}{2}\left[\pi-(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})\right]=\dfrac{2\pi}{5}=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})=(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO})$.

  Les triangles ODB et EOA ont leurs angles égaux deux à deux, ils sont donc semblables.

  On en déduit $\dfrac{OB}{OE}=\dfrac{BD}{OA}$.

  Or, d'après III.1.2, $BD=AD$ et $OB=ED$, donc $\dfrac{AD}{OA}=\dfrac{ED}{OE}$.

- Calcul de DA en fonction de OA :

  Les points O, B et E sont alignés, donc $OE=OB+BE$.
  Or $OB=ED=OA$ et (III.1.2.), $BE=DA$, d'où $\dfrac{DA}{OA}=\dfrac{OA}{OA+DA}$.

  On en déduit l'équation : $DA^2+OA.DA-OA^2=0$.

  Soit $R=OA$ le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
  Posons $x=DA$. L'équation ci-dessus devient : $x^2+Rx-R^2=0$.

  Or les racines du trinôme x^2+Rx-R^2 sont $x_1=\dfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5})R$ et $x_2=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})R$.
  Seule la racine positive est à retenir pour DA, puisque DA est une distance, donc un réel positif ou nul.

  On trouve donc : $DA=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$.

1.d. "Le carré du côté du pentagone est égal à la somme des carrés des côtés du décagone et de l'hexagone inscrits dans le même cercle."

Le triangle *BHE* est rectangle en *H*. D'après le théorème de Pythagore,
$EB^2 = HB^2 + HE^2$.
Le triangle *AHB* est rectangle en *H*. D'après le théorème de Pythagore,
$AB^2 = HB^2 + HA^2$.

Par différence des deux équations précédentes, on élimine HB^2 et on obtient :
$AB^2 = EB^2 + HA^2 - HE^2$.

On a $EB = AD$.

Par ailleurs, le triangle *BDE* est isocèle en *B*. La hauteur (BH) issue de *B* est donc également médiane de $[ED]$, d'où $EH = HD = \frac{ED}{2} = \frac{OA}{2}$.
Enfin, $AH = AD + HD = AD + \frac{OA}{2}$.

En remplaçant, on obtient : $AB^2 = AD^2 + AD^2 + AD.OA + \frac{OA^2}{4} - \frac{OA^2}{4} = AD^2 + AD(AD + OA)$.

Avec $AD = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)R$ et $R = OA$, on obtient :
$AD(AD + OA) = \left(\frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right)R^2 = R^2 = OA^2$, d'où $AB^2 = AD^2 + OA^2$.

Or $OA = R$ est la longueur du côté de tout hexagone régulier inscrit dans $\mathscr{C}$, d'où la formulation :
"Le carré du côté du pentagone est égal à la somme des carrés des côtés du décagone et de l'hexagone inscrits dans le même cercle".

1.e. Ptolémée fournit la valeur $DA = 37^p 4'55''$ avec $2\,OA = 120^p$.

Conversion de *DA* :
$$DA = \left(37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600}\right)^p = \frac{133495}{3600}^p = \frac{26699}{720}^p$$

D'autre part, $OA = 60^p$.
On en déduit $\frac{DA}{OA} = \frac{26699}{60 \times 720} = \frac{26699}{43200} = 0{,}6180324074\ldots$.

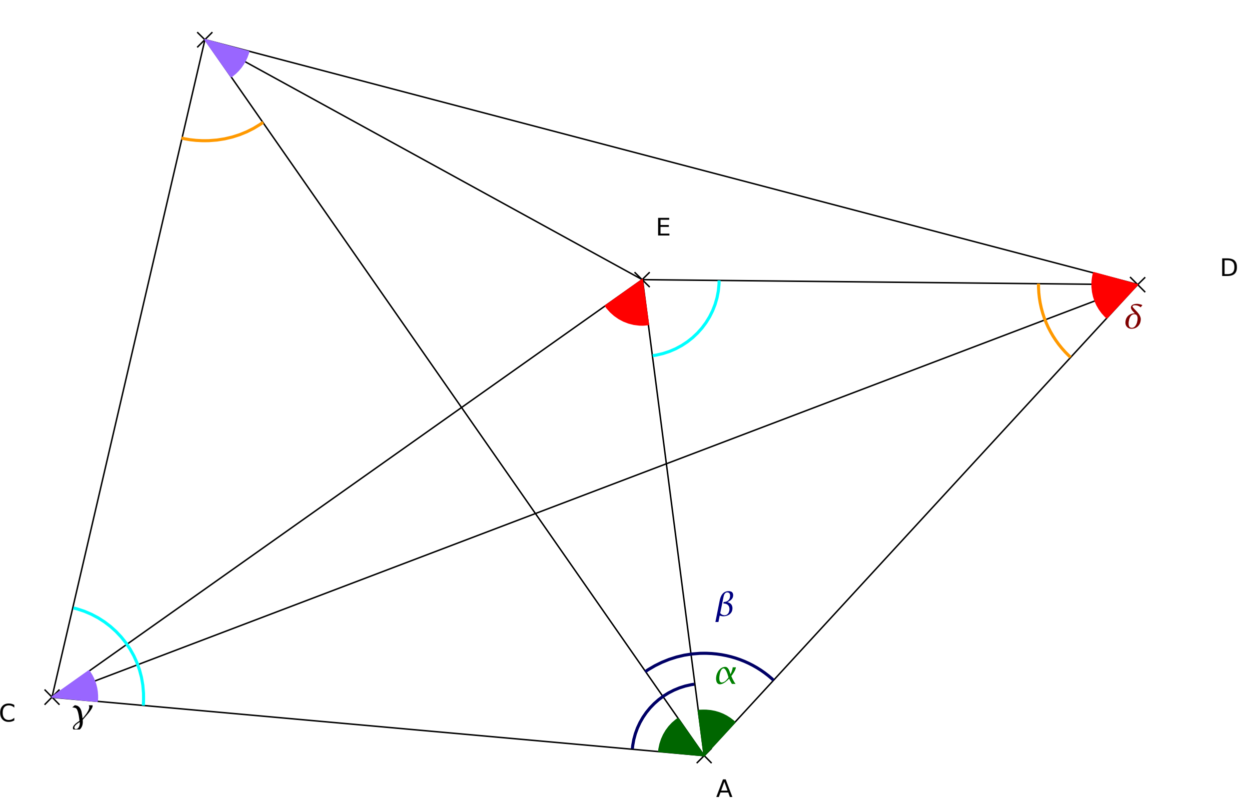
Or $\frac{DA}{OA} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}6180339888\ldots$.

L'approximation de Ptolémée présente une erreur inférieure à 2.10^{-6} .

Remarque :
Soit A' le point diamétralement opposé à *A*. Le triangle ADA' est rectangle en *D*, puisque son hypoténuse est un diamètre de $\mathscr{C}$.
Par ailleurs, $(\overrightarrow{A'A}\ ,\ \overrightarrow{A'D}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OD}) = 18^\circ$, donc $\frac{DA}{2\,OA} = \sin 18^\circ$.
Déterminer *DA* équivaut donc à déterminer le sinus de l'angle inscrit interceptant la corde $[AD]$.

2. Le théorème de Ptolémée.

On donne quatre points trois à trois non alignés, A, B, C et D et la similitude σ de centre A transformant B en C.
On pose $\sigma(D)=E$.



2.a. Existence et unicité d'une similitude τ de centre A transformant B en D et C en E.

Soit α l'angle de σ. On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})=\alpha$

En respectant l'ordre des sommets, le triangle ACE est l'image du triangle ABD par la similitude σ de centre A.
Par suite, les triangles ACE et ABD sont semblables et on a :

- $\begin{cases} (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC})=\beta \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE})=\gamma \\ (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})=(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA})=\delta \end{cases}$ où β, γ et δ sont des nombres réels.

- $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BD}{CE}$

Considérons les triangles ABC et ADE. On a :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})=\alpha$,
$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

Les triangles ABC et ADE présentent donc un angle de même mesure et les côtés de cet angle sont dans le même rapport. On en déduit que ces deux triangles sont semblables.

Par suite, il existe une et une seule similitude τ d'angle β qui telle que $\tau(B)=D$ et $\tau(C)=E$.
Le point A étant invariant par τ, A est le centre de τ.

On a par conséquent $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$ et $\begin{cases}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})\\(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA})=(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\end{cases}$.

2.b. $AC\cdot BD+AD\cdot BC \geqslant AB\cdot CD$

Les triangles ABC et ADE sont semblables, donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}$, d'où $AC\cdot BD=AB\cdot CE$.
Les triangles ACE et ABD sont semblables, donc $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$, d'où $AD\cdot BC=AB\cdot DE$.

Par sommation on obtient : $AC.BD+AD.BC=AB(CE+DE)$.

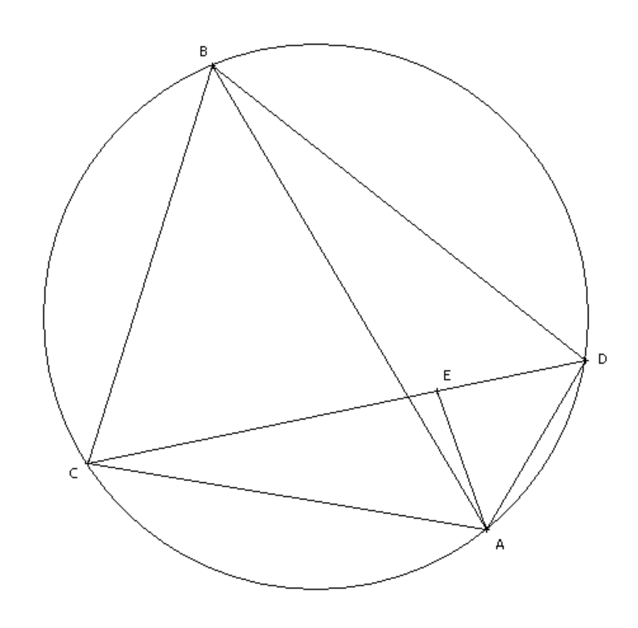
Or dans le triangle CDE, l'inégalité triangulaire s'écrit : $CE+DE \geqslant CD$.

On en déduit : $AC\cdot BD+AD\cdot BC \geqslant AB\cdot CD$.

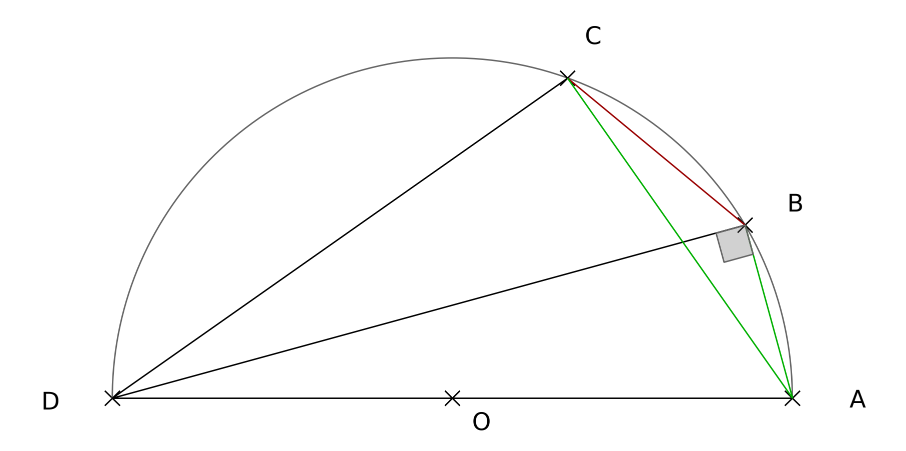
2.c. A, B, C et D cocycliques si et seulement si $AC\cdot BD+AD\cdot BC=AB\cdot CD$.

Les égalités suivantes sont équivalentes :
$AC\cdot BD+AD\cdot BC=AB\cdot CD$.
$CD=CE+ED$.
$E\in[CD]$.
$(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED})=0\ [\pi]$.
$(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA})+(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})=0\ [\pi]$.
$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})=0\ [\pi]$ (voir 2.a.).
$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})=(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})=0\ [\pi]$.
"A, B, C et D sont cocycliques".

Conclusion : A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $AC\cdot BD+AD\cdot BC=AB\cdot CD$.



3. Formule pour les différences d'arcs



3.a. Calcul de BC

Le quadrilatère $ABCD$ est convexe et inscrit dans le cercle de diamètre $[AD]$.
D'après le théorème de Ptolémée on a l'égalité $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$, d'où :
$BC = \frac{BD}{AD} \cdot AC - \frac{CD}{AD} \cdot AB$.

Le côté $[AD]$ du triangle ABD est un diamètre du cercle circonscrit à ABD. Le triangle ABD est donc rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AD^2 - AB^2$.

De même, le triangle ACD est rectangle en C, d'où $CD^2 = AD^2 - AC^2$.

Par suite, en remplaçant, on obtient :

$$BC = \sqrt{1 - \left(\frac{AB}{AD}\right)^2} \cdot AC - \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AD}\right)^2} \cdot AB .$$

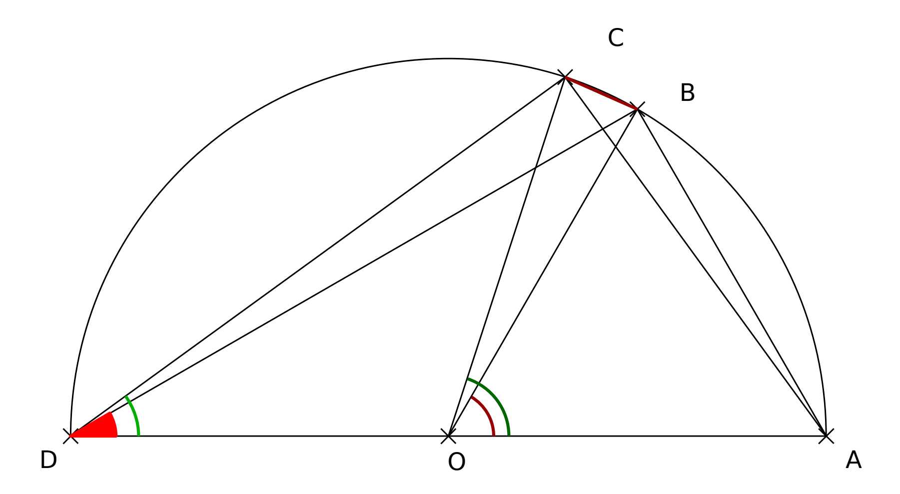
Remarque 1 :
$AC \leqslant AD$, donc $\frac{AC}{AD} \leqslant 1$, d'où $\left(\frac{AC}{AD}\right)^2 \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1 - \left(\frac{AC}{AD}\right)^2$.
De même, on a $0 \leqslant 1 - \left(\frac{AB}{AD}\right)^2$.

En conclusion, si AD, AB et AC sont connus, cette expression permet le calcul explicite de BC.

Remarque 2 :
En "langage moderne", $\frac{AB}{AD} = \sin((\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}))$ et $\frac{AC}{AD} = \sin((\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}))$.
La formule trouvée ci-dessus est donc équivalente à :

$$BC = AC \cos((\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})) - AB \cos((\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})) .$$

3.b. Longueur d'une corde sous-tendant un arc de 12°.



Sur la figure ci-dessus, $[AC]$ est un côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre $[AD]$, admettant A et C comme sommets.

On a donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{360}{5} = 72^\circ$ et par suite $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 36^\circ$.

La corde $[AB]$ est un côté de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre $[AD]$, admettant A et C comme sommets.

On a donc :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{360}{6} = 60^\circ$ et par suite $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 30^\circ$.

On obtient : $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = 6^\circ$.

La corde $[BC]$ est interceptée par un angle inscrit de 6° correspondant à un angle au centre de 12°. $[BC]$ sous-tend donc un arc de 12°.

D'après III.3.a., $BC = \sqrt{1 - \left(\frac{AB}{AD}\right)^2} \cdot AC - \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AD}\right)^2} \cdot AB$.

Or,

$AB = OA = \frac{1}{2} AD$, d'où $1 - \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

D'après III.1.d.,

$AC^2 = d^2 + OA^2$ où d est la longueur de la corde sous-tendant un arc de 36° (côté d'un décagone régulier). On sait que $d = \frac{\sqrt{5}-1}{2} OA = \frac{\sqrt{5}-1}{4} AD$.

On en déduit $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $1 - \frac{AC^2}{AD^2} = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$.

On obtient :

.

$$\frac{BC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$$

Le calcul à la calculatrice donne $\frac{BC}{AD}=0{,}1045284633\ldots$.

Comme $AD=120^p$, on obtient :

Le calcul à l'aide de la calculatrice donne $BC=12{,}5434155920\ldots^p$.

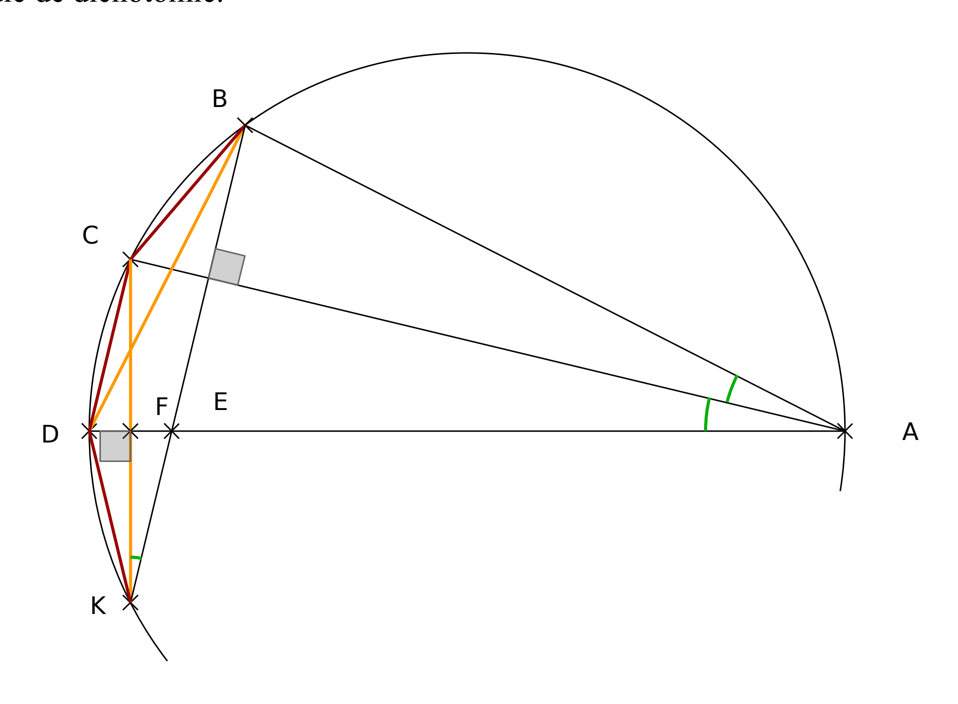
La conversion dans la base sexagésimale donne : $BC=12^p 32'36''$ à 1" près par défaut.

Remarque :

Pour calculer la longueur d'une corde sous-tendant un angle de mesure α, on utilise la propriété *"Dans un triangle isocèle, la bissectrice intérieure de l'angle dont le sommet est le sommet principal du triangle est également médiatrice du côté opposé à ce sommet."*
Prenons l'exemple d'une corde $[MN]$ qui sous-tend l'angle au centre $(\overrightarrow{OM}\ ,\ \overrightarrow{ON})=\alpha$. Dans le triangle *OMN*, les côtés $[OM]$ et $[ON]$ sont de même longueur puisqu'ils sont rayons du cercle. *OMN* est donc isocèle de sommet principal *O*. Soit I le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OM}\ ,\ \overrightarrow{ON})$ avec le segment $[MN]$. D'après la propriété citée plus haut, $IM=IN=\frac{MN}{2}$ et $(\overrightarrow{IO}\ ,\ \overrightarrow{IM})$ est droit, donc $IN=IM=OM\sin\frac{\alpha}{2}$. Par suite, $MN=2OM\times\sin\alpha=2R\sin\frac{\alpha}{2}$ où *R* désigne le rayon du cercle.

Appliquons ce résultat aux conditions de l'exercice, en utilisant la fonction sinus et la calculatrice. On obtient $\frac{BC}{AD}=\sin 6^\circ=0{,}1045284633\ldots$, ce qui confirme le résultat obtenu.

4. Une formule de dichotomie.



Méthode 1 : en utilisant le résultat de la question III.3.a.

On a :

$$BC=\sqrt{1-\left(\frac{CD}{AD}\right)^2}\times BD-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\times CD$$, soit puisque $CD=BC$:

$$BC=\sqrt{1-\left(\frac{BC}{AD}\right)^2}\times BD-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\times BC$$, d'où

$$BC\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{BC}{AD}\right)^2}\times BD$$, soit, en élevant au carré :

$$BC^2\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)^2=BD^2-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2\times BC^2$$,

$$2\,BC^2\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)=BD^2$$ d'où, en multipliant par $\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)$:

$$2\,BC^2\left(1-1+\left(\frac{BD}{AD}\right)^2\right)=BD^2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right),$$

$$BC^2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)AD^2.$$

On en déduit :

$$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)}AD\cdot$$

Comme $CD=BC$, on a donc $CD=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)}AD$.

Méthode 2 : classique

Soit I le point d'intersection des droites (BE) et (AC) et K le point d'intersection des droites (CF) et (BE).

Par construction, les droites (BE) (respectivement (CF)) et (AC) (respectivement (AD)) sont perpendiculaires. Par suite, $(\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{KB}\ ,\ \overrightarrow{KC})$.
Or $(\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$, donc $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{KB}\ ,\ \overrightarrow{KC})$.
On en déduit que les points A, B, C et K sont cocycliques. Le point K appartient donc au cercle de diamètre $[AD]$ et le triangle ACK est isocèle en A.

La droite (AD) est donc la hauteur issue de A du triangle ACK isocèle en A, (AD) est donc la médiatrice de la corde $[CK]$. On a donc $CF=KF=\frac{1}{2}CK$.

Les cordes $[BC]$ et $[CD]$ sont de même longueur, les angles inscrits $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD})$ sont donc égaux.
Le triangle ACK étant isocèle en A, les angles inscrits $(\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AK})$ et $(\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD})$ sont donc égaux.

Par suite, les angles inscrits $(\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AK})=(\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AK})$ et $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD})$ sont égaux, donc les cordes les sous-tendant sont de même longueur.

On a donc $BD=CK=2\,CF$.

Le triangle ACD est rectangle en C puisque ses trois sommets appartiennent au cercle de diamètre $[AD]$. Soit $\mathcal{A}$ son aire. On a :
$\mathcal{A}=\frac{1}{2}AC\cdot CD=\frac{1}{2}AD\cdot CF=\frac{1}{4}AD\cdot BD$, d'où $CD\cdot AC=\frac{1}{2}AD\cdot BD$.

D'après le théorème de Pythagore, $AC=\sqrt{AD^2-CD^2}$.

Par suite, $CD\cdot\sqrt{AD^2-CD^2}=\frac{1}{2}AD\cdot BD$, soit, par élévation au carré :
$CD^4-AD^2\cdot CD^2+\frac{1}{4}AD^2\cdot BD^2=0$.

Posons $X=CD^2$ et remplaçons dans la formule ci-dessus. On obtient l'équation du second degré en X $X^2-AD^2\cdot X+\frac{1}{4}AD^2\cdot BD^2=0$ donc les solutions sont $\begin{cases} X_1=\frac{1}{2}AD^2\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right] \\ X_2=\frac{1}{2}AD^2\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right] \end{cases}$.

On obtient donc :

$$CD=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)}AD \text{ ou } CD=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)}AD .$$

Or, $CD=0$ si et seulement si $BD=0$, donc seule convient la solution

$$CD=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)}AD$$

Formule de dichotomie :

On définit la suite (C_n) des points du cercle de rayon $[AD]$ par :

- $C_0 = B$ et supposons $C_0 D$ connu.
  Par exemple $[C_0 D]$ est la corde interceptée par l'angle inscrit $(\overrightarrow{AC_0}, \overrightarrow{AD})$ de mesure 6°, ie sous-tendant un arc de 12°.

- Pour tout entier naturel *n*, C_n est le point du cercle tel que $(\overrightarrow{AC_n}, \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2^n}(\overrightarrow{AC_0}, \overrightarrow{AD})$ que l'on peut construire (théoriquement) en traçant la bissectrice de l'angle précédemment obtenu.

La relation de récurrence est alors donnée par :

Pour tout *n* entier naturel, $C_{n+1} D = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{C_n D}{AD}\right)^2}\right)} AD$.

On obtient ainsi successivement :

$C_1 D = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{C_0 D}{AD}\right)^2}\right)} AD$, soit $C_1 D = CD = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{BD}{AD}\right)^2}\right)} AD$,

$C_2 D = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{C_1 D}{AD}\right)^2}\right)} AD$, etc...

Le problème posé à Claude Ptolémée, la plus petite corde connue était celle sous-tendant un angle de 12°. Toutes les cordes calculables à partir de celle-ci sous-tendent des angles de mesure $\frac{12^\circ}{2^n}$, ce qui rendait impossible le calcul d'un angle de un degré par exemple.
En effet, il aurait fallu pour cela être capable de partager un secteur angulaire en trois secteurs égaux à la règle et au compas, un des trois problèmes de l'Antiquité, dont il a été démontré (par Pierre-Laurent Wantzel en 1837) qu'il n'admet aucune solution.

Pour mémoire, les deux autres problèmes étaient la quadrature du cercle (construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un disque donné) et la duplication du cube (construire à la règle et au compas un cube de volume double d'un cube donné).

5. Recherche d'une valeur approchée de la corde sous-tendant un angle de un degré.

5.a. Les cordes $[AC]$ et $[AG]$ sous-tendent respectivement des arcs de 1°30' et 45'.

$\operatorname{arc}(AG) < \operatorname{arc}(AB) < \operatorname{arc}(AC)$, donc :

$\begin{cases} \frac{AG}{AB} > \frac{\operatorname{arc}(AG)}{\operatorname{arc}(AB)} \\ \frac{AB}{AC} > \frac{\operatorname{arc}(AB)}{\operatorname{arc}(AC)} \end{cases}$, d'où $\frac{\operatorname{arc}(AB)}{\operatorname{arc}(AC)} \cdot AC < AB < \frac{\operatorname{arc}(AB)}{\operatorname{arc}(AG)} \cdot AG$.

Or :

$\frac{\operatorname{arc}(AB)}{\operatorname{arc}(AC)} = \frac{1}{1{,}5}$ et $\frac{\operatorname{arc}(AB)}{\operatorname{arc}(AG)} = \frac{1}{0{,}75}$, et $\begin{cases} AC = 1^p 34'15'' \\ AG = 0^p 47'08'' \end{cases}$.

On obtient l'encadrement suivant :

$1{,}0472222222... < AB < 1{,}0474074074...$, d'où on déduit : $AB \approx 1^p 02'50''$

5.b. Qualité de l'approximation.

$AB = 120 \sin(0{,}5^\circ) = 1{,}0471842598...$, soit $AB \approx 1^p 02'49''$.
L'approximation donne un résultat correct à une seconde près.

5.c. Étude de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

Soit un cercle de diamètre D et $[AB]$ la corde de ce cercle sous-tendant un angle de α degrés.
On a :

$$\begin{cases} AB = D \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ \operatorname{arc}(AB) = \dfrac{\pi D}{360}\alpha \end{cases}, \text{ donc } \frac{\operatorname{arc}(AB)}{AB} = \frac{\pi}{180} \times \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Posons $x = \dfrac{\alpha}{2}$, on obtient alors $\dfrac{\operatorname{arc}(AB)}{AB} = \dfrac{\pi}{180} \times \dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{\pi}{180} \times f(x)$.

Étudions les variations de *f* sur $I =]0\ ;\ 90^\circ]$, intervalle sur laquelle elle est définie.

f est dérivable sur *I* et $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$.
$f'(x)$ est donc du signe de $\sin x - x \cos x$.

Or $(\sin x - x\cos x)' = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$, et pour tout x appartenant à *I*, $x \sin x > 0$.

On en déduit que la fonction définie sur $[0\ ;\ 90^\circ]$ par $(\sin x - x\cos x)$ est strictement croissante sur *I*.
Comme cette fonction s'annule pour $x = 0$, $(\sin x - x\cos x) > 0$ sur *I*.
Par suite, $f'(x) > 0$ sur *I*. La fonction *f* est donc strictement croissante sur *I*.

On en déduit que pour deux nombre réels x_1 et x_2 appartenant à *I* et tels que $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$, donc $\dfrac{x_1}{\sin x_1} < \dfrac{x_2}{\sin x_2}$, d'où $\dfrac{\sin x_1}{\sin x_2} > \dfrac{x_1}{x_2}$.

Remarquons que $\alpha = 0^\circ$ est équivalent à $B = A$ et $\alpha = 90^\circ$ est équivalent à $B = D$ tel que D est diamétralement opposé à A.
On en déduit que lorsque x décrit *I*, α décrit l'intervalle $]0\ ;\ 180^\circ]$ et le point B décrit le demi-cercle de diamètre $[AD]$ privé du point A.
$[AD]$ étant axe de symétrie du cercle, on peut limiter l'étude à $]0\ ;\ 180^\circ]$ qui reste valable pour α appartenant à la réunion $[-180^\circ\ ;\ 0^\circ[\cup]0^\circ\ ;\ 180^\circ]$.

On peut donc affirmer que pour deux points B et C appartenant au cercle de diamètre $[AD]$ et tels que $A \neq B$, $A \neq C$ et $B \neq C$,

$$\text{si } \operatorname{arc}(AB) < \operatorname{arc}(BC), \text{ alors } \frac{AB}{BC} > \frac{\operatorname{arc}(AB)}{\operatorname{arc}(BC)} \quad (**).$$

Université PARIS 6 *Mathématiques 1998-1999*
CAPES INTERNE

Corrigé de la première composition 1999

I

I.1 On a, pour x réel et $h \neq 0$:

$$\cos(x+h) - \cos(h) = \cos(x)\,\cos(h) - \frac{\sin h}{h}\,h\,\sin(h) - \cos(x)$$
$$= -h\sin(x) + h\left[(1 - \frac{\sin h}{h})\,\sin(x) + \frac{\cos h - 1}{h}\,\cos(x)\right]$$

La formule (*) montre que $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$ c'est-à-dire que la fonction sinus est continue en zéro. On en déduit que $\lim_{h\to 0} \cos^2 h = \lim_{h\to 0}(1-\sin^2 h) = 1$. Comme $\cos h > 0$ pour $|h| < \pi/2$, on en déduit $\lim_{h\to 0} \cos h = 1$ c'est-à-dire que la fonction cosinus est continue en zéro.
Maintenant, la limite d'un produit étant le produit des limites, lorsque h tend vers 0 la fonction

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h\,(\cos h + 1)} = -\sin h \frac{\sin h}{h}\frac{1}{\cos h + 1)}$$

tend vers $0.1.\frac{1}{2} = 0$. De ce résultat et de la formule (*), on déduit que la fonction :

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} (1 - \dfrac{\sin h}{h})\,\sin(x) + \dfrac{\cos h - 1}{h}\,\cos(x) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tend vers 0 lorsque h tend vers 0 (c'est-à-dire est continue en 0).
La formule précédente montre que, pour tout x réel, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin x$$

Autrement dit, la fonction cosinus est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et sa dérivée est l'opposée de la fonction sinus. Pour calculer la dérivée de la fonction sinus, on utilise la relation $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. Il vient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x - h) - \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{h}$$
$$= \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

Autrement dit, la fonction sinus est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus.
I.2.a Les suites $U_n(t)$ et $V_n(t)$ vérifient les relations :

$$U_0(t) = 1\,,\quad V_0(t) = 0\,,$$

$$U_{n+1}(t) = \cos t\,U_n(t) - \sin t\,V_n(t) = U_n(t) - t\,V_n(t) + t\,\varepsilon_1(t)$$

$$V_{n+1}(t) = \sin t\, U_n(t) + \cos t\, V_n(t) = t\, U_n(t) + V_n(t) + t\,\varepsilon_2(t)$$

avec

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\cos t - 1}{t}\, U_n(t) - (\frac{\sin t}{t} - 1)\, U_n(t)$$

$$\varepsilon_2(t) = (\frac{\sin t}{t} - 1)\, U_n(t) + \frac{\cos t - 1}{t}\, U_n(t)$$

et, d'après les résultats de la question 1), $\lim_{t\to 0} \varepsilon_1(t) = \lim_{t\to 0} \varepsilon_1(t) = 0$.
I.2.b On trouve :

$$C_1(t) = 1\ ,\ S_1(t) = t\ ,\ C_2(t) = 1 - t^2\ ,\ S_2(t) = 2t\ ,\ C_3(t) = 1 - 3t^2\ ,\ S_3(t) = 3t - t^3.$$

I.2.c Si f et g sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[0, \infty[$, si $f'(x) \leq g'(x)$ pour $x \geq 0$ et si $f(0) = g(0)$, alors $f(x) \leq g(x)$ pour $x \geq 0$ ("intégration" des inégalités).
A partir de l'inégalité $\cos x \leq 1$ on obtient ainsi successivement, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &\leq 0 + x = x && (\sin 0 = 0)\\
-\cos x &\leq -1 + \frac{x^2}{2} && (-\cos 0 = -1)\\
-\sin x &\leq -x + \frac{x^3}{6} && (-\sin 0 = 0)\\
\cos x &\leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} && (\cos 0 = 1)\\
\sin x &\leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} && (\sin 0 = 0)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \leq x$ si et seulement si $\frac{x^3}{6} \geq \frac{x^5}{120}$ c'est-à-dire si $x^2 \leq 20$.
Comme $(\pi/2)^2 < 3 < 20$, ce sera le cas en particulier si $0 \leq x \leq \pi/2$.
Remarque : Le nombre $\pi/2$ est le plus petit réel positif dont le cosinus est nul. Comme $\cos(\sqrt{3}) \leq 1 - \frac{3}{2} + \frac{3^2}{24} = -1/8 < 0$, on a $\pi/2 < \sqrt{3}$.
I.2.d On a $S_3(x/3) = x - x^3/27$. L'encadrement demandé est, pour $x > 0$, une conséquence immédiate de ce que $-1/6 < -1/27 < 0$.
La fonction $S_3(x/3) - (x - x^3/6 + x^5/120) = \frac{7}{54}x^3 - \frac{1}{120}x^5$ est strictement positive pour $0 < x < \frac{2}{3}\sqrt{35}$, en particulier sur l'intervalle $]0, \pi/2]$. L'inégalité demandée n'est donc jamais réalisée sur cet intervalle.
I.2.e On constate que $C_0(t) + iS_0(t) = 1$ et que :

$$C_{n+1}(t) + iS_{n+1}(t) = C_n(t) - t\,S_n(t) + it\,C_n(t) + iS_n(t) = (1 + it)\big(C_n(t) + +iS_n(t)\big)$$

On en déduit, par récurrence sur l'entier n, $C_n(t) + iS_n(t) = (1 + it)^n$.
En prenant les modules, on obtient :

$$C_n^2(t) + S_n^2(t) = (1 + t^2)^n.$$

Comme, pour $t \neq 0$, $1 + t^2 > 1$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} \left[C_n^2(t) + S_n^2(t)\right] = \infty$.
Ce résultat montre que les suites $C_n(t)$ et $S_n(t)$ n'ont pas le même comportement, lorsque n tend vers l'infini, que les suites $U_n^2(t) + V_n^2(t)$ pour lesquelles on a, pour tout t réel :

$$U_n^2(t) + V_n^2(t) = \cos^2(nt) + \sin^2(nt) = 1(**)$$

I.2.f La fonction exponentielle est croissante et, pour $u > 0$, on a $\ln(1+u) \leq u$. Donc, pour x réel, on a :

$$1 \leq f_n(x) = \exp\left(n \ln(1 + \frac{x^2}{n^2})\right) \leq \exp\left(\frac{x^2}{n}\right).$$

Maintenant, pour x fixé, on a $\lim_{n\to\infty}(x^2/n) = 0$ et, par continuité de la fonction exponentielle au point 0, $\lim_{n\to\infty} \exp(x^2/n) = 1$. Le théorème des gendarmes donne alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Autrement dit, la suite de fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale à 1.
Pour $0 \leq x \leq a$, on a $0 \leq f_n(x) - 1 \leq f_n(a) - 1$. Comme $\lim_{n\to\infty}(f_n(a) - 1) = 0$, on constate que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur l'intervalle $[0, a]$ vers la fonction constante égale à 1. Ceci est vrai en particulier pour $a = \pi/2$.
On trouve maintenant :

$$\lim_{n\to\infty}\left[C_n^2(\frac{x}{n}) + S_n^2(\frac{x}{n})\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$$

ce qui est plus conforme à la relation (**).

Remarque : On vient en fait de montrer que le (carré du) module du nombre $Z_n = C_n(\frac{x}{n}) + iS_n(\frac{x}{n}) = (1 + i\frac{x}{n})^n$ tend vers 1. Maintenant, un argument du nombre $1 + it$ est $\arctan(t)$. Un argument du nombre Z_n est donc $\theta_n = n \arctan(\frac{x}{n})$. On montre facilement que $\lim_{n\to\infty} \theta_n = x$ (par exemple parce que la dérivée de la fonction arctangente vaut 1 en 0) d'où on déduit que $\lim_{n\to\infty} Z_n = e^{ix}$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} C_n(\frac{x}{n}) = \cos x$ et $\lim_{n\to\infty} S_n(\frac{x}{n}) = \sin x$.

I.2.g On a $\sin(\pi/30) = 0,104\,528\,4...$ et on trouve :

$$S_6(\pi/180) = 0,104\,673\,4... \qquad S_{12}(\pi/360) = 0,104\,573\,5...$$

c'est-à-dire une erreur inférieure à $8,5\ 10^{-5}$ dans le premier cas et à $4,6\ 10^{-5}$ dans le second.

I.3.a On trouve :

$$\cos(x+h) - \cos(x) + \frac{x}{2}(\sin(x+h) + \sin(x))$$
$$= \cos x(\cos h - 1 + \frac{h}{2}\sin h) + \sin x(-\sin h + \frac{h}{2}\cos h + \frac{h}{2})$$

Maintenant les encadrements des fonctions sinus et cosinus trouvés plus haut montrent que, pour $h \geq 0$, on a

$$-\frac{h^4}{12} = (1 - \frac{h^2}{2}) - 1 + \frac{h}{2}(h - \frac{h^3}{6}) \leq \cos h - 1 + \frac{h}{2}\sin h$$
$$\leq (1 - \frac{h}{2} - + \frac{h^4}{24}) - 1 + \frac{h}{2}h = \frac{h^4}{24}$$

La fonction $\cos h - 1 + \frac{h}{2}\sin h$ étant paire, le même encadrement sera valable pour $h < 0$. De même on trouve pour $h \geq 0$:

$$-\frac{h^3}{12} = -(h - \frac{h^3}{6}) + \frac{h}{2}(1 - \frac{h^2}{2}) + \frac{h}{2} \leq -\sin h + \frac{h}{2}\cos h + \frac{h}{2} \leq -h + \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = 0$$

Pour $h \leq 0$, la fonction $-\sin h + \frac{h}{2}\cos h + \frac{h}{2}$ étant impaire, on trouve $0 \leq -\sin h + \frac{h}{2}\cos h + \frac{h}{2} \leq -\frac{h^3}{12}$. la fonction η définie, pour $h \neq 0$, par la relation de l'énoncé vérifie donc, pour tout nombre réel h non nul :

$$|\eta(h)| \leq \frac{h^2}{12}|\cos x| + \frac{|h|}{12}|\sin x|$$

et, par suite, tend vers 0 quand h tend vers 0.

I.3.b Il suffit de constater que, pour t réel fixé, on peut, pour tout entier $n \geq 0$, calculer $\Gamma_{n+1}(t)$ et $\Sigma_{n+1}(t)$ à partir de $\Gamma_n(t)$ et $\Sigma_n(t)$. Pour cela, on remarque que le système linéaire à deux équations que l'on doit résoudre a un déterminant valant $-4-t^2$ et donc non nul. C'est donc un système de Cramer qui a une unique solution.

I.3.c On résoud le système :

$$\begin{cases} 2\Gamma_1(t) + t\Sigma_1(t) = 2 \\ t\Gamma_1(t) - 2\Sigma_1(t) = -t \end{cases} \iff \begin{cases} \Gamma_1(t) = (4-t^2)/(4+t^2) \\ \Sigma_1(t) = 4t/(4+t^2) \end{cases}$$

I.3.d On peut naturellement résoudre le système donnant $\Gamma_{n+1}(t)$ et $\Sigma_{n+1}(t)$. Il est plus rapide de faire directement un calcul dans les complexes :

$$\begin{aligned}(2-it)(\Gamma_{n+1}(t) + i\Sigma_{n+1}(t)) &= 2\Gamma_{n+1}(t) + t\Sigma_{n+1}(t) - i(t\Gamma_{n+1}(t) - 2\Sigma_{n+1}(t)) \\ &= 2\Gamma_n(t) - t\Sigma_n(t) - i(-t\Gamma_n(t) - 2\Sigma_n(t)) \\ &= (2+it)(\Gamma_n(t) + i\Sigma_n(t))\end{aligned}$$

Comme $\Gamma_0(t) + i\Sigma_0(t) = 1$ et comme $2 - it \neq 0$ pour tout nombre réel t, on vérifie par récurrence sur l'entier n que :

$$\Gamma_n(t) + i\Sigma_n(t) = \left(\frac{2+it}{2-it}\right)^n$$

I.3.e Les nombres $2+it$ et $2-it$ sont complexes conjugués donc ont le même module. Par suite $|\zeta_n(t)| = 1$.

I.3.f On trouve $\Sigma_6(\pi/180) = 0,104\,525\,8...$ c'est-à-dire une erreur inférieure à $2,7\ 10^{-6}$ par rapport à $\sin(\pi/30)$.

I.4.a Le premier encadrement a déjà été démontré.

Pour le deuxième on part de la relation et de l'encadrement suivant, pour $u \geq 0$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + \frac{u^2}{1+u} \qquad 0 \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$$

qui donnent l'encadrement $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - u + u^2$. On en déduit, pour $t \geq 0$:

$$\Gamma_1(t) = \frac{1-t^2/4}{1+t^2/4} \geq (1 - \frac{t^2}{4})^2 = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{16} \geq 1 - \frac{t^2}{2}$$

$$\Gamma_1(t) \leq (1 - \frac{t^2}{4})(1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{16}) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} - \frac{t^6}{64} \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}$$

I.4.b On fait une démonstration par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $f_1(\cos t) = 2\cos^2 t - 1 = \cos(2t)$.

Si, pour $n \geq 2$, la formule est vérifiée à l'ordre $n-1$, on trouve :

$$f_n(\cos t) = f_{n-1}(f(\cos t)) = f_{n-1}(\cos(2t)) = \cos(2^{n-1}\, 2t) = \cos(2^n t)$$

et la formule est vérifiée à l'ordre n.
I.4.c On trouve $f_5\left(\Gamma_1(\pi/192)\right) = 0,866\,031\,2\ldots$ et une erreur inférieure à $6\,10^{-6}$ dans le calcul de $\cos(\pi/6)$ ce qui semble raisonnable.
I.4.d Si on fait les calculs avec une précision de 10^{-12},on trouve $f_{20}\left(\Gamma_1(\pi/6\,2^{20})\right) = 1,00000\ldots$ ce qui n'est pas raisonnable comme valeur de $\cos(\pi/6)$. Du fait des erreurs d'arrondi, au bout de 20 itérations, la suite $u_n = f_n\left(\Gamma_1(\pi/6\,2^{20})\right)$, qui vérifie la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, a été "attirée" par le point fixe de la fonction f.
Avec une précision de 10^{-20}, on trouve $f_{20}\left(\Gamma_1(\pi/6\,2^{20})\right) = 0,866\,025\,422\,89\ldots$ et une erreur inférieure à $2\,10^{-8}$ ce qui est plus conforme à ce que l'on attend.
Pour rendre les erreurs de calcul inférieures aux erreurs dues à la méthode, il faut calculer avec une précision de 10^{-32}. On trouve $f_{20}\left(\Gamma_1(\pi/6\,2^{20})\right) = 0,866\,025\,403\,784\,444\,4\ldots$ avec une erreur inférieure à $6\,10^{-15}$.

II.1.a Quel que soient les réels λ et μ, si f et g sont des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E), on a $f + f'' = g + g'' = 0$ d'où $(\lambda f + \mu g) + (\lambda f + \mu g'') = 0$ donc la fonction $\lambda f + \mu g$, qui est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
II.1.b On a vu en I.1 que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$ d'où $\cos'' = -\cos$ et $\sin'' = -\sin$.
II.1.c Il suffit de montrer que les fonctions sin et cos sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$. Si la fonction $\lambda\cos + \mu\sin$ est nulle, on a en particulier $\lambda = \lambda\cos(0) + \mu\sin(0) = 0$. Maintenant, la fonction sinus n'est pas identiquement nulle ; il y a un réel α tel que $\sin\alpha \neq 0$ et $\mu\sin\alpha = 0$ donc $\mu = 0$.
II.1.d On a $(\cos^2 + \sin^2)' = 2(-\sin\cos + \cos\sin) = 0$. Cette fonction est donc constante sur $\mathbb{R}$ et égale à $\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$. Le système de deux équations proposé a donc un déterminant égal à 1. Il a donc une unique solution :

$$u(t) = \phi(t)\cos t - \phi'(t)\sin t \qquad v(t) = \phi(t)\sin t + \phi'(t)\cos t$$

II.1.e Soit ϕ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E). Par la question précédente, on lui associe deux fonctions u et v. En dérivant chacune des relations, on obtient le nouveau système :

$$\begin{cases} u'(t)\cos t + v'(t)\sin t - u(t)\sin t + v(t)\cos t = \phi'(t) \\ -u'(t)\sin t + v'(t)\cos t - u(t)\cos t - v(t)\sin t = \phi''(t) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u'(t)\cos t + v'(t)\sin t = \phi'(t) - \phi'(t) = 0 \\ -u'(t)\sin t + v'(t)\cos t = \phi''(t) + \phi(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que u et v sont des fonctions constantes. Autrement dit $\phi = u\cos + v\sin$ avec u et v deux nombres réel et ϕ appartient au sous espace vectoriel (de dimension 2) engendré par les fonctions sinus et cosinus.
II.1.f D'après la question précédente, on a $f = u\cos + v\sin$ avec u et v réels. En particulier, on trouve :

$$\begin{cases} u = u\cos 0 + v\sin 0 = f(0) = 0 \\ v = -u\sin 0 + v\cos 0 = f'(0) = 1 \end{cases}$$

d'où $f = \sin$.

II.2.a La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x s'écrit :

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{1}{2}\,h^2 f''(x) + h^2\varepsilon(h) \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On en déduit :

$$f(x+h)-2f(x)+f(x-h) = h^2 f''(x)+h^2\nu(h) \qquad \lim_{h\to 0} \nu(h) = \lim_{h\to 0}(\varepsilon(h)+\varepsilon(-h)) = 0.$$

II.2.b En appliquant la formule précédente à la fonction sinus on trouve :

$$\sin(x+h) - 2\sin(x) + \sin(x-h) = -h^2 \sin(x) + h^2\nu(h)$$

Si on applique à $h = x/n$ (qui est petit si n est grand) et si on remplace $\nu(h)$ par 0, on trouve la récurrence donnée. Par ailleurs $\sin(x/n)$ est alors "proche" de x/n.

II.2.c Pour t,nombre réel fixé, on cherche les nombres complexes $z \neq 0$ tels que la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (à termes complexes) vérifie la récurrence $z^{n+1} - 2z^n + z^{n-1} = -t^2 z^n$. Pour cela il faut et il suffit que $z^2 + (t^2-2)z + 1 = 0$ (T).
L'équation du second degré (T) a un discriminant égal à $(t^2-2)^2 - 4 = t^4 - 4t^2$. Pour $|t| < 2$, ce discriminant est négatif, et (T) a deux racines complexes conjuguées dont le produit est égal à 1. Plus précisémment ces racines sont :

$$z = \frac{1}{2}(2 - t^2 + it\sqrt{4-t^2}) \qquad \overline{z} = \frac{1}{2}(2 - t^2 - it\sqrt{4-t^2}) \qquad |z| = \sqrt{z\overline{z}} = 1$$

A partir des deux suites complexes $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la récurrence on obtient deux suites réelles $\left(z^n + \overline{z}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(i(z^n - \overline{z}^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfont la même récurrence. Ces deux suites sont linéairement indépendantes (la deuxième a un premier terme nul mais pas la première). Elles engendrent donc le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 des suites réelles qui satisfont cette récurrence. On trouve donc deux réels λ et μ tels que, pour tout entier $n \geq 0$, on ait :

$$s_n = \lambda(z^n + \overline{z}^n) + \mu(i(z^n - \overline{z}^n) = (\lambda + i\mu)z^n + (\lambda - i\mu)\overline{z}^n = Az^n + B\overline{z}^n$$

II.2.d Les cas $n = 0$ et $n = 1$ donnent :

$$A + B = 0 \qquad Az + B\overline{z} = t$$

d'où $A = -B = t/(z - \overline{z})$. Si on écrit le nombre z de module 1 sous la forme $e^{i\theta}$, on trouve

$$it\sqrt{4-t^2} = z - \overline{z} = 2i\sin\theta \qquad z^n - \overline{z}^n = 2i\sin(n\theta)$$

Supposons $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (quitte à changer z en $\overline{z}$ on peut toujours supposer $\theta \geq 0$, si $|t| \leq \sqrt{2}$, on a $\cos\theta \geq 0$ et on peut alors prendre $|\theta| \leq \pi/2$). Il vient :

$$\sin\theta = t\sqrt{1 - t^2/4} \qquad s_n(t) = t\,\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

On trouve $t^4 - 4t^2 + 4\sin^2\theta = 0$ c'est-à-dire $t^2 = 2 \pm \sqrt{4 - 4\sin^2\theta} = 2(1 \pm \cos\theta)$. Comme on a supposé $|t| \leq \sqrt{2}$, il vient $t^2 = 2(1 - \cos\theta)$ et

$$\frac{t}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2/4}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos\theta}} = \frac{1}{\cos(\theta/2)}$$

Finalement, on a $t = \sin\theta/\cos(\theta/2) = 2\sin(\theta/2)$ soit $\theta = 2\arcsin(t/2)$ et :

$$s(x/n) = \frac{\sin(2n\arcsin(t/2n))}{\sqrt{1 - x^2/4n}}$$

III.1.a Le triangle OAB est isocèle car $OA = OB$ (par construction), le triangle DAB est isocèle car $DA = DB$ (D est, par construction, le milieu de l'arc AB). Par construction on a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\pi/5$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = 2\pi/10 = \pi/5$. On en déduit, en notant T la droite tangente en A au cercle de centre 0 passant par A, que $(T, AD) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \pi/10$ (angle inscrit) d'où

$$(OA, AD) = (OA, T) + (T, AD) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} = 3\frac{\pi}{5} = -(OA, OB) \pmod{\pi}$$

le triangle EOA a deux angles égaux, il est donc isocèle.
On a de même la relation

$$\begin{aligned}(EB, ED) = (EO, EA) = (EO, OA) + (AO, AE) &= -2\frac{\pi}{5} - 2\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (DA, DB) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

qui montre que le triangle BDE a deux angles égaux et donc est isocèle.
III.1.b On trouve : $EB = BD = DA$ et $ED = EA - AD = EO - EB = OB = OA$.
III.1.c Les triangles isocèles EOA et OAD ayant le même angle compris entre les cotés égaux ($(EO, EA) = \pi/5 = (OA, OD)$) sont semblables d'où $AD/OA = OA/EO$ et le résultat du texte car $OA = ED$.
On trouve $(OB+BE)\,DA = OA\,ED$ et comme $OB = OA = ED = r$ et $BE = AD$, il vient $DA^2 + r\,DA = r^2$ qui donne $DA = \frac{1}{2}(-r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2})$. Il faut prendre la racine positive et on obtient finalement $DA = r\,\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.
III.1.d On trouve :

$$\begin{aligned}AB^2 &= AH^2 + HB^2 = AH^2 + BD^2 - HD^2 = (AH + HD)(AH - HD) + AD^2 \\ &= AE\,AD + AD^2\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise le résultat III.1.c : $AE\,AD = OE\,AD = OA\,ED = OA^2$.
Remarquons que le coté de l'hexagone inscrit dans un cercle est égal au rayon du cercle.
III.1.e Le rayon du cercle est de 60, on trouve que $AD = 37,082039...$, la valeur donnée par Ptolémée est de $26699/720 = 37,0819444...$ et une erreur de moins de 10^{-4}.

III.2.a Comme $B \neq C$ (par hypothèse) et $D \neq E$ (le seul point fixe de σ est A) la similitude τ existe et est unique. Le point A étant distinct des points D, B et C, le point E est défini par les relations :

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \qquad \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

On en déduit les relations :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

qui montrent que la similitude de centre A qui transforme B en D transforme C en E.

III.2.b On a $\frac{\sigma(A)\sigma(B)}{AB} = \frac{\sigma(B)\sigma(D)}{BD}$ d'où $AC\,BD = AB\,CE$ et $\frac{\tau(A)\tau(B)}{AB} = \frac{\tau(B)\tau(C)}{BC}$ d'où $AD\,BC = AB\,DE$.

Il en résulte que $AC\,BD + AD\,BC = AB\,(CE + DE) \geq AB\,CD$ (inégalité du triangle).

III.2.c L'inégalité (de Ptolémée) est une égalité si et seulement si $CE + ED = CD$ c'est-à-dire si et seulement si le point E appartient au segment $[CD]$ donc si et seulement $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EC}) = \pi$. Mais, les similitudes directes σ et τconservent les angles, donc :

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) - (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}) = (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED})$$

et l'inégalité de Ptolémée est une égalité si et seulement si $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \pi$ c'est-à-dire si les points A, B, C, D sont cocycliques, les points D et C n'étant pas sur le même arc de cercle d'extrémités A et B. Ceci signifie que le quadrilatère $ACBD$ est inscriptible et convexe.

III.3.a Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$ sont droits. On a donc $BD^2 = AD^2 - AB^2$ et $CD^2 = AD^2 - AC^2$. L'égalité de Ptolémée s'écrit alors $AC\,BD = BC\,AD + AB\,CD$ (c'est le quadrilatère $ABCD$ qui est convexe...)

$$BC = \frac{1}{AD}(AC\,BD - AB\,CD) = \frac{1}{AD}(AC\sqrt{AD^2 - AB^2} - AB\sqrt{AD^2 - AC^2})$$

III.3.b Si on prend pour AC le coté du pentagone (arc de 72°) et pour AB le coté de l'hexagone (arc de 60°), l'arc sous-tendu par BC vaut 12°. Numériquement, on trouve :

$AD = 120, \qquad AB = 60, \qquad AC = 60\sqrt{1 + (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2} = 30\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}},$

$BC = AC\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{1800(3 + \sqrt{5})} = 30\sqrt{6}\sqrt{5 - \sqrt{5}} - 15(1 + \sqrt{5}) = 12,543115...$

ce qui donne, dans le système sexagésimal, $BC = 12^P\,32'\,36''...$

III.4 Le quadrilatère $ABCD$ étant convexe et inscriptible et DC et BC étant égaux, on trouve :

$$CD^2\,(AD + AB)^2 = AC^2\,BD^2 = (AD^2 - CD^2)\,(AD - AB)^2$$

c'est-à-dire $CD^2\,(AD + AB) = (AD^2 - CD^2)\,(AD - AB)$ et finalement

$$CD = \sqrt{\frac{1}{2}\,AD\,(AD - AB)} = \sqrt{\frac{1}{2}\,AD\,(AD - \sqrt{AD^2 - BD^2})}.$$

III.5.a On a $\overset{\frown}{AG} < \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AC}$. On en déduit d'après (**) :

$$\frac{AG}{\overset{\frown}{AG}} > \frac{AB}{\overset{\frown}{AB}} > \frac{AC}{\overset{\frown}{AC}}$$

ce qui donne :

$$1^P\,2'\,50''\,40''' = \frac{707}{675} = \frac{47'\,8''}{45'} > AB > \frac{1^P\,34'\,15''}{1^\circ 30'} = \frac{377}{360} = 1^P\,2'\,50''$$

III.5.b La différence entre les deux fractions encadrant AB est de $1/5400$ donc inférieure à $1/3600$ ce qui permet de trouver la valeur de AB à la même précision que celle de AG et AC.

III.5.c La relation (**) signifie que, si on pose $x = \overset{\frown}{AB}$, la fonction :

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{AB} = \frac{x}{2\sin(x/2)}$$

est croissante pour $0 < x < \pi$ (comme on travaille sur des proportions, l'unité de mesure des angles et des longueurs n'a pas d'importance). Autrement dit, on doit vérifier que la fonction $x \mapsto x/\sin x$ est croissante sur l'intervalle $]0, \pi/2[$. Pour cela on étudie le signe de la dérivée de cette fonction. Celui-ci est donné par le signe de $\sin x - x\cos x$. Mais les inégalités prouvées en I.2.c montrent que, pour $x \geq 0$:

$$\sin x - x\cos x \geq x - \frac{1}{6}x^3 - x(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^5$$

Le deuxième membre est positif pour $x^2 \leq 8$ et en particulier pour $x^2 \leq (\pi/2)^2 \leq 3 \leq 8$.

CAPES interne de Mathématiques
session 1999
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [capesint99comp2e]

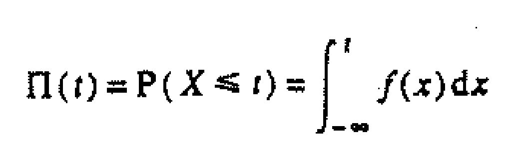
ANNEXE (pour le second exercice)

Loi normale centrée réduite

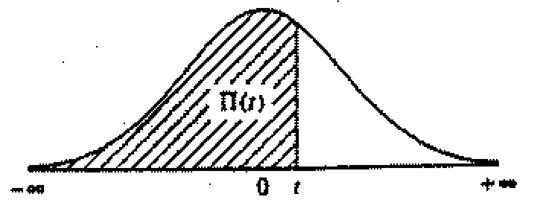
La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$



$$\Pi(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3.0	3.1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3.8	4.0	4.5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1{,}37$ $\Pi(t = 1{,}37) = 0{,}914\,7$

pour $t = -1{,}37$ $\Pi(t = -1{,}37) = 0{,}085\,3$

PREMIER EXERCICE

Cet exercice comporte quatre parties indépendantes.

I. Trois cercles de même rayon

On considère dans un plan (P) trois cercles (C_1), (C_2) et (C_3), de centres respectifs O_1, O_2 et O_3 ayant tous les trois le même rayon R et passant par un même point M. Les cercles (C_1) et (C_2) se recoupent en A_3, (C_2) et (C_3) en A_1, (C_3) et (C_1) en A_2.

I.1. Donner la liste des losanges contenus dans la configuration formée par les sept points $M, O_1, O_2, O_3, A_1, A_2, A_3$.

I.2. Montrer qu'il existe un unique point I tel que les huit points $I, M, O_1, O_2, O_3, A_1, A_2, A_3$ soient les images des sommets d'un parallélépipède par une projection orthogonale sur le plan (P).

I.3. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$? Quel est son rayon ? Quel est l'orthocentre du triangle $A_1 A_2 A_3$?

I.4. Les huit points $I, M, O_1, O_2, O_3, A_1, A_2, A_3$ peuvent-ils être les images des sommets d'un cube par une projection orthogonale sur le plan (P) ?

II. Quatre cercles de même rayon

On considère maintenant dans le plan (P) quatre cercles (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4), de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4 ayant tous le même rayon R et passant par un même point M. Les cercles (C_1) et (C_2) se recoupent en B_1, (C_2) et (C_3) en B_2, (C_3) et (C_4) en B_3, (C_4) et (C_1) en B_4.

II.1. Montrer que $B_1 B_2 B_3 B_4$ est un parallélogramme.

II.2. Comment choisir O_1, O_2, O_3 et O_4 pour que $B_1 B_2 B_3 B_4$ soit un losange ?

II.3. Comment choisir O_1, O_2, O_3 et O_4 pour que $B_1 B_2 B_3 B_4$ soit un rectangle ?

II.4. Comment choisir O_1, O_2, O_3 et O_4 pour que $B_1 B_2 B_3 B_4$ soit un carré ?

III. Sur l'hyperbole équilatère

On considère dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'hyperbole équilatère (H) d'équation $y = \frac{k}{x}$ où k est un réel strictement positif donné.

III.1. Une droite coupant (H) en deux points A et B coupe les axes de l'hyperbole en P et Q. Démontrer la propriété classique suivante : les segments [AB] et [PQ] ont même milieu I. En déduire que les bissectrices de l'angle formé par les droites (AB) et (OI) sont parallèles aux axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

III.2. Soit A′ le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les bissectrices de l'angle formé par les droites (AB) et (A′B) sont parallèles aux axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

III.3. Soit C un autre point de (H). Prouver que $2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2\,(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$.

III.4. Réciproquement, soit trois points fixes A, A′, B non alignés. On suppose $AB \neq A'B$. Quel est l'ensemble des points C tels que $2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2\,(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$?

Tournez la page S.V.P.

IV. Une réciproque à la deuxième partie

IV.1. Soit A, A′, B trois points donnés, non alignés. On suppose $AB \neq A'B$. Deux cercles de même rayon R variable, l'un passant par A et B, l'autre passant par A′ et B se recoupent en un point M. Comparer les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B})$. En déduire que l'ensemble des points M, lorsque R varie, est inclus dans une hyperbole équilatère que l'on précisera.

IV.2. On donne deux droites sécantes (D) et (D′) et un point B qui n'est situé ni sur ces droites ni sur leurs bissectrices. Un cercle de centre B, de rayon variable R, coupe (D) en P et Q et coupe (D′) en P′ et Q′. Montrer que les milieux des segments [PP′], [PQ′], [QP′] et [QQ′] sont sur l'hyperbole équilatère passant par B, K, K′ où K et K′ sont les projetés orthogonaux de B sur (D) et (D′), dont le centre est le milieu de [KK′] et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle formé par (D) et (D′).

IV.3. On considère un parallélogramme $B_1 B_2 B_3 B_4$. Montrer que s'il existe des points O_1, O_2, O_3, O_4 et M tels que $MO_1B_1O_2$, $MO_2B_2O_3$, $MO_3B_3O_4$ soient des losanges, alors $MO_4B_4O_1$ est aussi un losange.

IV.4. Un parallélogramme $B_1 B_2 B_3 B_4$ étant donné, quel est l'ensemble des points M pour lesquels il existe quatre cercles (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) de même rayon R tels que (C_1) et (C_2) passent par M et B_1, (C_2) et (C_3) passent par M et B_2, (C_3) et (C_4) passent par M et B_3 et (C_4) et (C_1) passent par M et B_4 ?

SECOND EXERCICE

L'exercice consiste à donner un sens précis à la phrase suivante, extraite du paragraphe « Probabilités » du programme de la classe de Première S :

« Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois ».

et à l'illustrer d'un exemple numérique.

1. Soit une expérience aléatoire $\mathscr{E}$ représentée par un univers Ω, ensemble des événements élémentaires. On s'intéresse à un événement $\mathscr{A}$, issue possible de cette expérience, représenté par la partie A de Ω, de probabilité inconnue $p = \mathrm{P}(\mathrm{A})$. On supposera A distincte de Ω et non vide et on notera $q = 1 - p$.

   Soit X_0 la variable aléatoire définie sur Ω qui prend la valeur 1 si $\mathscr{A}$ est réalisé et 0 sinon.

   Déterminer la loi de probabilité de X_0, son espérance mathématique $\mathrm{E}(X_0)$ et sa variance $\mathrm{V}(X_0)$.

   On désignera la loi de X_0 par $\mathscr{B}(1, p)$.

2. On répète l'expérience aléatoire décrite ci-dessus n fois. À la i-ième épreuve, on associe la variable X_i, de même loi $\mathscr{B}(1, p)$ que X_0. La répétition de ces n épreuves dans les mêmes conditions expérimentales permet de supposer que les variables X_i sont indépendantes.

   a. On pose alors $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Que représente la variable aléatoire Y_n ?

   b. Déterminer la loi de probabilité de Y_n.

   c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y_n)$ de la variable aléatoire Y_n.

   [On pourra utiliser les propriétés élémentaires de l'espérance en les énonçant ou introduire la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi_n(x) = (px + q)^n$ et établir que $\mathrm{E}(Y_n) = \varphi_n'(1)$].

   d. Calculer la variance $\mathrm{V}(Y_n)$ de la variable aléatoire Y_n.

   [On pourra utiliser les propriétés élémentaires de la variance ou montrer que $\mathrm{E}(Y_n^2) = \varphi_n''(1) + \varphi_n'(1)$ et utiliser la formule de König : $\mathrm{V}(Y_n) = \mathrm{E}(Y_n^2) - [\mathrm{E}(Y_n)]^2$].

   On notera désormais $\mathscr{B}(n, p)$ la loi de Y_n.

3. On considère maintenant la variable aléatoire $F_n = \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a. Que représente la variable aléatoire F_n ?

   b. Déterminer la loi de F_n, son espérance mathématique $\mathrm{E}(F_n)$ et sa variance $\mathrm{V}(F_n)$.

4. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un majorant de la probabilité $\mathrm{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ où ε est un réel strictement positif donné et montrer que cette probabilité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. (Théorème de Bernoulli).

   Trouver un majorant de cette probabilité qui ne dépende pas de p. [On pourra étudier les variations de la fonction qui à p associe $p(1-p)$].

   Comment interprétez-vous concrètement ce résultat ?

5. On désire estimer la valeur de p à 0,025 près. Combien faut-il faire d'épreuves pour pouvoir proposer un tel encadrement de p, avec un niveau de confiance supérieur à 0,95 (cela signifie que lors de la réalisation de ces n épreuves, la probabilité pour que la variable aléatoire F_n prenne une valeur comprise entre $p - 0{,}025$ et $p + 0{,}025$ est supérieure à 0,95) ?

   Quelle interprétation concrète donneriez-vous à ce résultat ? Quels commentaires ce résultat vous inspire-t-il ?

Tournez la page S.V.P.

6. On désire encadrer p avec autant de précision tout en gardant un bon niveau de confiance, mais de manière plus économique, avec un nombre d'épreuves à réaliser beaucoup plus réduit.

Pour cela on désigne par Π la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On a le théorème d'approximation normale de la loi binomiale de Moivre-Laplace que l'on admettra :

Si la loi de la variable aléatoire Y_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors la probabilité que la variable réduite $\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$ soit comprise dans un intervalle donné $[a, b]$ tend vers $\Pi(b) - \Pi(a)$ quand n tend vers l'infini.

Pour contrôler les valeurs des probabilités obtenues par cette approximation, on admettra de plus que :

Si $n > 1000$ et si p et q ne sont pas trop voisins de 0 (en pratique dès que $np > 5$ et $nq > 5$), l'erreur commise dans le calcul de la probabilité que $\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$ soit compris dans un intervalle donné $[a, b]$ est alors inférieure à 10^{-2}.

Utilisant ce résultat, donner une majoration de $P(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ en fonction de n, ε, p et Π. Donner un majorant de cette probabilité ne dépendant pas de p.

L'expérience $\mathcal{E}$ consiste à interroger une personne prise au hasard dans une vaste population sur le fait qu'elle utilise ou non un certain produit. Combien doit-on interroger de personnes pour que ce sondage aléatoire permette d'obtenir à 2,5 % près la proportion de personnes dans la population qui utilisent ce produit, avec un niveau de confiance supérieur à 0,95 ?

Université Pierre et Marie Curie
MATHÉMATIQUES
Préparation à l'écrit du
CAPES interne (1998-99)
P.JARRAUD F.PETIT

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME COMPOSITION DU CAPES INTERNE 1999

PREMIER EXERCICE

I. Trois cercles de même rayon

I.1. Il y a 7 points, donc 21 segments joignant deux de ces points et parmi ces segments on s'intéresse aux quadruplets qui forment les côtés d'un quadrilatère. On peut remarquer que 9 segments sont de longueur R (le rayon commun des cercles) : $[O_1A_2]$, $[O_1A_3]$, $[O_1M]$, $[O_2A_1]$, $[O_2A_3]$, $[O_2M]$,$[O_3A_2]$, $[O_3A_1]$, $[O_3M]$.

Ces segments sont les côtés de trois losanges : $O_1MO_2A_3$, $O_2MO_3A_1$ et $O_3MO_1A_2$.

Y a-t-il d'autres losanges ?

Dans des cas particuliers, cela se peut ; par exemple, si le triangle $O_1O_2O_3$ est équilatéral, en sorte que A_1, A_2 et A_3 sont sur le cercle de centre M et de rayon R, $O_1A_3MA_2$, $O_2A_1MA_3$ et $O_3A_2MA_1$ seront des losanges.

Dans une configuration générale il n'y a que trois losanges (la justification est assez longue, il faut étudier les différents quadrilatères de la figure, il n'est pas clair que l'énoncé le demande et encore moins que le barême récompense le temps passé à cette recherche).

I.2. Des droites parallèles se projettent selon des droites parallèles et donc une face de parallélépipède selon un parallélogramme.

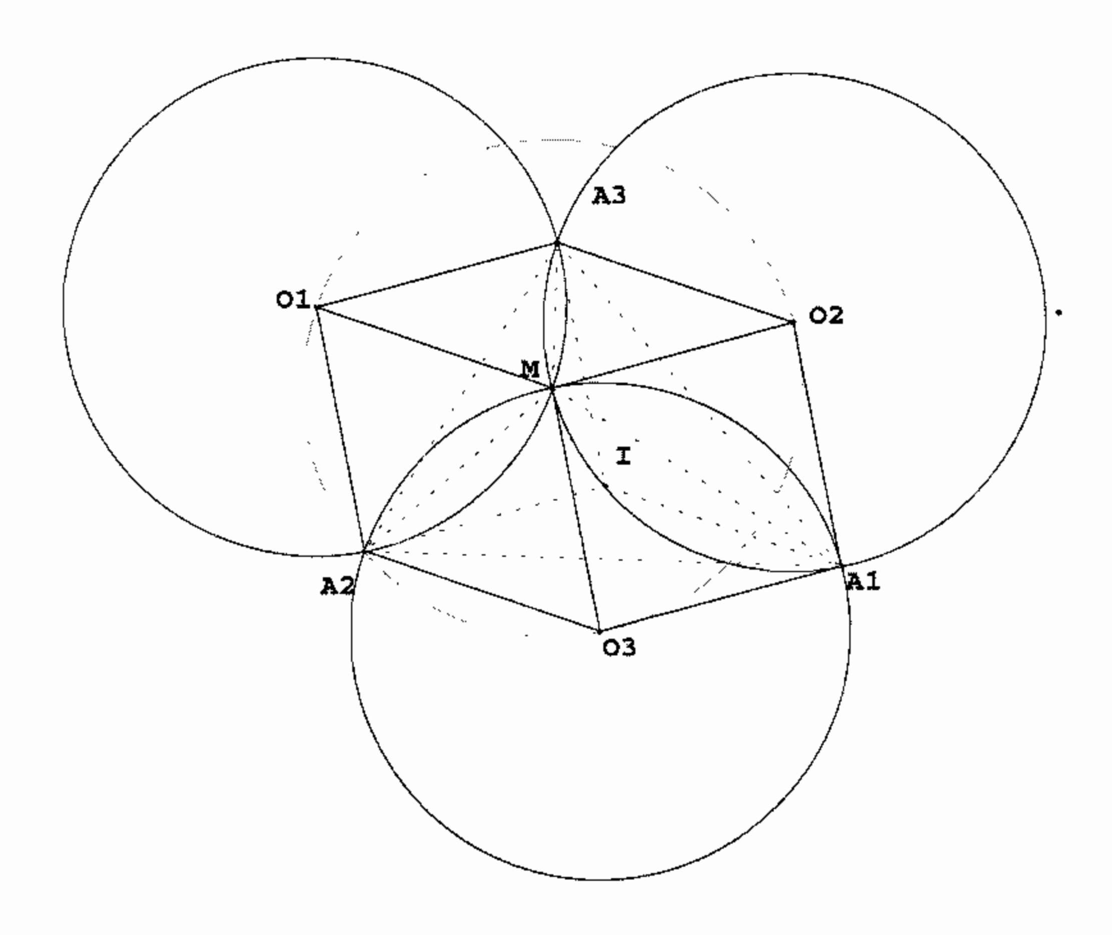
Existence : prenons trois points de l'espace P_1, P_2 et P_3 se projetant sur le plan (P) respectivement en O_1, O_2 et O_3, on construit les points Q_1, Q_2 et Q_3, tels que $\overrightarrow{P_1Q_3} = \overrightarrow{MP_2}$, $\overrightarrow{P_2Q_1} = \overrightarrow{MP_3}$ et $\overrightarrow{P_3Q_2} = \overrightarrow{MP_1}$ puis on construit J par $\overrightarrow{Q_3J} = \overrightarrow{P_1Q_2}$. On a alors $\overrightarrow{JQ_2} = \overrightarrow{Q_3P_1} = \overrightarrow{P_2M} = \overrightarrow{Q_1P_3}$ et de même $\overrightarrow{JQ_1} = \overrightarrow{Q_2P_3} = \overrightarrow{Q_2P_3}$, donc on a bien un parallélépipède. Il suffit alors de projeter J pour avoir I.

Unicité : des vecteurs égaux se projettent selon des vecteurs égaux donc $\overrightarrow{A_3I} = \overrightarrow{O_1A_2}$, ce qui détermine I.

Remarque : on peut bien sûr prendre par exemple $P_1 = O_1$ et $P_2 = O_2$.

I.3 Les parallélogrammes $IA_3O_1A_2$, $IA_1O_2A_3$ et $IA_2O_3A_1$ sont des losanges de côté de longueur R donc I est le cercle du centre circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$.

Dans un losange, les diagonales sont orthogonales ; donc les droites (A_1M) et (O_1O_2) sont orthogonales. en considérant les losanges $O_3A_2O_1M$ et $MO_1A_3O_2$ on obtient les égalités vectorielles $\overrightarrow{O_3A_2} = \overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{O_2A_3}$ qui impliquent $\overrightarrow{O_3O_2} = \overrightarrow{A_2A_3}$. On en déduit que (MA_1) est orthogonale à (A_2A_3) donc est une hauteur du triangle $A_1A_2A_3$. De même (MA_2) est une hauteur de ce triangle dont l'orthocentre est donc M.



Remarque : la démonstration précédente suppose implicitement que les droites sont définies donc que les points en jeu sont distincts. Supposons par exemple que $M = A_1$, utilisant les losanges du I.1, O_1 est le milieu de $[A_3A_2]$, et M est bien l'orthocentre du triangle rectangle A_2A_3M.

I.4. Nous allons utiliser la propriété suivante : soit $\mathcal{P}$ un plan et $\overrightarrow{v}$ un vecteur de longueur L, si l'angle (géométrique) de $\overrightarrow{v}$ avec un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est τ, la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur $\mathcal{P}$ est $L \sin \tau$.

Un cube est un parallélépipède Π rectangle dont tous les côtés ont la même longueur. Or ces côtés doivent se projeter selon des segments de même longueur (les losanges, toujours les losanges,...) ce qui fait que les angles des côtés de Π avec la normale au plan sont tous égaux. Cette condition est vérifiée si (et seulement si) une diagonale du cube est normale au plan. Observons qu'alors $M = I$ et $A_1O_3A_2O_1A_3O_2$ est un hexagone régulier.

II. Quatre cercles de même rayon

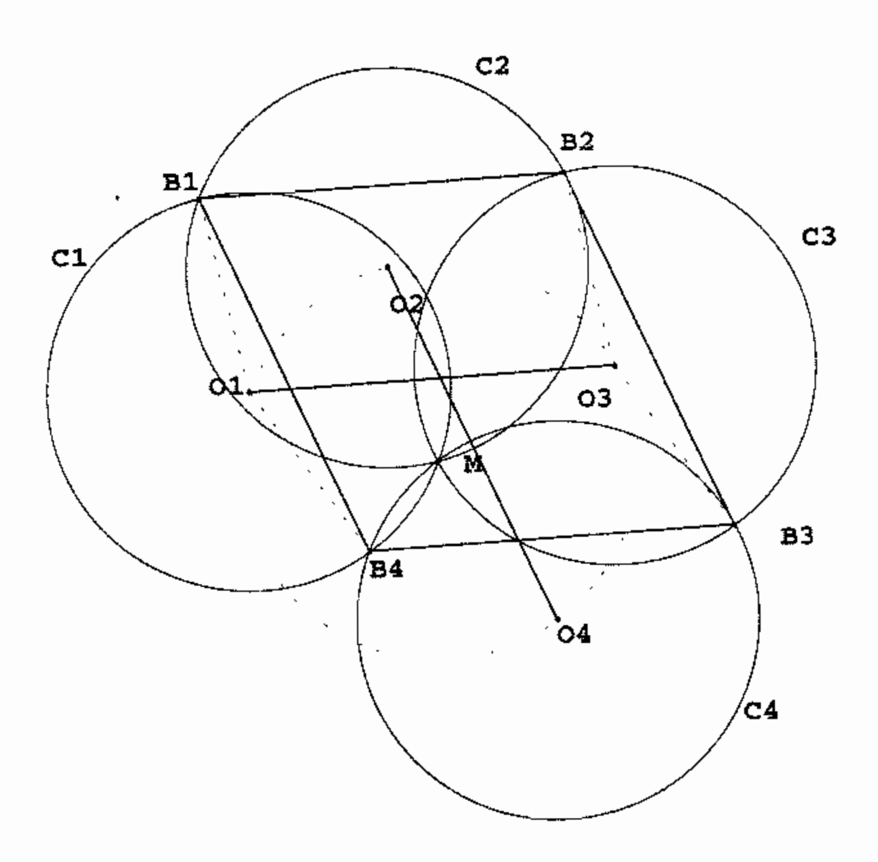
II.1 Les quadrilatères $O_1B_1O_2M$ et $MO_2B_2O_3$ sont (air connu) des losanges, on en déduit que $\overrightarrow{O_1B_1} = \overrightarrow{MO_2} = \overrightarrow{O_3B_2}$ et $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{O_1O_3}$.

Le même argument montre que $\overrightarrow{B_4B_3} = \overrightarrow{O_1O_3}$ et on en déduit que $B_1B_2B_3B_4$ est un parallélogramme.

L'argument précédent montre aussi que $\overrightarrow{B_2B_3} = \overrightarrow{B_1B_4} = \overrightarrow{O_2O_4}$.

Les réponses aux questions suivantes sont alors immédiates :

II.2 $B_1B_2B_3B_4$ est un losange si et seulement si les segments $[O_2O_4]$ et $[O_1O_3]$ sont de même longueur.



II.3 $B_1B_2B_3B_4$ est un rectangle si et seulement si les segments $[O_2O_4]$ et $[O_1O_3]$ sont perpendiculaires.

II.4 $B_1B_2B_3B_4$ est un carré si et seulement si les segments $[O_2O_4]$ et $[O_1O_3]$ sont perpendiculaires et de même longueur (ce ne sont pas forcément deux diagonales perpendiculaires !).

III. Sur l'hyperbole équilatère

III.1. Une droite coupant l'hyperbole équilatère (H) en deux points n'est pas parallèle aux asymptotes[1] donc a une équation du type $y = mx + p$ avec $m \neq 0$. Si $p \neq 0$, les points d'intersection avec les asymptotes ont pour abscisse 0 et $-p/m$ donc le milieu de $[PQ]$ a pour abscisse $-p/2m$. Les abscisses des points d'intersection avec (H) sont les racines de l'équation $k = xy = x(mx + p)$ soit $mx^2 + px - k = 0$. L'abscisse du milieu de $[AB]$ est la demi-somme des racines $-p/2m$, donc $[AB]$ et $[PQ]$ ont même milieu. Donc I est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle POQ, le triangle OIP est isocèle et la bissectrice de l'angle $\widehat{OIP}$ est perpendiculaire à la base du triangle donc à un axe. On en déduit que les bissectrices de l'angle des droites (OI) et $(PQ) = (AB)$ sont parallèles aux axes de coordonnées.

Si $p = 0$, la droite passe par l'origine : $P = Q = O$ et A et B sont symétriques par rapport à O, la première propriété est encore vraie mais on ne peut pas parler de la seconde puisque la droite (OI) n'est pas définie.

III.2. La droite $(A'B)$ est parallèle à la droite (OI), droite des milieux du triangle $A'BA$ donc III.2 se déduit immédiatement de III.1.

[1] Il y a une erreur dans l'énoncé qui confond les axes de coordonnées c'est à dire les asymptotes de (H) et les axes de l'hyperbole qui sont les bissectrices des axes de coordonnées.

Reformulons ce résultat : comme deux droites sont échangées par la symétrie axiale (on dit aussi réflexion) d'axe une bissectrice de l'angle qu'elles forment, cela entraîne qu'une réflexion d'axe parallèle à l'un des axes de coordonnées transforme (AB) en une droite parallèle à $(A'B)$[2].

III.3. D'après la question précédente, la symétrie d'axe $(O, \overrightarrow{i})$ transforme la droite (AB) en une droite parallèle à la droite $(A'B)$ et la droite (AC) en une droite parallèle à la droite $(A'C)$. On en déduit l'égalité de mesures d'angle de droites $(AB, AC) = -(A'B, A'C) = (A'C, A'B) \quad (\pi)$. En multipliant par 2, on obtient une égalité de mesures d'angles de vecteurs ou si on préfère[3] l'égalité des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$.

III.4. Soit O le milieu du segment $[AA']$ et $\mathcal{H}$ l'hyperbole équilatère de centre O, passant par A (et donc par A') et d'asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle formé par les droites (AB) et $(A'B)$. Cette hyperbole n'est pas dégénérée puisque $AB \neq A'B$. Montrons que B appartient à $\mathcal{H}$. La droite (AB) n'est pas parallèle aux asymptotes de $\mathcal{H}$ donc coupe $\mathcal{H}$ en deux points : A et B'. D'après la définition de $\mathcal{H}$ la droite $(A'B)$ a une direction symétrique par rapport à une asymptote de celle de (AB), il en est de même de $(A'B')$ d'après III.2, donc les droites $(A'B)$ et $(A'B')$ sont confondues et $B = B'$ est sur $\mathcal{H}$. La même démonstration montre que C est sur $\mathcal{H}$. Réciproquement le III.3 montre que tout point C de $\mathcal{H}$ vérifie $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$. Le lieu cherché est donc $\mathcal{H}$.

IV. Une réciproque à la deuxième partie

IV.1. Supposons (ce qui est le cas général) que $M \neq B$, les deux cercles sont de même rayon donc symétriques par rapport à la droite (BM). Si on note A'' le symétrique de A par rapport à cette droite, A'' est sur le cercle passant par B, M et A'.

On a donc $(AB, AM) = -(A''B, A''M) = -(A'B, A'M) \quad (\pi)$ puisque A', A'', B et M sont cocycliques. On en déduit que $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B})$, et d'après le III.4[4] M est sur l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ passant par A de centre le milieu de $[AA']$ et d'asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle formé par les droites (AB) et $(A'B)$.

IV.2. Soit I le point d'intersection de D et D' et M le milieu de $[PP']$, comme K est le milieu de $[PQ]$ et K' celui de $[P'Q']$, les droites (MK) et $(P'Q)$, d'une part et (MK') et (PQ') de l'autre sont parallèles.

Comme les points P, P', Q et Q' sont cocyliques on a l'égalité : $(QP, QP') = (Q'P, Q'P') \quad (\pi)$. On en déduit $(KI, MK) = (MK', K'I) \quad (\pi)$, Cela montre que M est sur l'hyperbole équilatère $\mathcal{K}$ passant par K, K' et I, de centre O milieu de $[KK']$ et d'asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle formé par les droites $(KI) = D$ et $(K'I) = D'$. L'argument est le même pour les milieux des segments $[PQ']$, $[QP']$ et $[QQ']$.

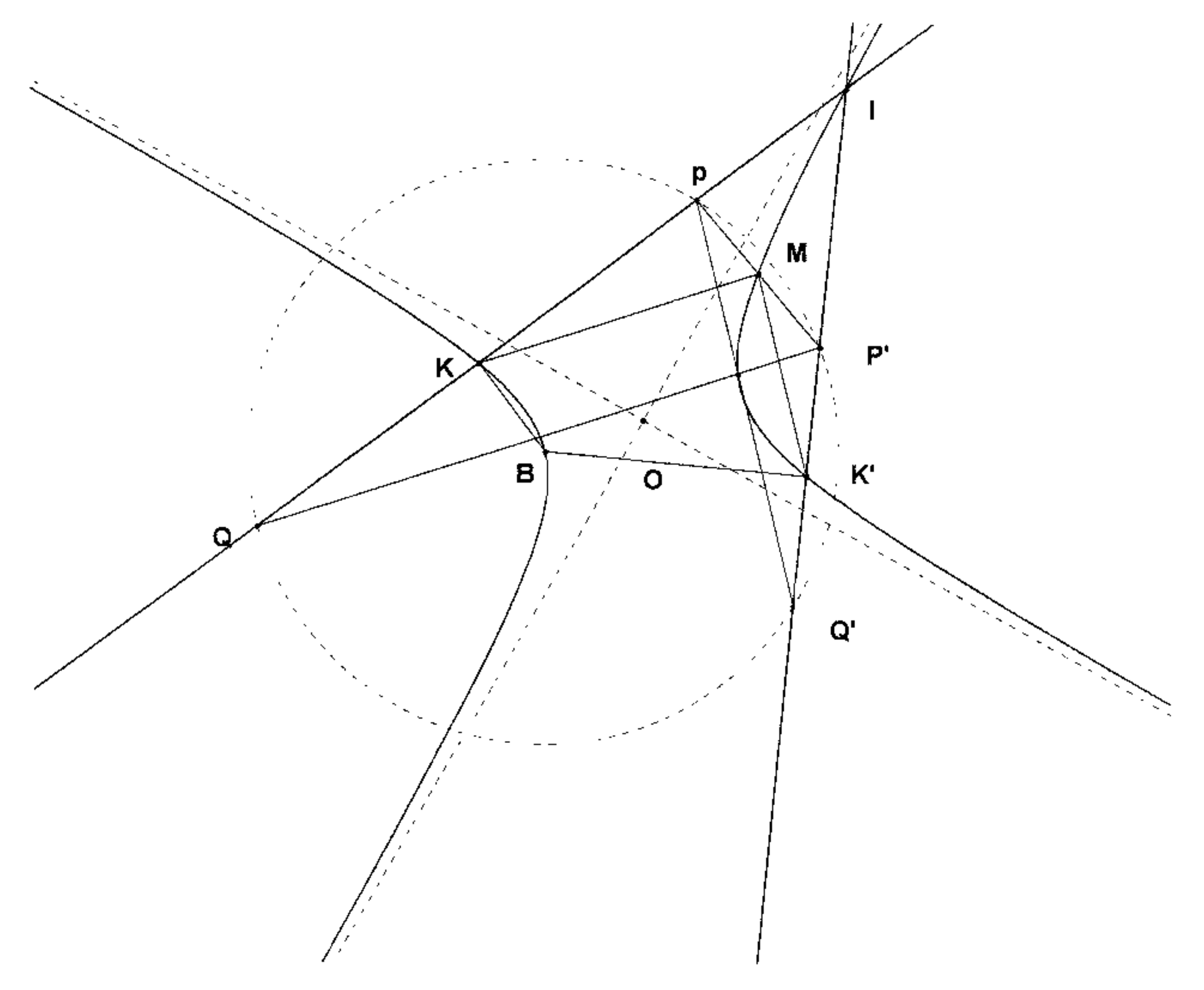
Il reste à vérifier que B est sur cette hyperbole : cela résulte immédiatement de $(KI, KB) = (K'B, K'I) \quad (\pi)$ puisque ces deux angles sont droits.

---

[2] Alors que la première composition fait, avec Ptolémée, la promotion de l'archéologie mathématique, il n'est sans doute pas mauvais de signaler ici que cette reformulation est ce qu'on appelle en didactique des mathématiques un changement de point de vue. Les lecteurs en apprécieront la puissance à la question suivante.

[3] L'énoncé suit les instructions d'il y a quelques années sur les programmes de lycée et utilise des angles de vecteurs, au prix de la contorsion de la multiplication par 2.

[4] On ne tient pas compte de l'indication de l'énoncé comme quoi les parties sont indépendantes.



En continuant un peu, on retrouve un résultat classique (connu des bacheliers scientifiques il y a 50 ans...), les bissectrices de l'angle formé par les droites (BK) et (BK') sont parallèles aux bissectrices des droites D et D'.

IV.3. Puisque $B_1B_2B_3B_4$, $O_1B_1O_2M$, $O_2B_2O_3M$ et $O_3B_3O_4M$ sont des parallélogrammes, on a

$\overrightarrow{B_3B_2} = \overrightarrow{B_4B_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{B_2O_3}$ et $\overrightarrow{B_3O_3} = \overrightarrow{O_4M}$, d'où

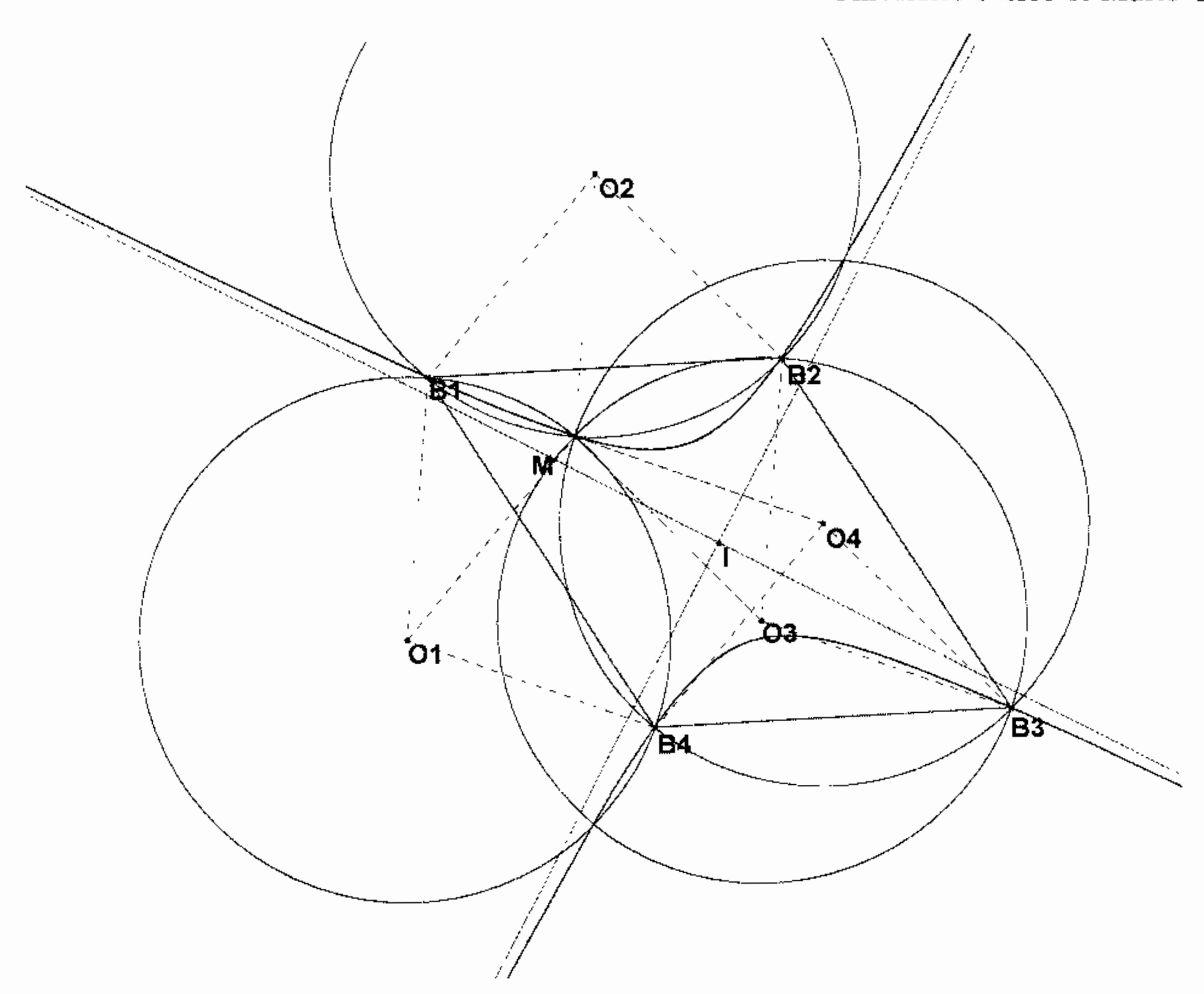
$\overrightarrow{B_4O_1} = \overrightarrow{B_4B_1} + \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{B_3B_2} + \overrightarrow{B_2O_3} = \overrightarrow{B_3O_3} = \overrightarrow{O_4M}$ et $B_4O_1MO_4$ est un parallélogramme, comme $MO_1 = MO_2 = MO_3 = MO_4$, c'est un losange.

IV.4. Soit M un point ayant la propriété indiquée, montrons qu'il est sur l'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre I le milieu commun des diagonales $[B_1B_3]$ et $[B_2B_4]$, passant par les points B_1, B_2, B_4 et (par symétrie par rapport à I) par B_3, d'asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle formé par les droites (B_1B_4) et (B_1B_2). D'après la question III.4 il suffit de vérifier que $(B_4B_1, B_4M) = (B_2M, B_2B_1)\ \ (\pi)$.

Le cercle (C_1) de centre O_1 passe par M,B_4 et B_1, on a $(B_4B_1, B_4M) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1B_1}, \overrightarrow{O_1M})\ \ (\pi)$ et de même $(B_2B_1, B_2M) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2B_1}, \overrightarrow{O_2M})\ \ (\pi)$. Les cercles (C_1) et (C_2) sont de même rayon, donc symétriques par rapport à leur droite d'intersection (B_1M), on en déduit que $(\overrightarrow{O_1B_1}, \overrightarrow{O_1M}) = -(\overrightarrow{O_2B_1}, \overrightarrow{O_2M})\ \ (2\pi)$ qui donne l'égalité angulaire voulue : M est sur $\mathcal{H}$.

Remarquons que

(*) les asymptotes de $\mathcal{H}$ sont aussi parallèles aux bissectrices de l'angle formé par les droites (B_2B_1) et $B_2B_3)$, on a donc $(B_1B_2, B_1M) = (B_3M, B_3B_2)\ \ (\pi)$.



Réciproquement, soit M un point de $\mathcal{H}$ différent des B_i, il n'est pas sur les côtés du parallèlogramme (une droite coupe une hyperbole en au plus deux points), soit donc (C_1) le cercle de centre noté O_1 circonscrit au triangle B_1MB_4 et (C_2) le cercle de centre O_2 circonscrit au triangle B_1MB_2.

Comme M est sur l'hyperbole $\mathcal{H}$, $(B_4B_1, B_4M) = (B_2M, B_2B_1) \quad (\pi)$ d'où l'on déduit que $(\overrightarrow{O_1B_1}, \overrightarrow{O_1M}) = -(\overrightarrow{O_2B_1}, \overrightarrow{O_2M}) \quad (2\pi)$.

Les triangles B_1O_2M et B_1O_1M sont donc symétriques par rapport à la droite (MB_1) et les deux cercles (C_1) et (C_2) ont même rayon.

Soit (C_3) et (C_4) circonscrits à MB_2B_3 et MB_3B_4, grâce à la propriété (*), les cercles (C_2) et (C_3) d'une part, (C_3) et (C_4) de l'autre, ont le même rayon. Donc l'ensemble cherché est $\mathcal{H}$.

Remarque : si M est l'un des B_i, par exemple B_1, on détermine d'abord (C_3) circonscrit à MB_2B_3 et (C_4) circonscrit à MB_3B_4 puis par symétrie par rapport aux côtés (C_1) et (C_2) qui sont tangents (en $M = B_1$).

SECOND EXERCICE

1. La variable aléatoire X_0 prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et l'on a :

   $P[X_0 = 1] = P[\mathcal{A}$ est réalisé $] = P[A] = p$.

   $P[X_0 = 0] = P[\mathcal{A}$ n'est pas réalisé$] = P[A^C] = 1 - P[A] = 1 - p = q$.

   La variable aléatoire X_0 suit une loi de Bernoulli de paramètre p. On en déduit :

$E[X_0] = 1 \cdot P[X_0 = 1] + 0 \cdot P[X_0 = 0] = p.$
$E[(X_0)^2] = 1^2 \cdot P[X_0 = 1] + 0^2 \cdot P[X_0 = 0] = p.$
D'où : $V[X_0] = E[(X_0)^2] - E[X_0]^2 = p - p^2 = pq.$

2.a. Y_n représente le nombre de fois où l'événement $\mathcal{A}$ a été réalisé lors des n épreuves.

b. Y_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Donc Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Démontrons-le (la preuve était-elle exigée ?) : par définition, la variable aléatoire Y_n prend ses valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$.

Soit $k \in \{0, 1, ..., n\}$:

$\{Y_n = k\} =$

$$\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} \{X_1 = ... = X_{i_1 - 1} = 0, X_{i_1} = 1, X_{i_1+1} = ... = X_{i_2-1} = 0,$$
$$X_{i_2} = 1, ..., X_{i_{k-1}+1} = ... = X_{i_k - 1} = 0, X_{i_k} = 1, X_{i_k+1} = ... = X_{i_n} = 0\}.$$

La réunion précédente étant finie et disjointe, on a :

$P[Y_n = k] =$

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} P[\{X_1 = 0\} \bigcap ... \bigcap \{X_{i_1 - 1} = 0\} \bigcap \{X_{i_1} = 1\} \bigcap \{X_{i_1+1} = 0\} \bigcap ...$$
$$\bigcap \{X_{i_2-1} = 0\} \bigcap \{X_{i_2} = 1\} \bigcap \{X_{i_2+1} = 0\} \bigcap ... \bigcap \{X_{i_{k-1}+1} = 0\} \bigcap ...$$
$$\bigcap \{X_{i_k-1} = 0\} \bigcap \{X_{i_k} = 1\} \bigcap \{X_{i_k+1} = 0\} \bigcap ... \bigcap \{X_n = 0\}]$$

Comme les variables $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, l'expression ci-dessus vaut :

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} P[X_1 = 0] ... P[X_{i_1 - 1} = 0] P[X_{i_1} = 1] P[X_{i_1+1} = 0] ... P[X_{i_2-1} = 0]$$
$$P[X_{i_2} = 1] P[X_{i_2+1} = 0] ... P[X_{i_{k-1}+1} = 0] ... P[X_{i_k-1} = 0] P[X_{i_k} = 1] P[X_{i_k+1} = 0] ... P[X_n = 0]$$
$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} q^{i_1 - 1} p q^{i_2 - i_1 - 1} p ... q^{i_k - i_{k-1} - 1} p q^{n - i_k} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} q^{n-k} p^k.$$

Or il existe autant de k-uplets $(i_1, ..., i_k)$ tels que $1 \le i_1 < ... < i_k \le n$ que de façons de choisir k éléments distincts de $\{1, ..., n\}$, c'est-à-dire qu'il existe C_n^k tels k-uplets. D'où : $P[Y_n = k] = C_n^k q^{n-k} p^k$.

c. L'espérance étant linéaire, on a :

$E[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n E[X_0]$ car toutes les variables $X_1, ..., X_n$ ont même loi que X_0.

D'où : $E[Y_n] = np$, d'après la question 1a.

d D'après les propriétés de la variance, comme les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, on a :

$$V[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n V[X_i].$$

Comme toutes les variables $X_1, ..., X_n$ ont même loi que X_0, on en déduit :

$V[Y_n] = \sum_{i=1}^n V[X_0] = nV[X_0] = npq$, d'après la question 1a.

3.a La variable aléatoire F_n représente la fréquence de réalisation de l'événement $\mathcal{A}$ sur les n expériences aléatoires successives.

b La variable aléatoire F_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1/n, 2/n, ..., (n-1)/n, 1\}$.

Soit $k \in \{0, 1, ..., n\}$,

$P[F_n = k/n] = P[Y_n = k] = C_n^k q^{n-k} p^k$, d'après la question 2b.

L'espérance étant linéaire : $E[F_n] = E[\frac{1}{n} Y_n] = \frac{1}{n} E[Y_n] = \frac{1}{n} np = p$, d'après la question 2c.

La variance étant quadratique : $V[F_n] = V[\frac{1}{n} Y_n] = \frac{1}{n^2} V[Y_n] = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}$, d'après la question 2d.

4. Rappelons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit F une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux. Alors, si $E[F]$ et $V[F]$ désignent respectivement l'espérance et la variance de F :

$\forall \varepsilon > 0, P[|F - E[F]| \geq \varepsilon] \leq V[F]/\varepsilon^2$.

On applique cette inégalité à la variable F_n. D'après la question 3a,

$P[|F_n - E[F_n]| \geq \varepsilon] = P[|F_n - p| \geq \varepsilon] \leq V[F_n]/\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{pq}{n} = \frac{pq}{\varepsilon^2 n}$.

On en déduit l'encadrement suivant :

$0 \leq P[|F_n - p| \geq \varepsilon] \leq \frac{pq}{\varepsilon^2 n} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$.

Comme $\lim_{n \to \infty} \frac{pq}{\varepsilon^2 n} = 0$, l'encadrement précédent entraîne

$\lim_{n \to \infty} P[|F_n - p| > \varepsilon] = 0$.

L'application $p \in [0, 1] \mapsto p(1-p)$ atteint son maximum pour $p = 1/2$ où elle vaut $1/4$ (on a un morceau de parabole !) et donc : $\forall p \in [0, 1], p(1-p) \leq 1/4$. (On peut aussi remarquer que le produit des deux nombres p et $1-p$ dont la somme est constante est maximal lorsque ces deux termes sont égaux, i.e. lorsque $p = 1 - p$).

On en déduit :

$0 \leq P[|F_n - p| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$;

puis : $P[|F_n - p| < \varepsilon] = 1 - P[|F_n - p| \geq \varepsilon] \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$.

Ce résultat signifie que la variable F_n tend en probabilité vers p, uniformément en p. Ainsi, F_n est un estimateur du paramètre p, et p appartient à l'intervalle $]F_n - \varepsilon, F_n + \varepsilon[$ avec une probabilité au moins égale à $1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$.

5 On fixe $\varepsilon = \frac{1}{4} 10^{-1}$. D'après la question 4, pour que p appartienne à l'intervalle $]F_n - \varepsilon, F_n + \varepsilon[$ avec une probabilité au moins égale à 0,95, il suffit que $1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n} \geq 0,95$.

Il suffit donc que $n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2(1 - 0,95)} = \frac{4}{10^{-2}\ 5\ 10^{-2}} = 8000$.

La méthode ne semble pas très intéressante, car pour avoir une précision faible (à 0,025 près, ce n'est pas très précis), avec une probabilité pas très grande (0,95 n'est pas non plus particulièrement proche de 1), il faut par cette méthode atteindre 8000 expériences successives, ce qui est par contre très grand.

6 Rappelons d'abord quelques propriétés de l'application Π. L'application Π est dérivable à dérivée strictement positive, donc elle est continue strictement croissante.

Comme de plus $\lim_{t\to-\infty}\Pi(t)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}\Pi(t)=1$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Remarquons ensuite que :

$$P[|F_n-p|>\varepsilon]=1-P[|F_n-p|\leq\varepsilon]=1-P[|Y_n-pn|\leq\varepsilon n]$$

$$=1-P[-\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\leq\frac{Y_n-pn}{\sqrt{npq}}\leq\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}]=1-P[-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\leq\frac{Y_n-pn}{\sqrt{npq}}\leq\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}]\ (*)$$

Des résultats rappelés dans l'énoncé, on déduit que :

$\forall n>1000,\forall p\in[0,1],\forall q\in[0,1],(np>5$ et $nq>5)$

$\rightarrow\left(\forall a\in\mathbb{R},\forall b\geq a,\Pi(b)-\Pi(a)-0,01\leq P[a\leq\frac{Y_n-pn}{\sqrt{npq}}\leq b]\leq\Pi(b)-\Pi(a)+0,01\right)$.

Soient donc $n>1000$, $p\in[0,1]$ et $q\in[0,1]$, tels que $np>5$ et $nq>5$.

Alors, avec $a=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ et $b=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, on obtient :

$$\Pi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})-\Pi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})-0,01\leq P\left[-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\leq\frac{Y_n-pn}{\sqrt{npq}}\leq\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right]$$

$$\leq\Pi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})-\Pi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})+0,01$$

Ce qui équivaut à

$$-\Pi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})+\Pi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})-0,01\leq-P[-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\leq\frac{Y_n-pn}{\sqrt{npq}}\leq\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}]$$

$$\leq -\Pi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})+\Pi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})+0,01$$

puis, d'après (*)

$-\Pi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})+\Pi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})+0,99\leq P[|F_n-p|>\varepsilon]\leq-\Pi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})+\Pi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})+1,01.$

D'où la majoration :

$P[|F_n-p|>\varepsilon]\leq-\Pi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}})+\Pi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}})+1,01=2,01-2\Pi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}})$

en tenant compte du fait (rappelé dans l'énoncé) que : $\forall t\in\mathbb{R},\Pi(-t)=1-\Pi(t)$.

Or, d'après la question 4, $\sqrt{p(1-p)}\leq\frac{1}{2}$. Comme l'application Π est croissante, on en déduit : $P[|F_n-p|>\varepsilon]\leq2,01-2\Pi(2\varepsilon\sqrt{n})$ dès que $n>1000$, $p\in[0,1]$ et $q\in[0,1]$ sont tels que $np>5$ et $nq>5$.

Remarque. Compte tenu de l'expression du théorème de Moivre Laplace rappelé dans l'énoncé (et où figure l'intervalle fermé $[a,b]$), on obtient en toute rigueur une inégalité stricte dans $P[|F_n-p|>\varepsilon]$. Cependant, tous les calculs restent valables avec des inégalités larges.

Application numérique : $\varepsilon = \frac{1}{4}10^{-1}$.

$P[|F_n - p| \leq 2,5.10^{-2}] = 1 - P[|F_n - p| > 2,5.10^{-2}] \geq 1 - 2,01 + 2\Pi(5.10^{-2}\sqrt{n})$.

Pour que p appartienne à l'intervalle $]F_n - \varepsilon, F_n + \varepsilon[$ avec une probabilité au moins égale à 0,95, il suffit que $1 - 2,01 + 2\Pi(5.10^{-2}\sqrt{n}) \geq 0,95$, i.e. $\Pi(5.10^{-2}\sqrt{n}) \geq 0,98$.

Comme l'application Π est bijective croissante, ceci équivaut à $5.10^{-2}\sqrt{n} \geq \Pi^{-1}(0,98)$, soit encore $n \geq (20\Pi^{-1}(0,98))^2$.

On peut estimer $\Pi^{-1}(0,98)$ par interpolation affine. D'après la table, on a :

$\Pi(2,05) \simeq 0,9798$ et $\Pi(2,06) \simeq 0,9803$, d'où $\Pi(2,05 + \frac{2}{5}.10^{-2}) \simeq 0,98000$,

puis $\Pi^{-1}(0,98) \simeq 2,054$.

On en déduit $n \geq 1688$. On vérifie alors que $n > 1000$. On rappelle que le résultat obtenu est valable pour toutes valeurs de p et de q telles que $np > 5$ et $nq > 5$.

On pourra donc prendre $n = 1688$, ce qui est bien plus faible qu'avec la méthode précédente. L'estimation de p sera donc valable pour toute valeur de p telle que

$$\frac{5}{1688} < p < 1 - \frac{5}{1688}.$$

CAPES interne de Mathématiques
session 2000
première composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [capesint00comp1e]

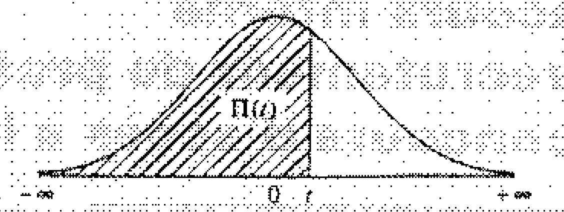
Loi normale centrée réduite

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\Pi(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1,37$ — $\Pi(t = 1,37) = 0,914\,7$

pour $t = -1,37$ — $\Pi(t = -1,37) = 0,085\,3$

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des représentations graphiques interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Si le candidat détecte dans l'énoncé ce qu'il pense être une erreur, il continue son travail en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Les trois exercices proposés sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

EXERCICE I

LONGUEUR DE L'ALGORITHME D'EUCLIDE

Le calcul du p.g.c.d. ($a \wedge b$) de deux nombres a et b ($a > b > 0$) par l'algorithme d'Euclide se fait par divisions successives.

Exemple : $a = 44$ $b = 18$

$44 = 2 \times 18 + 8$

$18 = 2 \times 8 + 2$

$8 = 4 \times 2 + 0$

$44 \wedge 18 = 2$

Si on désigne par $l(a,b)$ la longueur de l'algorithme, c'est-à-dire le nombre de divisions nécessaires pour aboutir au résultat, nous avons ici :

$$l(44,18) = 3.$$

L'objet de l'exercice est de majorer $l(a,b)$. Pour cela on note :

$$r(1),\ r(2),\ r(3),\ \ldots,\ r(n)$$

les restes des n divisions successives (on a donc $l(a,b) = n$ et $r(n) = 0$). On note par convention $a = r(-1)$ et $b = r(0)$.

1. Montrer que pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $r(k-2) \geq r(k-1) + r(k)$.

2. Soit $(\mathrm{F}(n))$ la suite de Fibonacci définie par :

$$\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1) = 1$$

$$\mathrm{F}(n) = \mathrm{F}(n-2) + \mathrm{F}(n-1) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Montrer qu'en posant $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a $\alpha^{n-1} \leq \mathrm{F}(n)$.

3. Montrer que

$$r(n-k-1) \geq \mathrm{F}(k)$$

et en déduire que n vérifie une majoration de la forme :

$$n \leq \mathrm{A}\ln(a) + \mathrm{B}.$$

Vérifier cette majoration sur un exemple (on pourra prendre $\mathrm{B} = 1$ et $\mathrm{A} < 2{,}1$).

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

DE L'OBSERVATION STATISTIQUE À L'ESTIMATION

(L'usage d'une calculatrice scientifique n'est pas obligatoire mais peut être très utile)

I. Description d'une série statistique.

On veut contrôler la qualité des livraisons d'une coopérative agricole de production de pommes de terre. En principe, elle produit des sacs de 5 kg, avec une tolérance de 0,2 kg en moins.

On pèse 50 sacs pris au hasard. Cela donne la série statistique suivante de $n = 50$ valeurs du caractère X qui à tout sac produit associe son poids.

5,6 – 4,9 – 5,5 – 5,0 – 4,4 – 5,3 – 5,0 – 5,1 – 5,8 – 5,3 - 5,3 – 5,3 – 5,0 – 5,5 – 5,0 – 5,1 – 4,3 – 4,5 – 5,2 – 4,4 – 5,3 – 4,9 - 5,4 – 4,5 – 4,6 – 4,4 – 5,6 – 5,6 – 5,7 – 4,4 – 5,1 – 5,1 – 4,9 – 5,4 – 5,2 – 5,1 – 4,8 – 5,0 – 3,8 – 5,4 – 4,3 – 5,2 – 5,3 – 5,1 – 5,4 – 4,0 – 4,9 – 5,5 – 4,5 – 5,5.

1. Quelle est l'étendue de cette série ? Déterminer sa médiane η, ses quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart inter-quartile $Q_3 - Q_1$.
2. Classer cette série en classes d'égale étendue de 0,2 kg. On donnera le tableau des effectifs, des fréquences et des fréquences cumulées. Indiquer quelles sont les classes modale et médiane. Donner une représentation graphique de cette série (effectifs et fréquences cumulées).
3. Après avoir rappelé leurs définitions, calculer au dixième de kilogramme près, la moyenne $\bar{x}$ de la série donnée, ainsi que son écart-type σ_X. Quelle valeur obtient-on pour la moyenne pondérée de la série classée ?
4. De manière générale, on considère une série de n observations x_i d'un caractère X, $\bar{x}$ et σ_X désignant respectivement la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.
   a. Un réel $t \geqslant 1$ étant donné, montrer que la somme $\sum_i (x_i - \bar{x})^2$, prise sur l'ensemble des indices i tels que $|x_i - \bar{x}| \geqslant t \cdot \sigma_X$, est majorée par $n \cdot \sigma_X^2$.
   b. En déduire que la fréquence des valeurs x_i situées dans l'intervalle $]\bar{x} - t \cdot \sigma_X, \bar{x} + t \cdot \sigma_X[$ ne peut être inférieure à $1 - \frac{1}{t^2}$.
   c. Donner un minorant de la fréquence des valeurs x_i situées dans l'intervalle $]\bar{x} - 2\,\sigma_X, \bar{x} + 2\,\sigma_X[$ (respectivement l'intervalle $]\bar{x} - 3\,\sigma_X, \bar{x} + 3\,\sigma_X[$).
5. Pour toute série statistique issue de l'observation d'un caractère quantitatif, déterminer un intervalle centré sur $\bar{x}$ qui contient au moins la moitié de ses éléments.
   Qu'en est-il pour l'exemple donné des sacs de pommes de terre ? Comparer avec l'intervalle inter-quartile obtenu dans la première question.

II. Estimation de la valeur moyenne des poids des sacs produits par la coopérative.

On désigne par X_0 la variable aléatoire qui prend pour valeur le poids d'un sac de pommes de terre pris au hasard dans la production de la coopérative. Pour tout prélèvement de n sacs, la série statistique de leurs poids constitue l'observation d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X_0. Les X_i sont donc des variables aléatoires de même loi que X_0 et indépendantes.

On admettra que l'on peut représenter la loi de X_0 par une loi normale $N(m, \sigma^2)$, où la moyenne m et l'écart-type σ sont inconnus. On désigne par $\overline{X}_n$ la moyenne arithmétique des variables X_i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

1. Calculer l'espérance mathématique de $\overline{X}_n$.
2. Calculer la variance de $\overline{X}_n$.

   Montrer que celle-ci tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Expliquer pourquoi la moyenne $\bar{x}_n$ des observations x_i peut être donnée pour estimer la valeur de m, cette estimation étant d'autant meilleure

que n est grand.

3. À partir de l'observation d'un échantillon de taille n de X_0, on souhaite donner pour m un encadrement de confiance de niveau 0,95, c'est-à-dire un intervalle aléatoire de la forme $]\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon[$, tel que :

$$P(\overline{X}_n - \varepsilon < m < \overline{X}_n + \varepsilon) = 0{,}95.$$

Déterminer ε en fonction de n et σ. On pourra admettre que $\overline{X}_n$ suit une loi normale dont on donnera les paramètres.

4. Quelle estimation ponctuelle $\hat{\sigma}$ proposez-vous pour la valeur de σ ? Effectuer cette estimation pour la série des 50 valeurs données en I.

5. Quel encadrement de confiance proposez-vous pour m à partir de l'échantillon observé ? Pensez-vous que la coopérative a satisfait à ses engagements ?

[On pourra admettre que la taille $n = 50$ de l'échantillon considéré permet l'approximation normale $N\left(m, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right)$ pour la loi de la variable $\overline{X}_{50}$].

EXERCICE 3

UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

On se propose d'étudier les fonctions f de **R** dans **R** qui satisfont à la relation :

$$[1] \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de } \mathbf{R},\ f(x)f(y) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}.$$

On note E l'ensemble des fonctions de **R** dans **R** satisfaisant à [1].

Préambule : approximation d'un réel par méthode de dichotomie.

1. Justifier que $\sqrt{6}$ est un réel irrationnel compris entre 2 et 3.

2.*a*. En utilisant une méthode de dichotomie, partant de l'intervalle [2, 3], montrer qu'il existe une suite de rationnels (ou de décimaux) dont la limite est $\sqrt{6}$.

2.*b*. En généralisant la méthode employée, montrer que, si Δ est l'ensemble de nombres défini par :

$$\Delta = \left\{ \frac{p}{2^n} \,\middle|\, (p, n) \in \mathbf{N}^2 \right\}$$

alors pour tout x réel positif ou nul, il existe une suite d'éléments de Δ qui converge vers x.

3. Expliciter un algorithme permettant de déterminer une valeur décimale approchée de $\sqrt{6}$ avec trois décimales exactes (on exprimera cet algorithme en langage courant). Donner la valeur obtenue en utilisant cet algorithme sur une calculatrice programmable.

I. Préliminaire : fonctions additives de R dans R.

On note H l'ensemble des fonctions φ de **R** dans **R** satisfaisant à la relation :

$$[2] \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de } \mathbf{R}.$$

1. Soit φ un élément de H.

   a. Montrer que $\varphi(0) = 0$ et que φ est impaire.

   b. Établir que pour tout n entier naturel non nul et toute partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de **R**, on a :

   $$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i).$$

   c. Montrer que pour tous p de **N** et q de **N***:

   $$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\varphi(1)$$

   puis que pour tout r de **Q**, $\varphi(r) = r\,\varphi(1)$.

2. Montrer que si un élément φ de H est continue en un point a quelconque de **R**, alors elle est continue sur **R** tout entier et qu'on a alors :

   $$\varphi(x) = x\,\varphi(1) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}.$$

3. Montrer que, de même, si φ est un élément de H et si de plus φ est monotone (soit croissante, soit décroissante) sur **R**, alors, on a également :

$$\varphi(x) = x\,\varphi(1) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}.$$

4. On admet qu'il existe une fonction ψ dans H telle que $\psi(1) = 1$ et $\psi(\pi) = 0$.

   Vérifier directement que ψ n'est pas monotone, et n'est continue en aucun point de **R** et faire le lien avec les questions 2 et 3.

II. Exemples de fonctions appartenant à E.

1. Montrer qu'il existe des fonctions constantes appartenant à E, et les préciser.

2. On note th la fonction « tangente hyperbolique » définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

   a. Faire une brève étude de cette fonction et en donner une représentation graphique.

   b. Démontrer que pour tout nombre réel k appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$, il existe un unique nombre réel α tel que $\text{th}\,\alpha = k$. Montrer que α est donné par la formule :

$$\alpha = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right).$$

3. Démontrer que la fonction th est un élément de E, puis que pour tout élément φ de H, $\text{th} \circ \varphi$ est encore un élément de E.

III. Une étude réciproque dans le cas des fonctions continues ou monotones.

Soit f un élément de E.

1.*a.* Montrer que pour tout x de **R**, on a $|f(x)| \leq 1$.

1.*b.* Montrer que, si $f(0) \neq 0$, la fonction f est nécessairement une fonction constante (on précisera les valeurs possibles).

2. On suppose désormais que $f(0) = 0$.

   a. Montrer qu'alors f est une fonction impaire et que l'on a $|f(x)| < 1$ pour tout x de **R**.

   b. On considère la fonction g de **R** dans **R** définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right).$$

   Dire pourquoi g est bien définie sur **R** et démontrer que g est un élément de H.

3. On suppose dans cette question que f est un élément de E tel que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0. On définit la fonction g comme en 2.*b.*

   a. Montrer que g est continue en 0.

   b. On pose $k = g(1)$. Démontrer que pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \text{th}\,(kx).$$

4. Justifier l'équivalence des assertions suivantes lorsque f est dans E :

   (*i*) f est continue en 0 ;

   (*ii*) f est dérivable sur **R** ;

(*iii*) f est de classe C^∞, c'est-à-dire indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.

IV. Une nouvelle caractérisation grâce à une famille d'équations différentielles.

On considère maintenant la famille des équations différentielles :

$$[D_m] \quad y' = m(1 - y^2)$$

où m est un paramètre réel et y une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}$.

On dira alors dans ce cas que y est une solution de $[D_m]$ dans $\mathbf{R}$.

1.*a*. Montrer que s'il existe m dans $\mathbf{R}$ tel que y soit solution de $[D_m]$ sur $\mathbf{R}$, alors y est de classe C^∞ (indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$).

1.*b*. Montrer qu'il existe deux fonctions constantes solutions sur $\mathbf{R}$ de $[D_m]$ pour tout m de $\mathbf{R}$.

2. Montrer que toute fonction appartenant à E, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et vérifie l'équation différentielle $[D_m]$ avec $m = f'(0)$.

3.*a*. Soit y une solution sur $\mathbf{R}$ d'une équation $[D_m]$ telle qu'il existe un intervalle I d'intérieur non vide pour lequel $|y(x)| \neq 1$ pour tout x dans I. Montrer qu'il existe alors un réel μ tel que :

$$y(x) = \frac{\mu e^{2kx} - 1}{\mu e^{2kx} + 1}$$

pour tout x de I.

3.*b*. En déduire que si y est solution sur $\mathbf{R}$ d'une équation différentielle $[D_m]$, il ne peut pas exister d'intervalle $]a, b[$ (avec $a < b$) vérifiant les deux conditions suivantes :

(*i*) $|y(a)| = 1$ ou $|y(b)| = 1$;

(*ii*) $|y(x)| \neq 1$ pour tout x dans $]a, b[$.

3.*c*. Montrer alors que, si y est solution sur $\mathbf{R}$ d'une équation différentielle $[D_m]$ telle qu'il existe x_0 dans $\mathbf{R}$ vérifiant $y(x_0) = 1$ [resp. $y(x_0) = -1$], alors y est la fonction constante sur $\mathbf{R}$ égale à 1 en tout point [resp. égale à -1 en tout point]. (On pourra raisonner par l'absurde).

4.*a*. Montrer que pour tout réel m, la fonction y définie par $y(x) = \text{th}\,(mx)$ pour tout x de $\mathbf{R}$ est la seule solution sur $\mathbf{R}$ de $[D_m]$ telle que $y(0) = 0$.

4.*b*. Conclure en caractérisant, grâce aux équations différentielles $[D_m]$, l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, vérifiant [1] et continues en 0.

2000

Seconde Composition

PREMIÈRE PARTIE

AUTOUR DE THALÈS

Le but de cette partie est de proposer une approche du théorème de Thalès à l'aide des connaissances du collège. On suppose que les notions de longueur d'un segment, d'aire d'un polygone dans un plan sont connues ainsi que leurs propriétés usuelles.

1. La démonstration du théorème de Thalès par les aires.

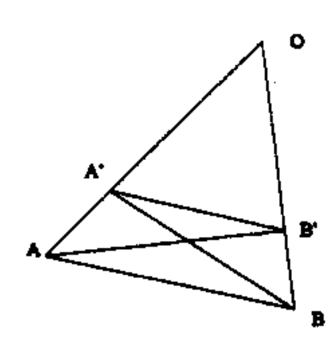
1. 1. On admet que si ABCD est un rectangle de longueur L et de largeur l, alors l'aire de ce rectangle est $L \cdot l$, et que deux triangles superposables ont même aire.

1.1.*a.* Démontrer les formules classiques donnant les aires d'un parallélogramme et d'un triangle.

1.1.*b.* Comparer les aires de deux triangles de même base [BC] et dont les sommets A et A' sont sur une parallèle à (BC).

1.1.*c* Que peut-on dire des aires de deux triangles ayant pour hauteur le même segment [A, A'] ? Généraliser à deux triangles tels que chacun ait une hauteur de longueur h où h est un réel positif donné.

1.2. ***Le théorème de Thalès.***



1.2.*a.* Dans la configuration ci-dessus où (A'B') est parallèle à (AB), que peut-on dire des aires des triangles OAB' et OA'B ?

1.2.*b.* Montrer que $\dfrac{\text{aire (OAB)}}{\text{aire (OA'B)}} = \dfrac{OA}{OA'}$ où aire (LMN) désigne l'aire du triangle LMN.

1.2.*c.* En déduire la relation : $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'}$ (forme élémentaire du théorème de Thalès).

1.3. Montrer qu'on a aussi $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{AB}{A'B'}$.

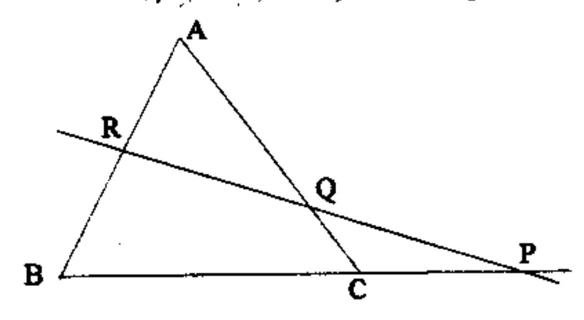
1.4. Énoncer et démontrer une réciproque de la forme élémentaire du théorème de Thalès donnée en 1.2.*c*.

2. Donner une situation simple faisant intervenir le théorème de Thalès et une situation simple où on utilise cette réciproque en détaillant les démonstrations.

3. Plus généralement, soit ABC un triangle et (d) une droite parallèle à (BC) qui coupe (AB) en E et (AC) en F, montrer que :

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}.$$

4. Étant donné un triangle ABC coupé par une sécante en trois points distincts P, Q, R (voir figure), on construit la parallèle à cette sécante passant par A, elle coupe (BC) en un point I.



4.1. Exprimer les rapports $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ et $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ en utilisant les points P, I, B et C.

4.2. Déduire de ce qui précède que :

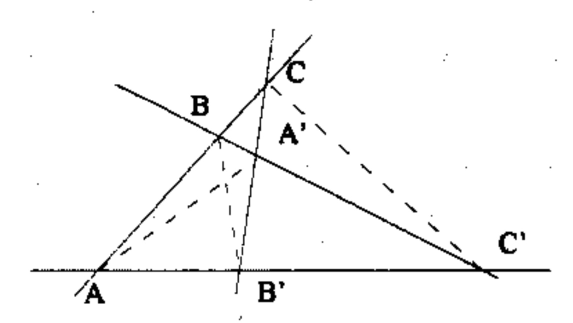
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 .$$

Énoncer et démontrer une réciproque de ce résultat. (L'ensemble de ce résultat et de sa réciproque est connu sous le nom de théorème de Ménélaüs).

DEUXIÈME PARTIE

LE THÉORÈME DE NEWTON

L'objet de cette partie est d'étudier de plusieurs façons la configuration dite du « quadrilatère complet » formé par quatre droites (ABC), (AB'C'), (BA'C') et (CA'B') (où les points sont deux à deux distincts) complétées par les diagonales (AA'), (BB'), (CC') et de démontrer l'alignement des points I, J, K respectivement milieux des segments [AA'], [BB'] et [CC'] (*Théorème de Newton*).



Les trois méthodes suivantes sont complètement indépendantes.

1. **Première méthode : par le produit vectoriel.**

1.1. Soit E l'ensemble des points M vérifiant :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}\,.$$

1.1.*a*. En introduisant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\,\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB'} = 2\,\overrightarrow{MJ}$, démontrer que E est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{0}\,.$$

1.1.*b*. Montrer que I et J sont deux points de E. Décrire l'ensemble E.

1.2.*a*. En introduisant les points C et C' et les relations :

$$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB},\ \ldots\ldots,\ \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KC'} + \overrightarrow{C'A},\ \ldots\ldots$$

vérifier que K est un élément de E.

1.2.*b*. En déduire que I, J, K sont alignés.

2. **Deuxième méthode : par le produit scalaire.**

Soit P un point du plan et (C) un cercle de centre O et de rayon R.

2.1.

2.1.*a*. Soient A et A' deux points diamétralement opposés de (C), montrer que :

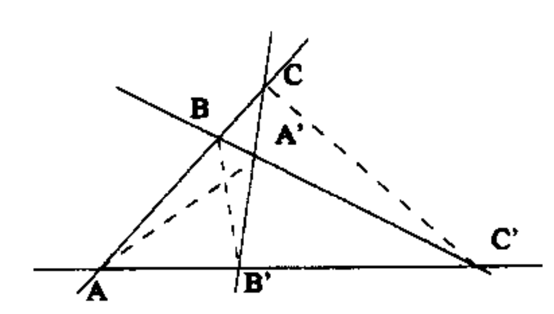
$$p = \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = OP^2 - R^2.$$

2.1.*b*. Démontrer que pour toute droite passant par P et sécante au cercle en B et C, on a $p = \overline{PC} \cdot \overline{PB}$. On pourra utiliser le point B' diamétralement opposé à B sur le cercle.
Le nombre p est appelé la puissance du point P par rapport au cercle (C).

2.2. Étant donné deux cercles (C) et (C') de centres O et O' distincts et de rayons R et R', montrer que l'ensemble des points P ayant même puissance par rapport à (C) et (C') est une droite perpendiculaire à la droite (OO').

2.3. On considère la configuration ci-dessous du « quadrilatère complet ». Soit H l'orthocentre du triangle A'B'C'. Montrer que :

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{HB'}\cdot\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{HB'}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HC'}\,.$$



2.4. En considérant de même les orthocentres des triangles ABC', AB'C et A'BC, montrer que ces orthocentres ont même puissance par rapport aux cercles ayant pour diamètre [AA'], [BB'] et [CC']. En déduire que les milieux des segments [AA'], [BB'] et [CC'] sont alignés.

3. **Troisième méthode : par le théorème de Ménélaüs** (cf. Première partie, 4.).

3. 1. Soit A, B, C, D quatre points alignés et O un point non situé sur cette droite. Tracer la parallèle à (OA) passant par B. Elle coupe (OC) en I et (OD) en J.

3.1.*a*. Exprimer le rapport $\frac{IB}{OA}$ à l'aide de CA et CB.

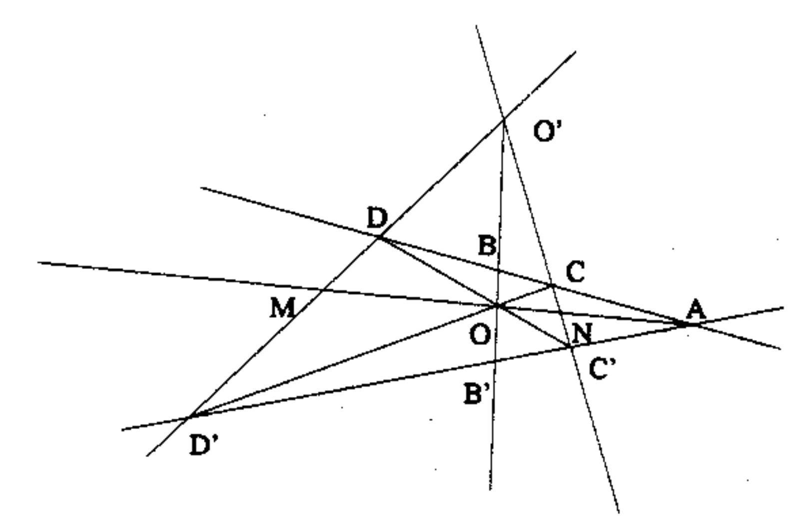
3.1.*b*. Exprimer le rapport $\frac{JB}{OA}$ à l'aide de DA et DB.

3.1.*c*. En déduire la relation : $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}$.

3.1.*d*. Si B est le milieu de [IJ] (ce qui est équivalent à dire, d'après ce qui précède, que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = -1 \text{),}$$

on dit que <u>(A, B, C, D) est une division harmonique</u>. Montrer qu'alors toute droite rencontrant les droites (OA), (OB), (OC) et (OD) en quatre points appelés respectivement A', B', C', D' est coupée selon une division harmonique.



3.2. On considère la configuration fournie par deux droites sécantes en O′ et deux sécantes (ACD) et (AC′D′). Appelons O le point commun à (CD′) et (DC′), puis B et B′ les points d'intersection de (OO′) avec les deux sécantes. Les points A, B, C, D sont distincts et O′ n'est pas sur la droite qui contient ces points.

En utilisant 3.1.*c*., on veut comparer :

$$k = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \quad \text{et} \quad k' = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AC'}} : \frac{\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}} .$$

3.2.*a*. En considérant quatre droites passant par O′, montrer que $k = k'$.

3.2.*b*. En considérant quatre droites passant par O, montrer que $kk' = 1$.

3.2.*c*. En déduire que les divisions (A, B, C, D) et (A, B′, C′, D′) sont harmoniques.

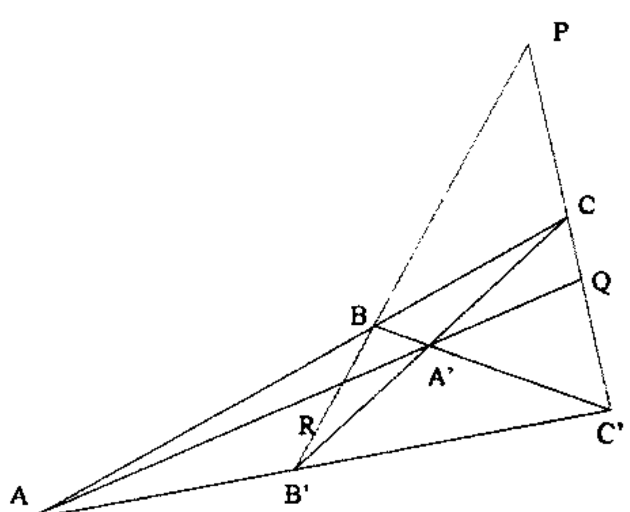
3.2.*d*. Montrer que si on appelle M le point commun à (O′D) et (OA) et N le point commun à (O′C) et (OA), la division (A, O, N, M) est harmonique.

3.3. Soit (A, B, C, D) une division harmonique et I le milieu de [AB].

3.3.*a*. Montrer que $IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$.

3.3.*b*. Prouver que $\dfrac{\overline{IC}}{\overline{ID}} = \left(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\right)^2$.

3.4. On considère la configuration du « quadrilatère complet ». Soit I, J, K les milieux de [AA′], [BB′] et [CC′].



3.4.*a*. Montrer que

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BR}} = 1 .$$

(On pourra utiliser le triangle PQR).

3.4.*b*. Montrer que

$$\frac{\overline{IR}}{\overline{IQ}} \cdot \frac{\overline{KQ}}{\overline{KP}} \cdot \frac{\overline{JP}}{\overline{JR}} = 1 .$$

En déduire que I, J, K sont alignés.

TROISIÈME PARTIE

LES THÉORÈMES DE PASCAL, BRIANCHON, DUALITÉ PAR PÔLES ET POLAIRES

1. Le théorème de Pascal.

Soit un hexagone dont les sommets A, B, C, D, E, F sont sur un même cercle et soit α, β, γ, les points d'intersection respectifs des droites (AB) et (ED), (BC) et (EF), (CD) et (FA). [On suppose que ces trois points existent].

Le théorème de Pascal affirme que ces trois points sont alignés. Démontrez-le.

Indication : Soient I, J, K les points d'intersection de (AF) et (ED), (ED) et (BC), (BC) et (AF). Appliquer le théorème de Ménélaüs au triplet (α, A, B) et à deux triplets analogues.

2. Pôles et polaires par rapport à un cercle.

Soit (Γ) un cercle de centre O et de rayon R. On dira que les points A et A′ sont conjugués par rapport à (Γ) si

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = R^2 .$$

2.*a*. Déterminer l'ensemble (a) des conjugués de A. On dira que (a) est la polaire du point A par rapport au cercle (Γ) et réciproquement que A est le pôle de (a) par rapport au cercle (Γ).

2.*b*. Que peut-on dire des conjugués d'un point A ?
- Si A est à l'intérieur du cercle (Γ) ?
- Si A est sur le cercle (Γ) ?
- Si A est à l'extérieur du cercle (Γ) ?

2.*c*. On suppose que A est à l'extérieur de (Γ). Montrer que les points de contact des tangentes issues de A à (Γ) appartiennent à (a).

2.*d*. Soient A et B deux points. Étudier $(a) \cap (b)$. Lorsque cet ensemble est un point, quelle est sa polaire ?

2.*e*. Que peut-on dire des polaires de trois points alignés ? De l'ensemble des pôles de toutes les droites passant par un point donné ? (On parlera ici de propriétés duales : à une propriété d'un système de droites et de points correspondra une propriété des pôles et polaires associés.)

2.*f*. Lorsque A est à l'extérieur du cercle (Γ), le résultat de la question 2.*c*. permet de construire facilement sa polaire. Montrer comment ce résultat peut être utilisé pour construire la polaire d'un point intérieur au cercle (Γ).

3. Le théorème de Brianchon comme dual du théorème de Pascal.

Soit un hexagone dont les côtés (a), (b), (c), (d), (e), (f) sont respectivement tangents à un cercle (Γ) aux points A, B, C, D, E, F. (On dira que cet hexagone est circonscrit au cercle (Γ).) En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone ABCDEF, en déduire le théorème de Brianchon (Dans un hexagone A′B′C′D′E′F′ circonscrit à un cercle (Γ), les diagonales (A′D′), (E′B′) et (F′C′) sont concourantes) pour l'hexagone initial.

4. Quelques applications.

4.*a*. Énoncer les propriétés obtenues à partir des théorèmes de Pascal et Brianchon, si on regarde un triangle comme un hexagone dont les sommets (resp. les côtés) ont tendu l'un vers l'autre, deux à deux, en restant sur le cercle circonscrit (resp. en restant tangents au cercle inscrit).

4.*b*. Soit un cercle (Γ). On dira que le triangle ABC est autopolaire si les droites (BC), (CA), (AB) sont les polaires respectives des sommets A, B, C.

Existe-t-il de tels triangles ?

Un triangle étant donné, peut-on toujours trouver un cercle par rapport auquel il est autopolaire ?

CAPES INTERNE DE MATHEMATIQUES 2000

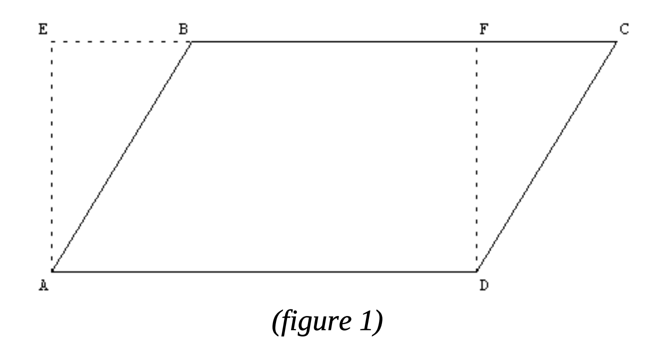
2ème COMPOSITION

PREMIERE PARTIE

1. La démonstration du théorème de Thalès par les aires :

1.1. *On admet que si ABCD est un rectangle de longueur L et de largeur l, alors l'aire de ce rectangle est* $L \times l$ *et on admet que deux triangles superposables ont même aire.*

1.1.a. Soit *ABCD* un parallélogramme.
Soit *E* le projeté orthogonal de *A* sur (*BC*).
Soit *F* le projeté orthogonal de *D* sur (*BC*).



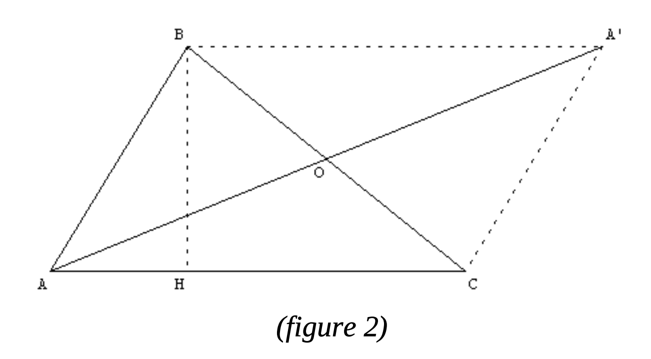
(figure 1)

On a : * $AE = DF$ (*AEFD* rectangle)
* $AB = DC$ (*ABCD* parallélogramme)
* $EB = FC$ (par Pythagore dans *AEB* et *DFC*).

Donc, les triangles *AEB* et *DFC* sont isométriques, c'est-à-dire, superposables, et donc de même aire.

D'où $aire(ABCD) = aire(AEFD) + aire(DFC) - aire(AEB) = aire(AEFD) = AD \times AE$.

Soit *ABC* un triangle.
Soit *O* le milieu de [*BC*] et *A'* le symétrique de *A* par rapport à *O*.

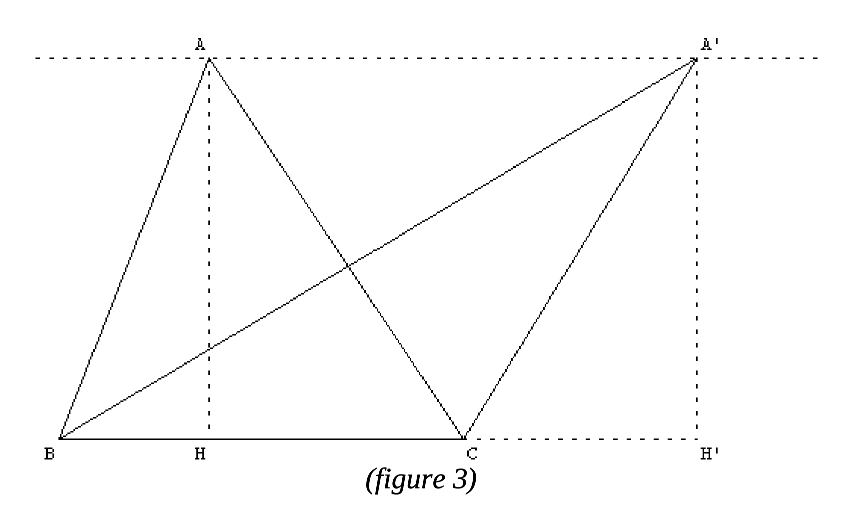


(figure 2)

Il est clair que *ABA'C* est un parallélogramme (ses diagonales se coupent en leur milieu). De plus, les triangles *ABC* et *A'BC* sont symétriques par rapport à *O* ; donc ils sont isométriques et donc de même aire.

D'où $aire(ABC) = \frac{1}{2} aire(ABA'C) = \frac{1}{2} BH \times AC$.

1.1.b. Soient *ABC* et *A'BC* deux triangles tels que (*A'A*) // (*BC*).
Soient *H* et *H'* les pieds des hauteurs des triangles *ABC* et *A'BC* issues respectivement de *A* et *A'*.

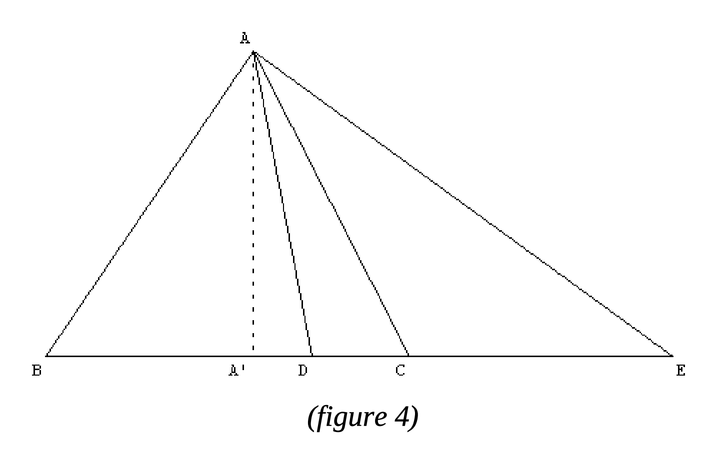


(figure 3)

$aire(ABC) = \frac{1}{2} AH \times BC$ et $aire(A'BC) = \frac{1}{2} A'H' \times BC$.
Or *AHH'A'* est un rectangle donc, $AH = A'H'$.

D'où $aire(ABC) = aire(A'BC)$.

1.1.c. Soient *ABC* et *ADE* deux triangles tels que les points *D* et *E* soient situés sur la droite (*BC*).
Soit *A'* le projeté orthogonal de *A* sur la droite (*BC*).



(figure 4)

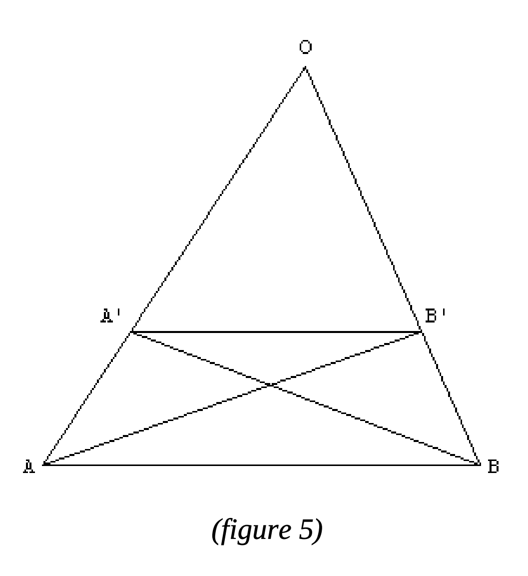
D'après ce qui précède, $aire(ABC) = \frac{1}{2} AA' \times BC$ et $aire(ADE) = \frac{1}{2} AA' \times DE$.

D'où $\frac{aire(ABC)}{aire(ADE)} = \frac{BC}{DE}$.

Donc, le rapport des aires des triangles *ABC* et *ADE* est égal au rapport des longueurs *BC* et *DE*.

En généralisant à deux triangles tels que chacun ait une hauteur de longueur *h* (*h* réel positif), on peut dire que le rapport des aires est égal au rapport des longueurs des bases relatives à cette hauteur.

1.2. <u>Le théorème de Thalès</u> :



(figure 5)

1.2.a. D'après la question 1.1.b., $aire(AA'B') = aire(A'BB')$ car ces deux triangles ont la même base [*A'B'*] et ont leurs sommets *A* et *B* sur une parallèle à (*A'B'*).

D'où $aire(OAB') = aire(OA'B') + aire(AA'B') = aire(OA'B') + aire(A'BB') = aire(OA'B)$.

1.2.b. Les triangles *OAB* et *OA'B* ont la même hauteur issues de *B*.
D'après 1.1.c., le rapport de leurs aires est égal au rapport des longueurs des bases relatives à la hauteur issue de *B*, c'est-à-dire : $\dfrac{aire(OAB)}{aire(OA'B)} = \dfrac{OA}{OA'}$.

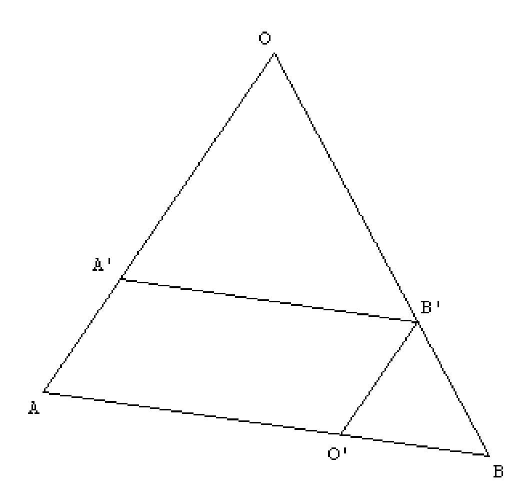
1.2.c. De la même façon qu'à la question précédente, on a : $\dfrac{aire(OAB)}{aire(OAB')} = \dfrac{OB}{OB'}$.

Or, d'après 1.2.a., $aire(OA'B) = aire(OAB')$.

Donc, $\dfrac{aire(OAB)}{aire(OA'B)} = \dfrac{aire(OAB)}{aire(OAB')}$.

C'est-à-dire, $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'}$ (forme élémentaire du théorème de Thalès)

1.3. Soit *O'* le point d'intersection de [*AB*] avec la parallèle à (*OA*) passant par *B'*.
Le quadrilatère *A'B'O'A* est un parallélogramme ; donc $A'B' = O'A$.



(figure 6)

D'où, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AO'}{AB} = \frac{AB - O'B}{AB} = 1 - \frac{O'B}{AB}$. (*)

Or, en appliquant la forme élémentaire du théorème de Thalès aux triangles *BO'B'* et *BOA*, on a : $\frac{O'B}{AB} = \frac{BB'}{OB}$.

(*) donne : $\frac{A'B'}{AB} = 1 - \frac{BB'}{OB} = \frac{OB - BB'}{OB} = \frac{OB'}{OB}$, c'est-à-dire, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$

De plus, on a aussi d'après 1.2.c., $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$. D'où le résultat.

1.4. Réciproque de la forme élémentaire du théorème de Thalès donnée en 1.2.c. :

> Soit *OAB* un triangle. Soient les points *A'* et *B'* appartenant respectivement aux segment [*OA*] et [*OB*] tels que : $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$.
>
> Alors les droites (*AB*) et (*A'B'*) sont parallèles.

preuve *:* Soit *OAB* un triangle et soient les points *A'* et *B'* appartenant respectivement aux segment [*OA*] et [*OB*] tels que : $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$. (*)

Soit *B''* appartenant au segment [*OB*] tel que (*AB*) et (*A'B''*) soient parallèles.

D'après le théorème de Thalès démontré à la question 1.2., on a : $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB''}$. (**)

(*) et (**) donnent : $\frac{OB}{OB'} = \frac{OB}{OB''}$, c'est-à-dire $OB' = OB''$.

Comme les points *B'* et *B''* appartiennent tous les deux au segment [*OB*] alors ils sont confondus.
D'où les droites (*AB*) et (*A'B'*) sont parallèles.

■

2. Voir n'importe quel bon livre de la classe de troisième !

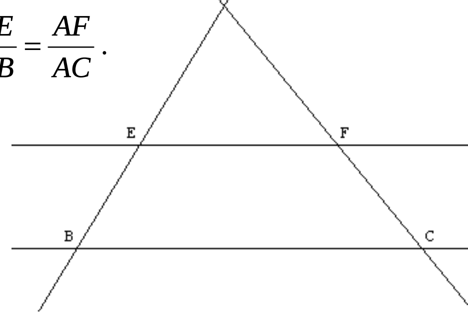
3. 1<u>er cas</u> : $E \in [AB]$ et $F \in [AC]$.

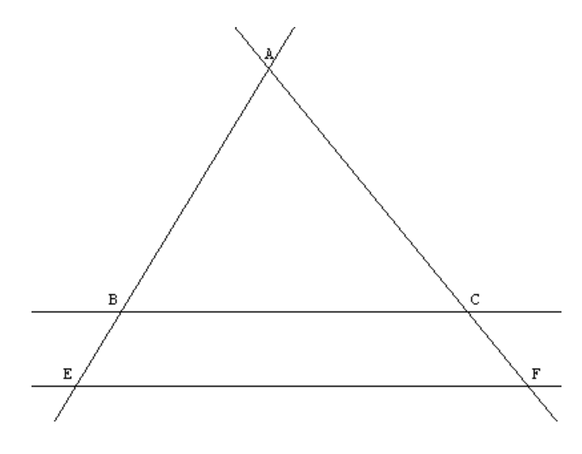
D'après 1.2.c., $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$, c'est-à-dire $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$.

Or $E \in [AB]$ et $F \in [AC]$.

Donc $\frac{AE}{AB} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$.

D'où le résultat.

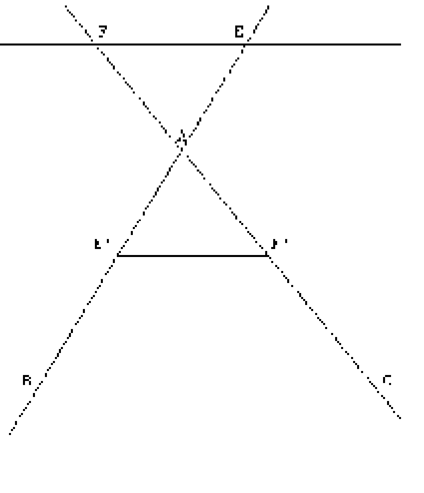




2ème cas : $B \in [AE]$ et $C \in [AF]$.

D'après le 1er cas, on a : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$

Soit, $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$.



3ème cas : $E \in (AB) \setminus [AB]$ et $F \in (AC) \setminus [AC]$.

Soit *E'* et *F'* les symétriques respectifs de *E* et *F* par rapport à *A*.

Il est évident que *E'FEF'* est un parallélogramme.

D'où (*E'F'*) // (*BC*).

D'après les cas précédents, on a :

$\frac{\overline{AE'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{AC}}$.

Or $\overline{AE} = -\overline{AE'}$ et $\overline{AF} = -\overline{AF'}$.

D'où $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$.

<u>Remarque</u> : Cette démonstration pose un petit problème, par exemple dans le 1er cas : rien ne prouve que si $E \in [AB]$ alors $F \in [AC]$ (C'est admis implicitement dans la démonstration précédente). Si on veut le montrer « proprement », on peut utiliser les homothéties (ce qui évite d'ailleurs de distinguer 3 cas) :

Soit $E \in [AB]$ et soit *h* l'homothétie qui transforme *B* en *E*.

Par conservation du parallélisme *h* transforme (*BC*) en la parallèle à (*BC*) passant par *E*, c'est-à-dire (*d*).

Donc $h(C) \in (d)$.

De plus, $h(C) \in (AC)$. Donc $h(C) = F$.

Notons k le rapport de h ($k \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ car on peut considérer $E \neq A$).
D'après ce qui précède, on a : $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.
C'est-à-dire $\overline{AE} \cdot \vec{i} = k \cdot \overline{AB} \cdot \vec{i}$ et $\overline{AF} \cdot \vec{j} = k \cdot \overline{AC} \cdot \vec{j}$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ désignent respectivement des vecteurs directeurs des droites (AB) et (AC).
D'où le résultat.

Avec cette preuve, on a aussi montré :

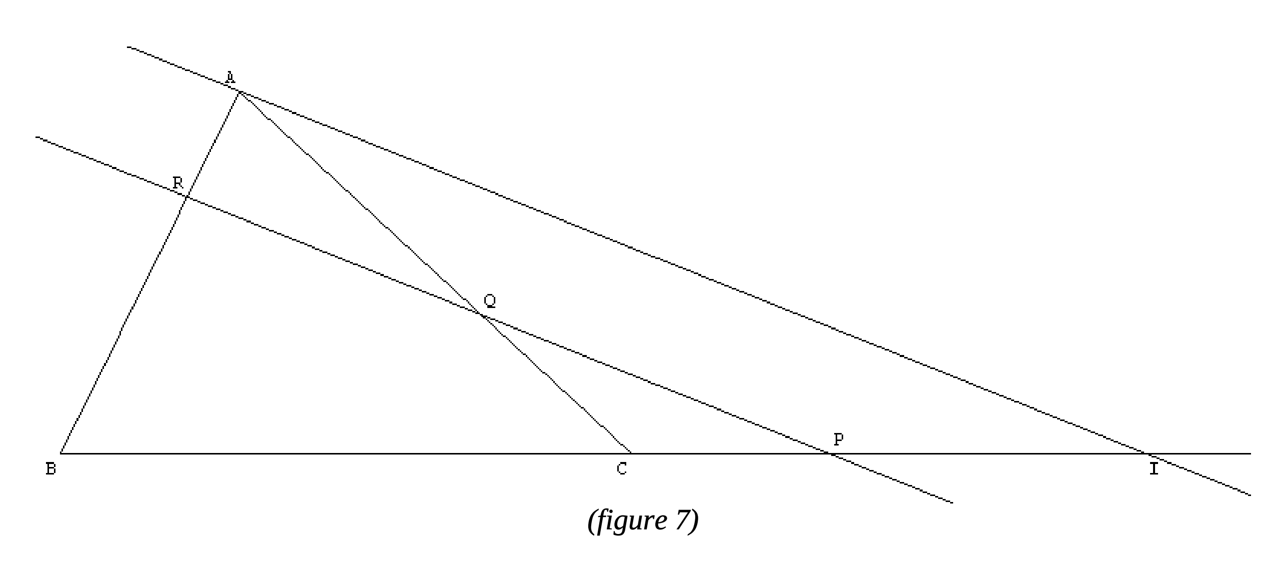
$E \in [AB] \Rightarrow 0 < k < 1 \Rightarrow F \in [AC]$.

$E \in [AB), E \notin [AB] \Rightarrow k > 1 \Rightarrow F \in [AC), F \notin [AC]$.

$E \in (AB), E \notin [AB) \Rightarrow k < 0 \Rightarrow F \in (AC), F \notin [AC)$.

■

4.



(figure 7)

4.1. Appliquons la forme élémentaire du théorème de Thalès dans les triangles *BAI* et *BRP* (on a bien (RP) // (AI)). Il vient : $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BR}} = \dfrac{\overline{BI}}{\overline{BP}}$ soit $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{RB}} = \dfrac{\overline{BI}}{\overline{PB}}$ (*)

Or d'après la relation de Chasles on a : $\overline{BA} = \overline{BR} + \overline{RA}$ et $\overline{BI} = \overline{BP} + \overline{PI}$.

D'après (*), on a donc : $\dfrac{\overline{BR}+\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{\overline{BP}+\overline{PI}}{\overline{PB}} \Leftrightarrow -1 + \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1 + \dfrac{\overline{PI}}{\overline{PB}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{\overline{PI}}{\overline{PB}}$.

De la même façon, en appliquant la forme élémentaire du théorème de Thalès dans les triangles *CAI* et *CQP* ((QP) // (AI)), on a aussi : $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PI}}$.

4.2. D'après ce qui précède, on a : $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PI}} \times \dfrac{\overline{PI}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$.

D'où : $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = 1$. (C'est le sens direct du théorème de Ménélaüs).

Réciproque du théorème de Ménélaüs :

Soit ABC un triangle et soient les points P, Q et R appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) et distincts des points A, B et C.

Si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ alors les points P, Q et R sont alignés.

preuve : Soit P' le point d'intersection de (QR) et de (BC).

(P' existe car sinon, les droites (QR) et (BC) seraient parallèles et Thalès donnerait : $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$ *et comme* $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ *alors* $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = 1$ *c'est-à-dire* $B = C$ *ce qui est absurde).*

D'après le sens direct du théorème de Ménélaüs, on a : $\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

Comme $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ alors $\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = k \in \mathbb{R}$.

Or $\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = k \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P'B} - k \cdot \overline{P'C} = 0$.

$\Leftrightarrow \quad \overline{P'B} \cdot \vec{i} - k \cdot \overline{P'C} \cdot \vec{i} = 0 \cdot \vec{i}$ où $\vec{i}$ désigne un vecteur directeur de (BC).

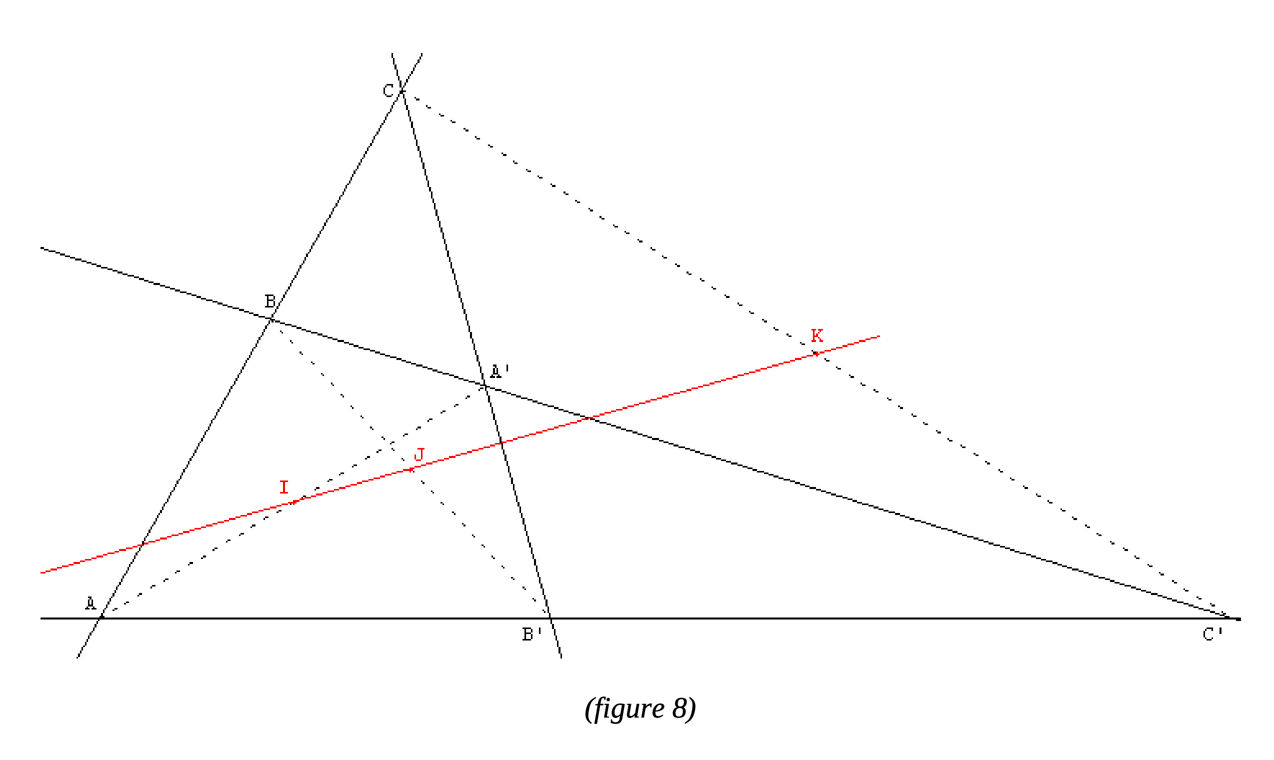
$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P'B} - k \cdot \overrightarrow{P'C} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow \quad P' = bar\{(B;1);(C;-k)\}$. ($k \neq 1$ d'après la remarque faite au début de la preuve).

De même $P = bar\{(B;1);(C;-k)\}$.

Par unicité du barycentre, on a : $P' = P$ ce qui montre bien l'alignement des points P, Q et R.

DEUXIEME PARTIE



(figure 8)

1. Première méthode : par le produit vectoriel :

1.1. $E = \left\{ M \,;\, \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0} \right\}$

1.1.a. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB'} = 2 \cdot \overrightarrow{MJ}$ (Vrai pour tout point *M* du plan car *I* et *J* sont les milieux respectifs de [*AA'*] et de [*BB'*]).

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \wedge \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB'} \right) + \overrightarrow{MA'} \wedge \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB'} \right) = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} \right) \wedge \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB'} \right) = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Donc, $E = \left\{ M \,;\, \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{0} \right\}$.

1.1.b. On a : $\overrightarrow{II} \wedge \overrightarrow{IJ} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{IJ} = \vec{0}$. Donc $I \in E$.
De même $J \in E$.

De plus, $M \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MJ}$ colinéaires.
D'où l'ensemble *E* est la droite (*IJ*).

1.2.

1.2.a. On a : $\overrightarrow{KA}\wedge\overrightarrow{KB}=\left(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CA}\right)\wedge\left(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$.

Or, $\overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ ($C\in(AB)$).

D'où $\overrightarrow{KA}\wedge\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{AB}$.

De même, $\overrightarrow{KA'}\wedge\overrightarrow{KB'}=\overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{A'B'}$.

$\overrightarrow{KA}\wedge\overrightarrow{KB'}=\overrightarrow{KC'}\wedge\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{AB'}$ car K est le milieu de [*CC'*].

$\overrightarrow{KA'}\wedge\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KC'}\wedge\overrightarrow{A'B}=-\overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{A'B}$ car K est le milieu de [*CC'*].

D'où $\overrightarrow{KA}\wedge\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KA'}\wedge\overrightarrow{KB'}+\overrightarrow{KA}\wedge\overrightarrow{KB'}+\overrightarrow{KA'}\wedge\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Donc $K\in E$.

1.2.b. Comme l'ensemble E est la droite (*IJ*) et comme $K\in E$ alors les points *I*, *J* et *K* sont alignés.

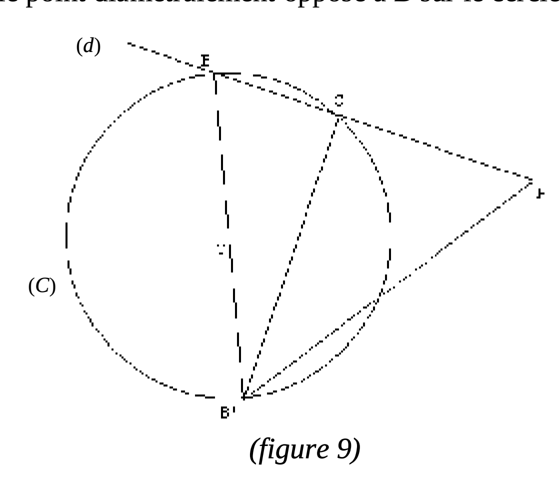
2. Deuxième méthode : par le produit scalaire :

2.1.

2.1.a. $p=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}$

$$\begin{aligned} &= \left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA'}\right)\\ &= \overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}\right)+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}\\ &= OP^2-OA^2 \ (\text{car } \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OA'})\\ &= OP^2-R^2. \end{aligned}$$

2.1.b. Soit (*d*) une droite passant par *P* et sécante à (*C*) en *B* et *C*.
Soit *B'* le point diamétralement opposé à *B* sur le cercle (*C*).



(figure 9)

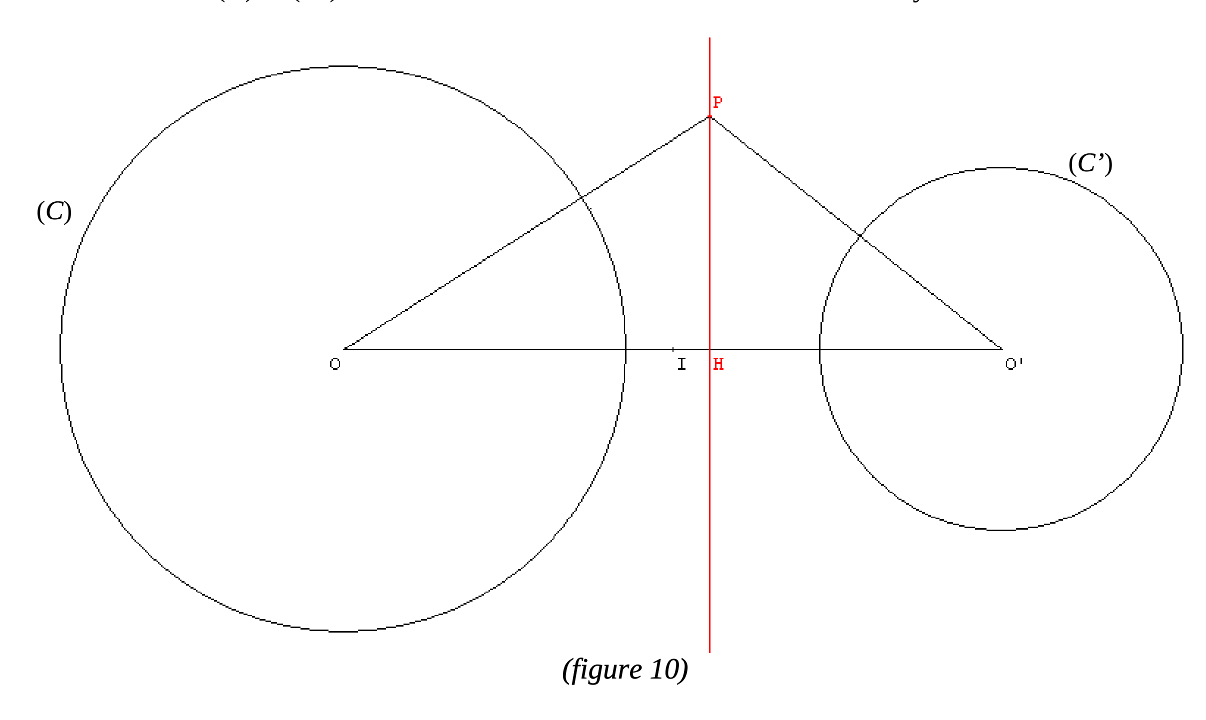
On a : $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{B'C}\right)\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{B'C}$.

Or *BB'C* est rectangle en *C*. Donc $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{B'C}$. Comme *P*, *B*, *C* sont alignés alors $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{B'C}$. Donc $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{B'C}=0$.

D'où $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PB'}=OP^2-R^2$ d'après 2.1.a.

Donc $p=\overline{PC}\cdot\overline{PB}$

2.2. Soient (*C*) et (*C'*) deux cercles de centres *O* et *O'* distincts et de rayons *R* et *R'*.



(figure 10)

Notons Ω l'ensemble des points *P* ayant même puissance par rapport à (*C*) et (*C'*).
Notons *I* le milieu du segment [*OO'*].

$$P \in \Omega \iff OP^2 - R^2 = O'P^2 - R'^2$$
$$\iff \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{PO'}^2 = R^2 - R'^2$$
$$\iff \left(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PO'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PO'}\right) = R^2 - R'^2$$
$$\iff \overrightarrow{O'O}\cdot 2\overrightarrow{PI} = R^2 - R'^2$$
$$\iff \overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{OO'} = \frac{R^2 - R'^2}{2}$$

Or $\overrightarrow{OO'} \neq \vec{0}$ donc il existe $H \in (OO')$ tel que $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$.

On a donc $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{OO'} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2}$ (et donc $H \in \Omega$).

Or $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{OO'} + \dfrac{R^2 - R'^2}{2}$

Donc $P \in \Omega \iff \overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{OO'} + \dfrac{R^2 - R'^2}{2} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2}$

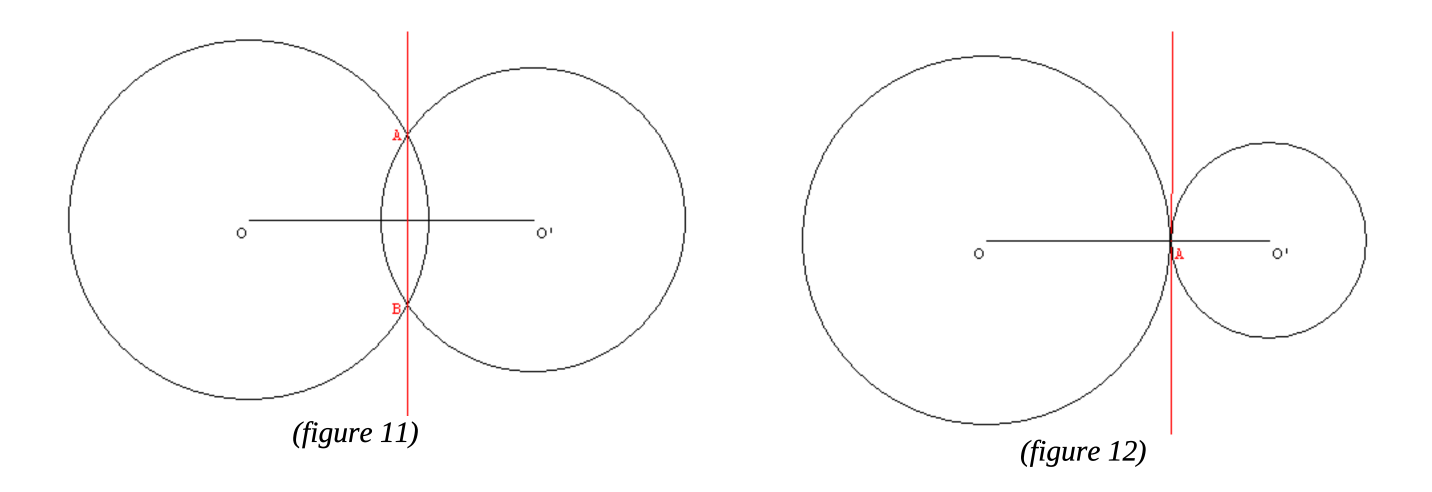
$$\iff \overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{OO'} = 0$$

L'ensemble Ω est donc la droite perpendiculaire à (*OO'*) passant par *H* défini par $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{OO'} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2}$.

<u>Remarques</u> : *(i)* La droite décrite par l'ensemble Ω s'appelle l'axe radical des cercles (*C*) et (*C'*).

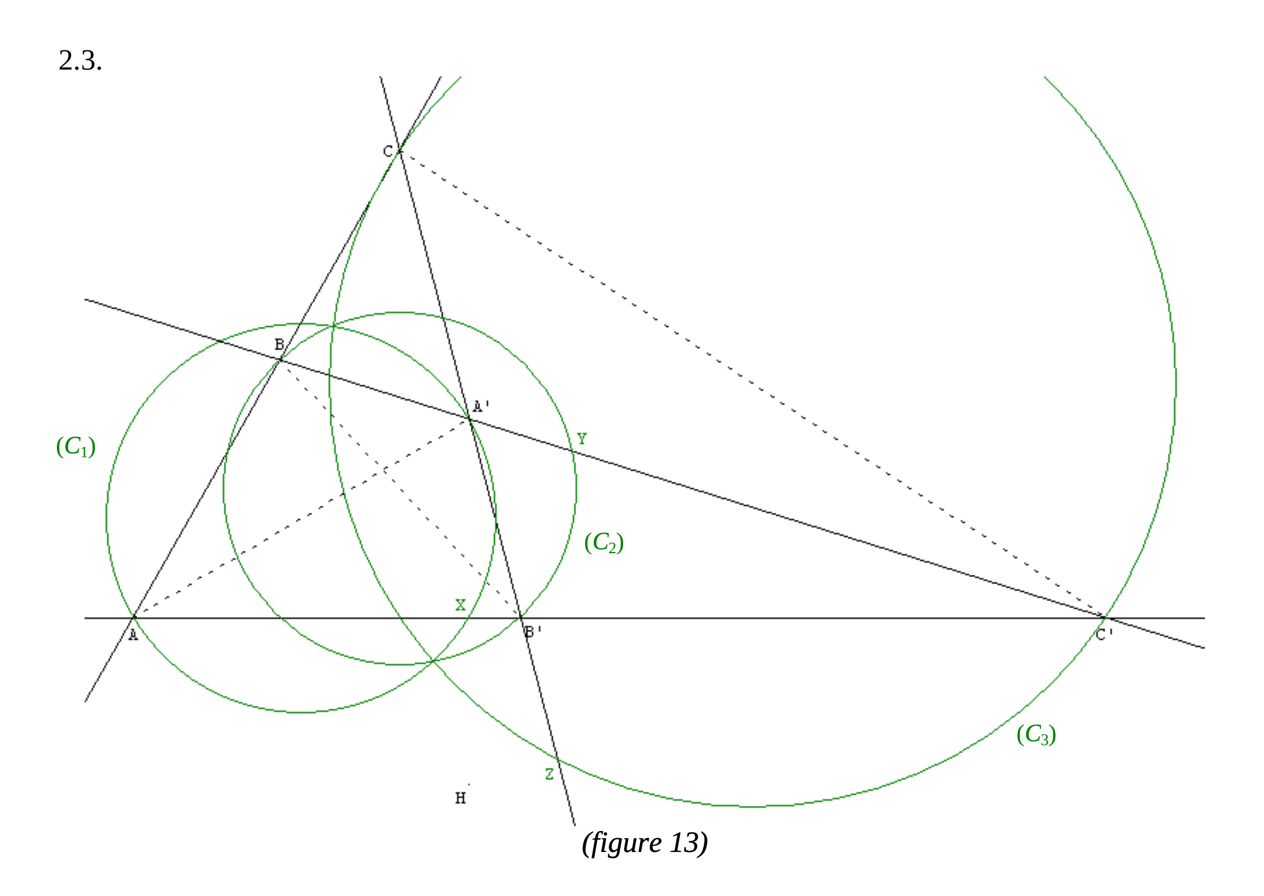
(ii) Lorsque (*C*) et (*C'*) sont sécants en deux points distincts *A* et *B* alors l'axe radical de (*C*) et (*C'*) est la droite (*AB*). *(voir figure 11).*

(iii) Lorsque (*C*) et (*C'*) sont tangents en un point *A* alors l'axe radical de (*C*) et (*C'*) est leur tangente commune en *A*. *(voir figure 12).*



(figure 11) (figure 12)

2.3.



(figure 13)

Notons (C_1), (C_2) et (C_3) les cercles de diamètres respectifs [*AA'*], [*BB'*] et [*CC'*].
Notons *X*, *Y* et *Z* les pieds des hauteurs issues respectivement de *A'*, *B'* et *C'* dans le triangle *A'B'C'*.

Les droites (*A'X*) et (*B'C'*) sont perpendiculaires. Or $A \in$ (*B'C'*). Donc *AA'X* est rectangle en *X*.
D'où $X \in$ (C_1).
De même $Y \in$ (C_2) et $Z \in$ (C_3).

Notons p_1, p_2 et p_3 les puissances respectives de *H* par rapport aux cercles (C_1), (C_2) et (C_3).
D'après 2.1.a., $p_1 = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA'}$, $p_2 = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HB'}$ et $p_3 = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC'}$.

De plus d'après 2.1.b., $p_1 = \overline{HA'} \cdot \overline{HX}$, $p_2 = \overline{HB'} \cdot \overline{HY}$ et $p_3 = \overline{HC'} \cdot \overline{HZ}$.

Or $\quad p_1 = \overrightarrow{HA'} \cdot \left(\overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{B'X}\right) = \overrightarrow{HA'} \cdot \overrightarrow{HB'}$ car $\overrightarrow{HA'} \perp \overrightarrow{B'X}$.

$p_2 = \overrightarrow{HB'} \cdot \left(\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{A'Y}\right) = \overrightarrow{HB'} \cdot \overrightarrow{HA'}$ car $\overrightarrow{HB'} \perp \overrightarrow{A'Y}$.

$p_3 = \overrightarrow{HC'} \cdot \left(\overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{B'Z}\right) = \overrightarrow{HC'} \cdot \overrightarrow{HB'}$ car $\overrightarrow{HC'} \perp \overrightarrow{B'Z}$.

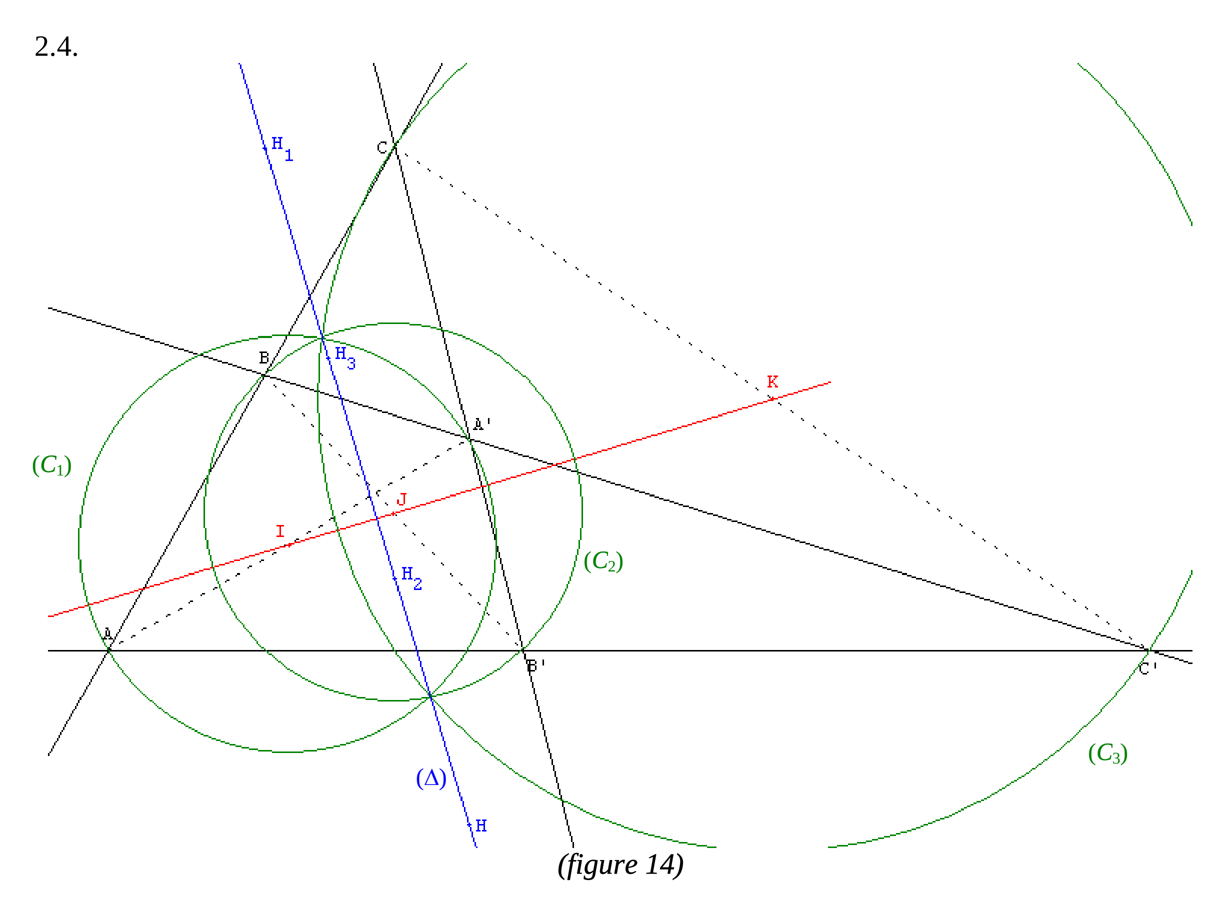
Or $\overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{A'C'}$.

D'où $p_3 = \overrightarrow{HA'} \cdot \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HA'} \cdot \overrightarrow{HB'}$ car $\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{HB'}$ (*H* orthocentre de *A'B'C'*).

Donc $p_1 = p_2 = p_3 = \overrightarrow{HB'} \cdot \overrightarrow{HA'}$.

D'où le résultat.

2.4.



(figure 14)

Notons H_1, H_2 et H_3 les orthocentres respectifs des triangles *ABC'*, *AB'C* et *A'BC*.

D'après la question 2.3., *H* a la même puissance par rapport aux cercles (C_1), (C_2) et (C_3).
En raisonnant de la même façon, on montre que les points H_1, H_2 et H_3 ont respectivement tous la même puissance par rapport aux cercles (C_1), (C_2) et (C_3).

Notons (Δ_1) (respectivement (Δ_2), (Δ_3)) l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux cercles (C_1) et (C_2) (respectivement (C_1) et (C_3), (C_2) et (C_3)).
D'après la question 2.2. (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) sont des droites.

D'après la question 2.3. et la première partie de cette question, on a : $H \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$.
De même $H_1 \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$, $H_2 \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$ et $H_3 \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$.

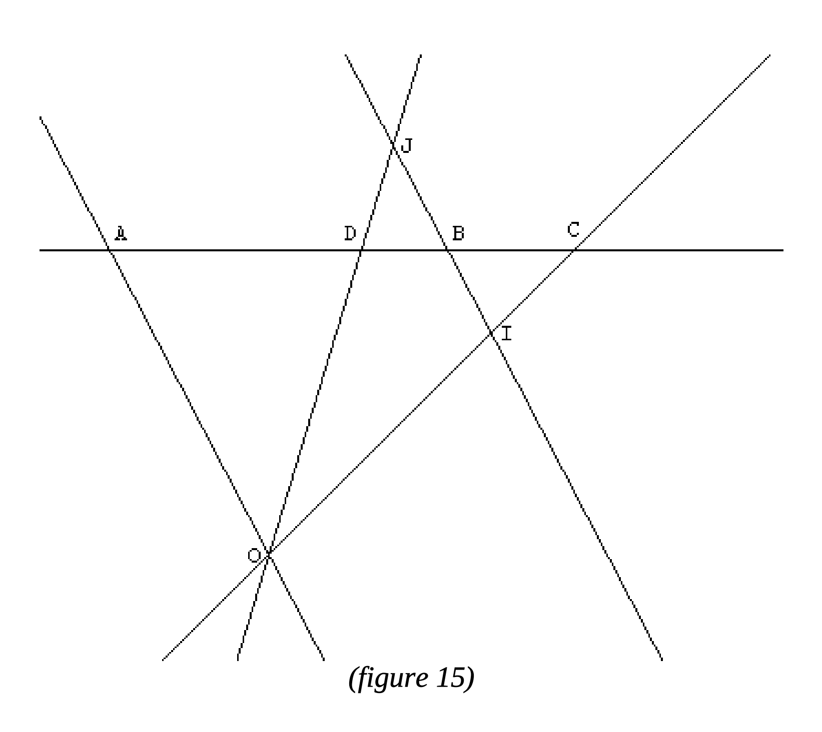
Donc les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) sont confondues ; notons (Δ) cette droite commune.

De plus *I*, milieu de [*AA'*] est le centre du cercle (C_1). De même, *J*, milieu de [*BB'*] est le centre du cercle (C_2) et *K*, milieu de [*CC'*] est le centre du cercle (C_3).

D'après la question 2.2., $(\Delta)\perp(IJ)$, $(\Delta)\perp(IK)$ (et $(\Delta)\perp(JK)$) ce qui prouve bien que les points *I*, *J* et *K* sont alignés.

3. Troisième méthode : par le théorème de Ménélaüs :

3.1.



(figure 15)

3.1.a. Considérons les triangles *CAO* et *CIB*.
$B\in(AC)$, $I\in(OC)$ et $(IB)\,//\,(OA)$.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{\overline{BI}}{\overline{AO}}=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ ou encore $\dfrac{IB}{OA}=\dfrac{CB}{CA}$.

3.1.b. En résonnant de la même façon sur les triangles *DAO* et *DJB* on a :
$\dfrac{\overline{BJ}}{\overline{AO}}=\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$ ou encore $\dfrac{JB}{OA}=\dfrac{DB}{DA}$.

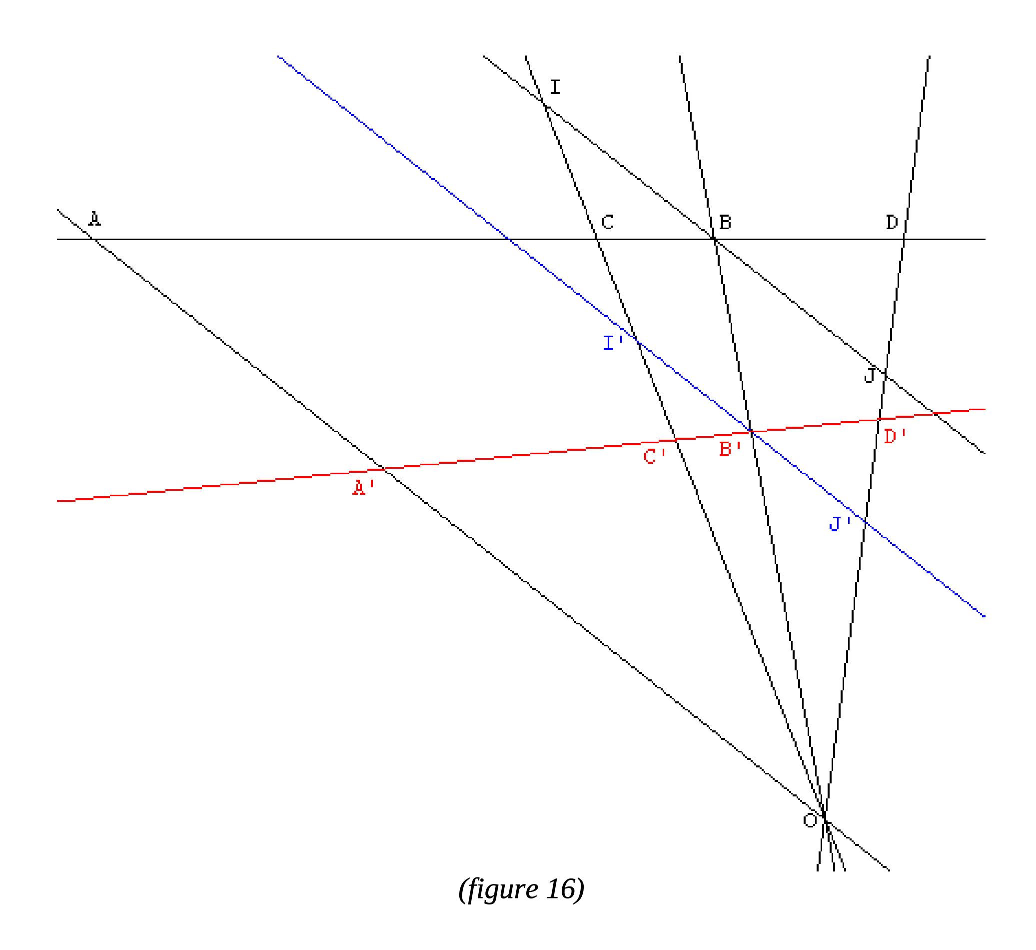
3.1.c. D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{AO}}\times\frac{\overline{AO}}{\overline{BJ}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\times\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \iff \frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{CA}}\times\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}$$

$$\iff \frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{CA}}:\frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}$$

$$\iff \frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}:\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

3.1.d. On suppose dans cette question que B est le milieu de $[IJ]$.



(figure 16)

Soient I' et J' les points d'intersection de la parallèle à (OA') passant par B' avec respectivement les droites (OC') et (OD').

Les points A', B', C' et D' étant alignés, on a, d'après 3.1.c. : $\dfrac{\overline{A'D'}}{\overline{A'C'}}:\dfrac{\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{B'I'}}{\overline{B'J'}}$ (*).

Appliquons le théorème de Thalès dans les triangles $OB'I'$ et OBI.

On a : $\dfrac{\overline{B'I'}}{\overline{BI}}=\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$.

De même appliquons le théorème de Thalès dans les triangles $OB'J'$ et OBJ.

On a : $\dfrac{\overline{B'J'}}{\overline{BJ}}=\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$.

D'où $\dfrac{\overline{B'I'}}{\overline{BI}}=\dfrac{\overline{B'J'}}{\overline{BJ}}$ ou encore $\dfrac{\overline{B'I'}}{\overline{B'J'}}=\dfrac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}$.

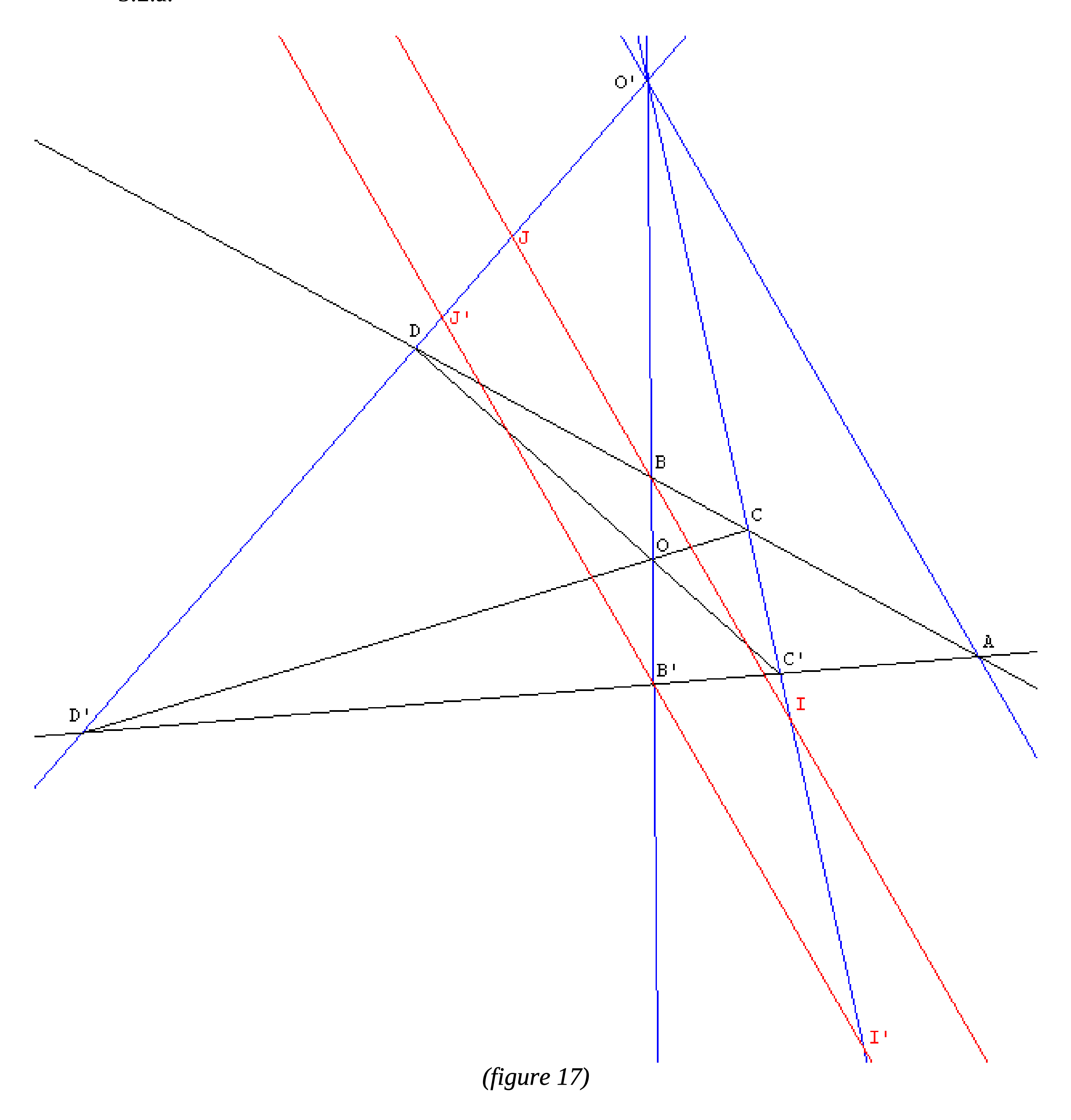
Or B est le milieu de $[IJ]$ donc $\dfrac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}=-1$. D'où $\dfrac{\overline{B'I'}}{\overline{B'J'}}=-1$.

Avec (*), on a : $\dfrac{\overline{A'D'}}{\overline{A'C'}}:\dfrac{\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}}=-1$.

Donc (A', B', C', D') est une division harmonique.

3.2.

3.2.a.



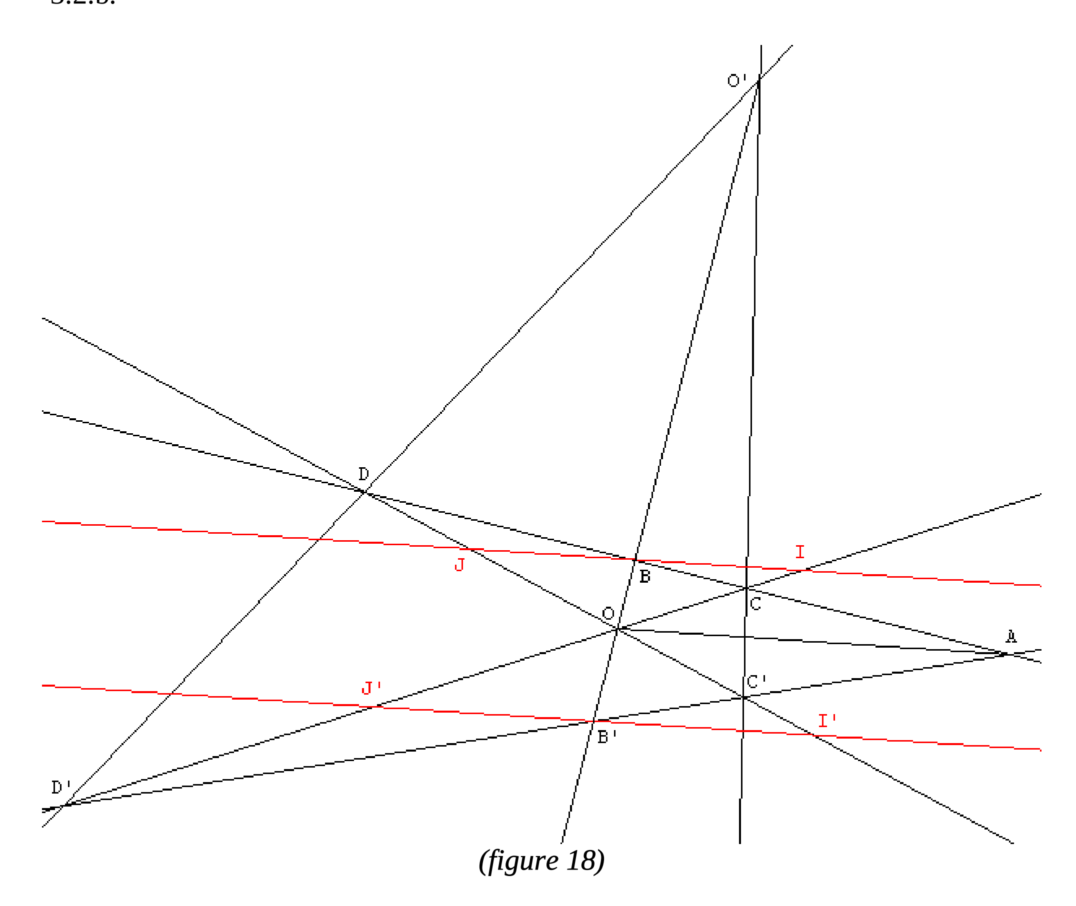
(figure 17)

Soit la parallèle à la droite (*O'A*) passant par *B* ; elle coupe (*O'C*) et (*O'D*) respectivement en *I* et *J*.
Soit la parallèle à la droite (*O'A*) passant par *B'* ; elle coupe (*O'C'*) et (*O'D'*) respectivement en *I'* et *J'*.

D'après la question 3.1.c., on a : $k = \frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}$ et $k' = \frac{\overline{B'I'}}{\overline{B'J'}}$.
De la même manière qu'à la question 3.1.d., en appliquant le théorème de Thalès aux triangles *O'B'J'* et *O'BJ* d'une part et aux triangles *O'B'I'* et *O'BI* d'autre part, on a :

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{B'I'}}{\overline{B'J'}}, \text{ c'est-à-dire } k = k'.$$

3.2.b.



(figure 18)

Soit la parallèle à la droite (*OA*) passant par *B* ; elle coupe (*OC*) et (*OD*) respectivement en *I* et *J*.
Soit la parallèle à la droite (*OA*) passant par *B'* ; elle coupe (*OC'*) et (*OD'*) respectivement en *I'* et *J'*.

D'après la question 3.1.c., on a : $k = \dfrac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}$ et $k' = \dfrac{\overline{B'I'}}{\overline{B'J'}}$.

De la même manière qu'à la question 3.1.d., en appliquant le théorème de Thalès aux triangles *OB'J'* et *OBI* d'une part et aux triangles *OB'I'* et *OBJ* d'autre part, on a :

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{B'J'}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{B'I'}}.$$

Or, $\dfrac{\overline{BI}}{\overline{B'J'}} = \dfrac{\overline{BJ}}{\overline{B'I'}} \iff \dfrac{\overline{BI}}{\overline{BJ}} = \dfrac{\overline{B'J'}}{\overline{B'I'}}$

$$\iff \frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}} \times \frac{\overline{B'I'}}{\overline{B'J'}} = \frac{\overline{B'J'}}{\overline{B'I'}} \times \frac{\overline{B'I'}}{\overline{B'J'}}$$

$$\iff k \times k' = 1.$$

3.2.c. D'après ce qui précède, on a : $\begin{cases} k = k' \\ k \times k' = 1 \end{cases}$ (*)

(*) $\iff \begin{cases} k = k' \\ k^2 = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} k = k' \\ k = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} k = k' \\ k = -1 \end{cases}$.

Or $\quad k=1 \quad \Leftrightarrow \dfrac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}=1$

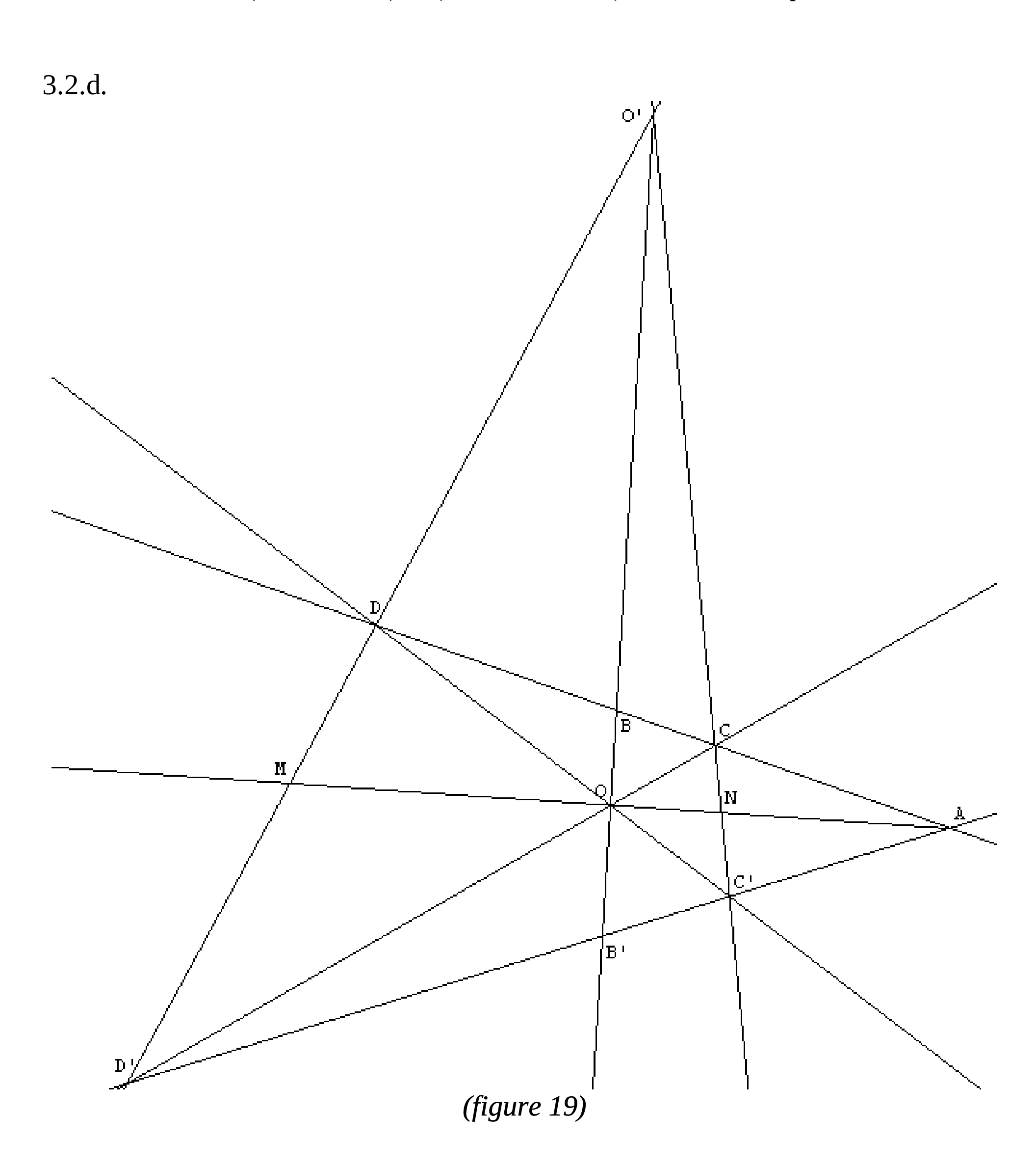
$\Leftrightarrow \overline{BI}=\overline{BJ}$

$\Leftrightarrow I=J$.

Or $I=J$ implique que les droites (*OC*) et (*OD*) sont confondues et donc que les points *C* et *D* le sont aussi ; ce qui est impossible par hypothèse (les points *A*, *B*, *C* et *D* sont distincts).

D'où $k=k'=-1$, c'est-à-dire $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}:\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=-1$ et $\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{AC'}}:\dfrac{\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}}=-1$ ce qui signifie que les divisions (*A*, *B*, *C*, *D*) et (*A'*, *B'*, *C'*, *D'*) sont harmoniques.

3.2.d.



(figure 19)

Appliquons la question 3.2.a. aux droites (*DD'*), (*CC'*) sécantes en *O'* et aux deux sécantes (*ACD*) et (*ANM*).

Il vient $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}:\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AN}}:\dfrac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$.

Or, d'après 3.2.c., $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} : \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = -1$. Donc, $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AN}} : \dfrac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = -1$, c'est-à-dire que la division (A, O, N, M) est harmonique.

3.3. (A, B, C, D) est une division harmonique et I est le milieu de [AB].

3.3.a. On a : $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} : \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = -1$ ce qui équivaut à $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = -\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$

Or $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = -\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AD} \times \overline{BC} = -\overline{AC} \times \overline{BD}$ (*)

De plus $\overline{AD} \times \overline{BC} = \left(\overline{AI} + \overline{ID}\right) \times \left(\overline{BI} + \overline{IC}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{AD} \times \overline{BC} = \left(\overline{AI} + \overline{ID}\right) \times \left(-\overline{AI} + \overline{IC}\right)$ car I est le milieu de [AB].

$\Leftrightarrow \overline{AD} \times \overline{BC} = -IA^2 + \overline{AI} \times \overline{IC} - \overline{AI} \times \overline{ID} + \overline{IC} \times \overline{ID}$.

De même, $-\overline{AC} \times \overline{BD} = IA^2 - \overline{AI} \times \overline{ID} + \overline{AI} \times \overline{IC} - \overline{IC} \times \overline{ID}$.

D'où (*) $\Leftrightarrow -IA^2 + \overline{AI} \times \overline{IC} - \overline{AI} \times \overline{ID} + \overline{IC} \times \overline{ID} = IA^2 - \overline{AI} \times \overline{ID} + \overline{AI} \times \overline{IC} - \overline{IC} \times \overline{ID}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot IA^2 = 2 \cdot \overline{IC} \times \overline{ID}$

$\Leftrightarrow IA^2 = \overline{IC} \times \overline{ID}$

Comme I est le milieu de [AB] alors $IA^2 = IB^2$.

D'où $IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \times \overline{ID}$.

3.3.b.

$$\left(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\right)^2 = \dfrac{\left(\overline{AI} + \overline{IC}\right)^2}{\left(\overline{AI} + \overline{ID}\right)^2}$$

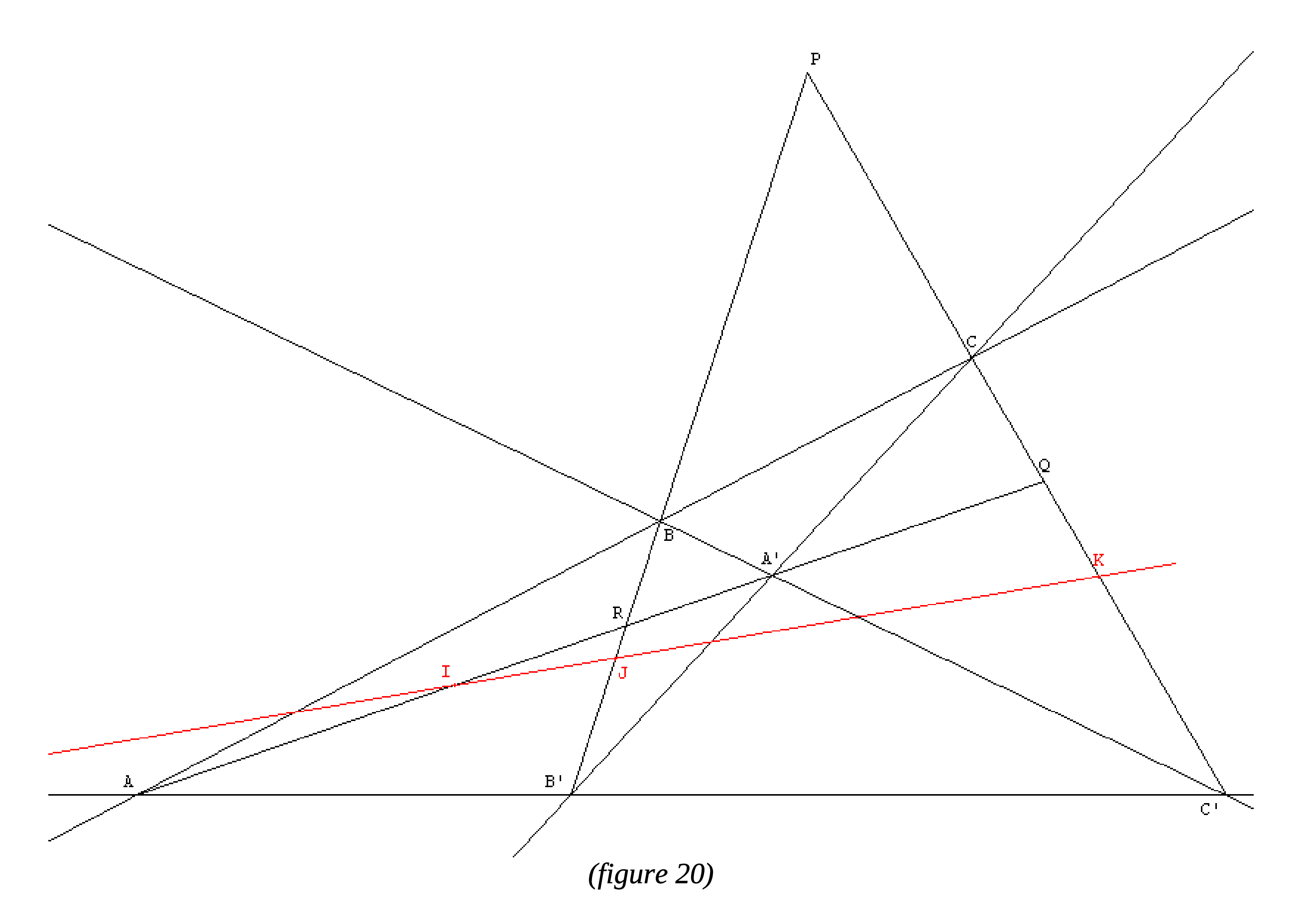
$$= \dfrac{IA^2 + \overline{IC} \times \overline{IC} + 2 \cdot \overline{AI} \times \overline{IC}}{IA^2 + \overline{ID} \times \overline{ID} + 2 \cdot \overline{AI} \times \overline{ID}}$$

$$= \dfrac{\overline{IC} \times \overline{ID} + \overline{IC} \times \overline{IC} + 2 \cdot \overline{AI} \times \overline{IC}}{\overline{IC} \times \overline{ID} + \overline{ID} \times \overline{ID} + 2 \cdot \overline{AI} \times \overline{ID}}$$ d'après la question 3.3.a.

$$= \dfrac{\overline{IC} \times \left(\overline{ID} + \overline{IC} + 2 \cdot \overline{AI}\right)}{\overline{ID} \times \left(\overline{IC} + \overline{ID} + 2 \cdot \overline{AI}\right)}$$

$$= \dfrac{\overline{IC}}{\overline{ID}}$$

3.4. Dans cette question, on considère la configuration du quadrilatère complet formé par les quatre droites (ABC), ($AB'C'$), ($BA'C'$) et ($CA'B'$).
Soient P le point d'intersection de (CC') et de (BB'), Q celui de (AA') et de (CC') et R celui de (AA') et de (BB').
Soient I, J et K les milieux respectifs de [AA'], [BB'] et de [CC'].



(figure 20)

3.4.a. Considérons le triangle *PQR* et la sécante (*ABC*). Cette dernière coupe (*PQ*) en *C*, coupe (*QR*) en *A* et coupe (*PR*) en *B*.

D'après le théorème de Ménélaüs (voir Partie I de la composition, question 4), on a :

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} \times \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \times \frac{\overline{BP}}{\overline{BR}} = 1$$

3.4.b Les droites (*BB'*) et (*CC'*) sont sécantes en *P*.
Les droites (*BC*) et (*B'C'*) sont sécantes en *A*.
Les droites (*B'C*) et (*BC'*) sont sécantes en *A'*.
Les droites (*AA'*) et (*BB'*) sont sécantes en *R*.
Les droites (*AA'*) et (*CC'*) sont sécantes en *Q*.

Donc, d'après 3.2.d., la division (*A*, *A'*, *R*, *Q*) est harmonique.
De plus, *I* est le milieu de [*AA'*].

Donc, d'après 3.3.b., $\frac{\overline{IR}}{\overline{IQ}} = \left(\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}}\right)^2$.

Les droites (*AA'*) et (*CC'*) sont sécantes en *Q*.
Les droites (*AC*) et (*A'C'*) sont sécantes en *B*.
Les droites (*A'C*) et (*AC'*) sont sécantes en *B'*.
Les droites (*AA'*) et (*BB'*) sont sécantes en *R*.
Les droites (*BB'*) et (*CC'*) sont sécantes en *P*.

Donc, d'après 3.2.d., la division (*B*, *B'*, *P*, *R*) est harmonique.
De plus, *J* est le milieu de [*BB'*].

Donc, d'après 3.3.b., $\frac{\overline{JP}}{\overline{JR}} = \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BR}}\right)^2$.

Les droites (*AA'*) et (*BB'*) sont sécantes en *R*.
Les droites (*AB*) et (*A'B'*) sont sécantes en *C*.
Les droites (*A'B*) et (*AB'*) sont sécantes en *C'*.
Les droites (*AA'*) et (*CC'*) sont sécantes en *Q*.
Les droites (*BB'*) et (*CC'*) sont sécantes en *P*.

Donc, d'après 3.2.d., la division (*C*, *C'*, *Q*, *P*) est harmonique.
De plus, *K* est le milieu de [*CC'*].

Donc, d'après 3.3.b., $\frac{\overline{KQ}}{\overline{KP}} = \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}}\right)^2$.

<u>Remarque</u> : *On peut largement raccourcir cette preuve en montrant que la division (A, A', R, Q) est harmonique et donc que* $\frac{\overline{IR}}{\overline{IQ}} = \left(\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}}\right)^2$ *, puis dire que de la même façon les divisions (B, B', P, R) et (C, C', Q, P) sont harmoniques et donc que* $\frac{\overline{JP}}{\overline{JR}} = \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BR}}\right)^2$ *et que* $\frac{\overline{KQ}}{\overline{KP}} = \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}}\right)^2$.

De plus, d'après 3.4.a., on a : $\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} \times \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \times \frac{\overline{BP}}{\overline{BR}} = 1$ (*)

Or (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}}\right)^2 \times \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}}\right)^2 \times \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BR}}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{IR}}{\overline{IQ}} \times \frac{\overline{KQ}}{\overline{KP}} \times \frac{\overline{JP}}{\overline{JR}} = 1$.

Or, dans le triangle *PQR*, on a : $I \in (RQ)$, $J \in (PR)$, $K \in (PQ)$ et $\frac{\overline{IR}}{\overline{IQ}} \times \frac{\overline{KQ}}{\overline{KP}} \times \frac{\overline{JP}}{\overline{JR}} = 1$.

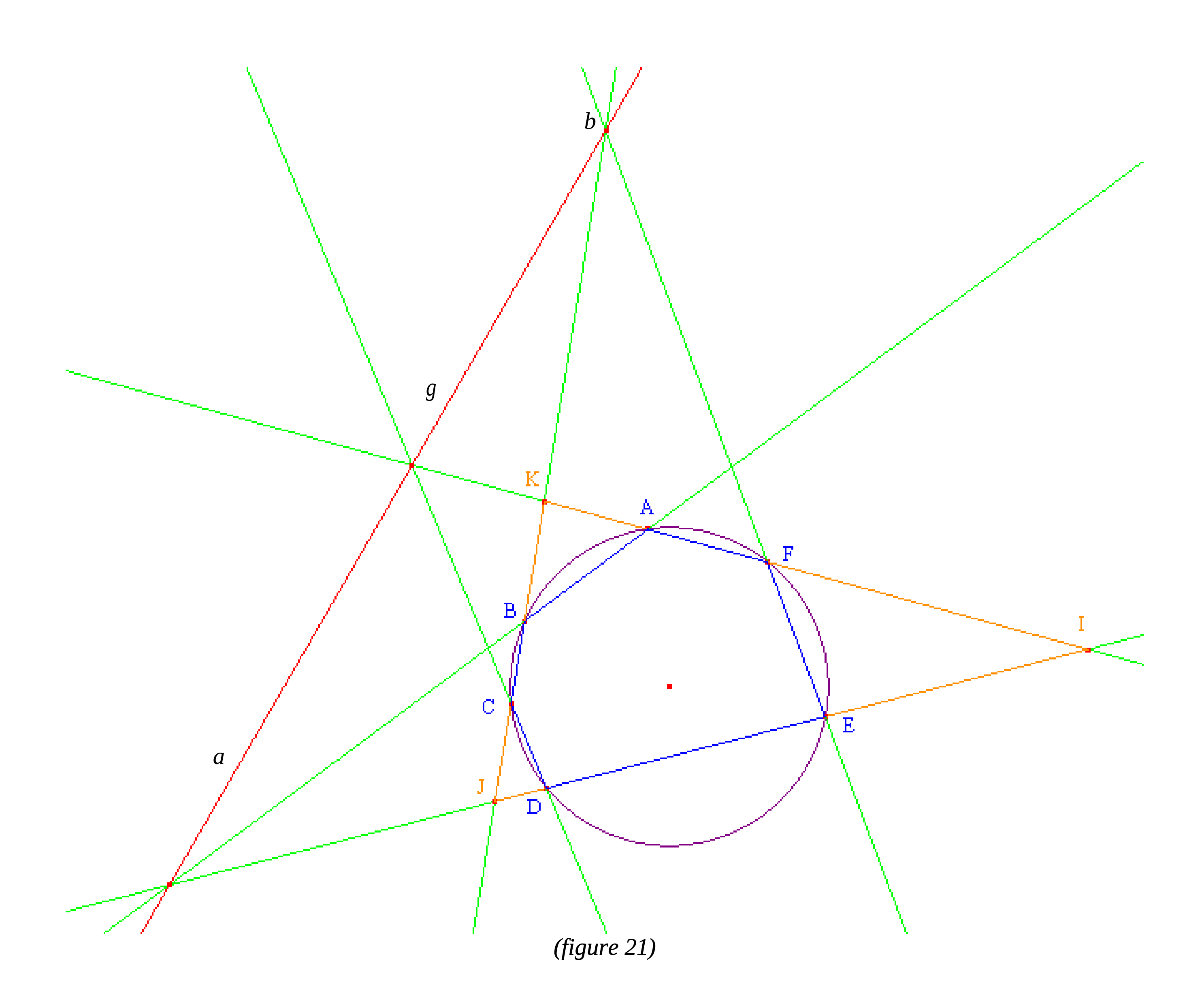
En appliquant la réciproque du théorème de Ménélaüs (voir Partie I de la composition, question 4), on peut dire que les points *I*, *J* et *K* sont alignés.

TROISIEME PARTIE

1. Le théorème de Pascal :

ABCDEF est un hexagone inscrit dans un cercle. a , b et g sont les points d'intersections respectifs des droites (*AB*) et (*ED*), (*BC*) et (*EF*), (*CD*) et (*FA*).
Soient les points *I*, *J* et *K* les points d'intersections respectifs des droites (*AF*) et (*ED*), (*ED*) et (*BC*), (*BC*) et (*AF*).

<u>Remarque</u> : *Une condition nécessaire et suffisante pour que les points a , b , g , I, J et K existent est que deux côtés de l'hexagone ne soient jamais parallèles.*



(figure 21)

Appliquons 3 fois le théorème de Ménélaüs au triangle *IJK* (voir partie I de la composition, question 4)

* a , *A* et *B* sont alignés, donc : $\frac{\overline{aI}}{\overline{aJ}} \times \frac{\overline{BJ}}{\overline{BK}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{AI}} = 1$ (1)

* g , *D* et *C* sont alignés, donc : $\frac{\overline{gK}}{\overline{Ig}} \times \frac{\overline{DI}}{\overline{DJ}} \times \frac{\overline{CJ}}{\overline{CK}} = 1$ (2)

* b , *E* et *F* sont alignés, donc : $\frac{\overline{bJ}}{\overline{bK}} \times \frac{\overline{FK}}{\overline{FI}} \times \frac{\overline{EI}}{\overline{EJ}} = 1$ (3)

La puissance du point *I* par rapport au cercle (voir partie II de la composition, question 2) est : $\overline{IA} \times \overline{IF}$ mais aussi : $\overline{IE} \times \overline{ID}$. D'où $\overline{IA} \times \overline{IF} = \overline{IE} \times \overline{ID}$ ou encore $\frac{\overline{IE}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IF}}{\overline{ID}}$ (1')

De même en calculant de deux façons les puissances des points *J* et *K* par rapport au cercle, on a :

$\frac{\overline{JC}}{\overline{JE}} = \frac{\overline{JD}}{\overline{JB}}$ (2') et $\frac{\overline{KF}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KA}}$ (3')

De plus, en multipliant les égalités (1), (2) et (3), membres à membres, et en regroupant les facteurs, on a :

$$\left(\frac{\overline{aI}}{\overline{aJ}} \times \frac{\overline{gK}}{\overline{Ig}} \times \frac{\overline{bJ}}{\overline{bK}}\right) \times \left(\frac{\overline{ID} \times \overline{IE}}{\overline{IF} \times \overline{IA}}\right) \times \left(\frac{\overline{JB} \times \overline{JC}}{\overline{JD} \times \overline{JE}}\right) \times \left(\frac{\overline{KA} \times \overline{KF}}{\overline{KB} \times \overline{KC}}\right) = 1$$

D'après les égalités (1'), (2') et (3'), on a : $\frac{\overline{ID} \times \overline{IE}}{\overline{IF} \times \overline{IA}} = \frac{\overline{JB} \times \overline{JC}}{\overline{JD} \times \overline{JE}} = \frac{\overline{KA} \times \overline{KF}}{\overline{KB} \times \overline{KC}} = 1$.

D'où, $\frac{\overline{aI}}{\overline{aJ}} \times \frac{\overline{gK}}{\overline{Ig}} \times \frac{\overline{bJ}}{\overline{bK}} = 1$.

Dans le triangle *IJK*, $a \in (IJ)$, $b \in (JK)$, $g \in (IK)$ et $\frac{\overline{aI}}{\overline{aJ}} \times \frac{\overline{gK}}{\overline{Ig}} \times \frac{\overline{bJ}}{\overline{bK}} = 1$.

D'après la réciproque du théorème de Ménélaüs (voir partie I de la composition, question 4), on a l'alignement des points a , b et g .

<u>*Remarque*</u> *:* *Dans le cas où (AF) // (ED) (ou (ED) // (BC), ou (BC) // (AF)), le point I (ou J ou K) n'existe pas, mais le théorème de Pascal est toujours vrai.*

2. Pôles et polaires par rapport à un cercle :

Soit (Γ) un cercle de centre *O* et de rayon *R*.

2.a. Notons (*a*) l'ensemble des conjugués de *A* par rapport au cercle (Γ), c'est-à-dire :

$$(a) = \left\{A' ; \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = R^2\right\}.$$

Si A et O sont confondus alors $\overrightarrow{OA}=\vec{0}$ et donc il n'existe pas de point A' tel que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=R^2$.
D'où, dans ce cas, $(a)=\varnothing$.

On suppose donc que A et O sont distincts.

D'où $\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$. Il existe donc un point $H\in(OA)$ tel que : $\overline{OH}=\dfrac{R^2}{\overline{OA}}$.

Donc, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\overline{OA}\cdot\overline{OH}=R^2$ ($H\in(a)$).

De plus, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{HA'}+R^2$.

D'où, $A'\in(a)\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=R^2\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{HA'}=0$.

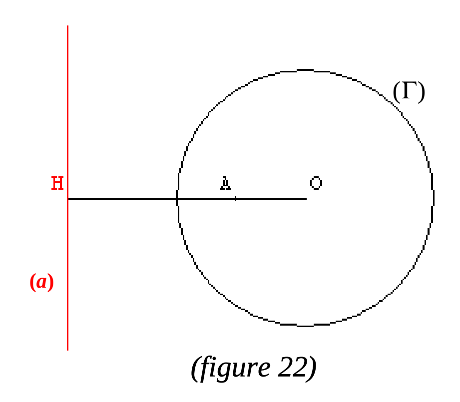
Donc (*a*) est la droite perpendiculaire à la droite (*OA*) passant par *H* où *H* est le point de la droite (*OA*) défini par : $\overline{OH}=\dfrac{R^2}{\overline{OA}}$.

2.b. D'après ce qui précède, $OH=\dfrac{R^2}{OA}$ (*)

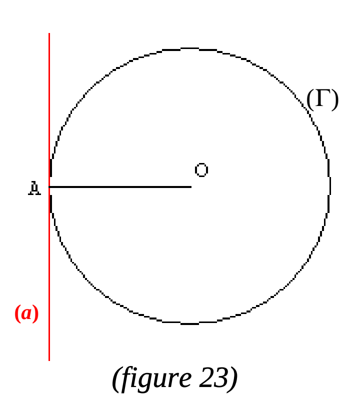
cas n°1 : *A* est à l'intérieur du cercle (Γ). *(voir figure 22)*
Dans ce cas, $OA<R$.
D'où, d'après (*), $OH>R$, c'est-à-dire, *H* est à l'extérieur du cercle (Γ).
Donc l'intersection de (*a*) et de (Γ) est vide.

cas n°2 : *A* est sur le cercle (Γ). *(voir figure 23)*
Dans ce cas, $OA=R$.
D'où, d'après (*), $OH=R$ et on a : $\overline{OH}=\overline{OA}$; d'où *H* et *A* sont confondus.
Donc l'intersection de (*a*) et de (Γ) est réduite au point *A* ; (*a*) est donc la tangente au cercle (Γ) en *A*.

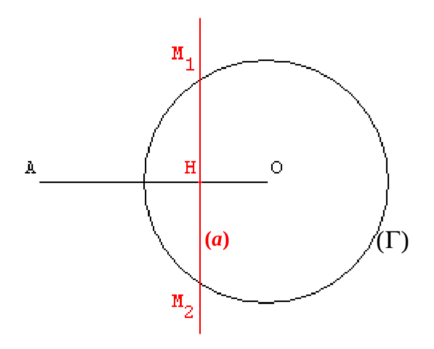
cas n°3 : *A* est à l'extérieur du cercle (Γ). *(voir figure 24)*
Dans ce cas, $OA>R$.
D'où, d'après (*), $OH<R$, c'est-à-dire, *H* est à l'intérieur du cercle (Γ).
Donc l'intersection de (*a*) et de (Γ) est formée de deux points M_1 et M_2 distincts.



(figure 22)

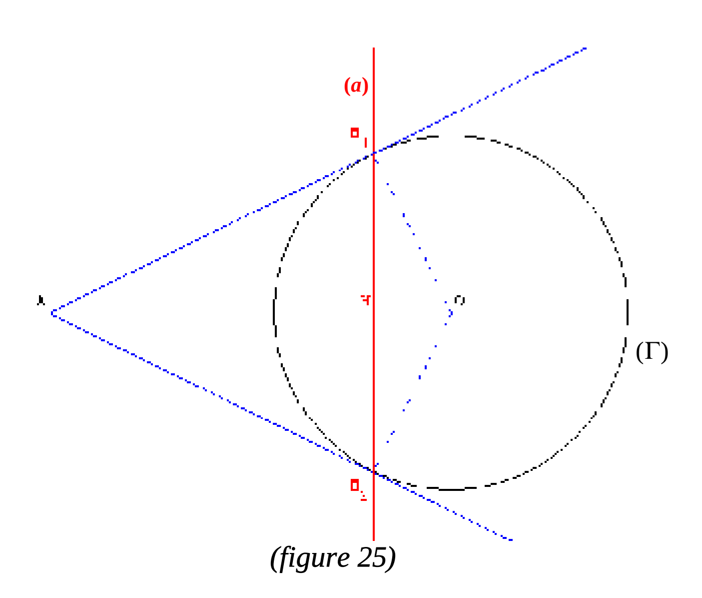


(figure 23)



(figure 24)

2.c.



(figure 25)

On suppose que A est extérieur au cercle (Γ).
D'après la question précédente, l'intersection de (a) et de (Γ) est formée de deux points M_1 et M_2 distincts.

De plus, $\overrightarrow{M_1A}\cdot\overrightarrow{M_1O}=\left(\overrightarrow{M_1O}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{M_1O}=M_1O^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{M_1O}=M_1O^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM_1}$

Or, $M_1\in(\Gamma)$, donc $M_1O^2=R^2$ et $M_1\in(a)$, donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM_1}=R^2$.

D'où, $\overrightarrow{M_1A}\cdot\overrightarrow{M_1O}=0$ ou encore le triangle AM_1O est rectangle en M_1.
De même, le triangle AM_2O est rectangle en M_2.

Donc, les points de contact M_1 et M_2 des tangentes issues de A à (Γ) appartiennent à (a).

2.d. Il est évident que l'on suppose les points A et B distincts car sinon les droites (a) et (b) sont confondues (ce qui n'a pas grand intérêt !)

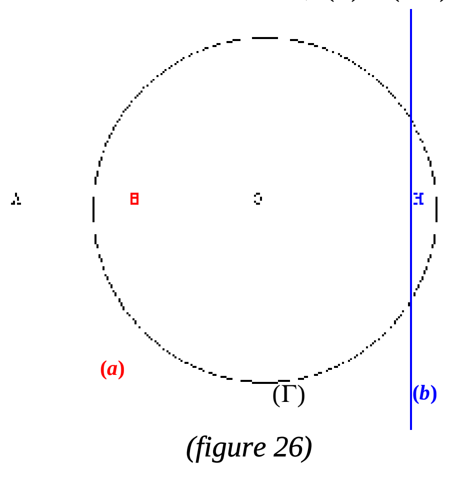
* Cas où A, O et B sont alignés : *(voir figure 26)*

D'après ce qui précède, $(a)\perp(OA)$ et $(b)\perp(OB)$.
Comme les points A, O et B sont alignés, alors $(a)//(b)$.
D'où $(a)\cap(b)=\varnothing$.

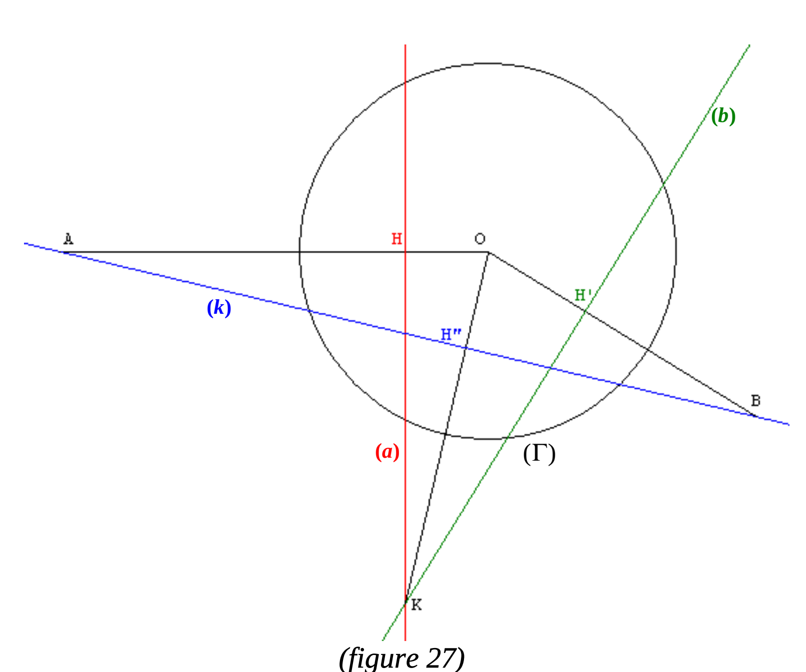
* Cas où A, O et B ne sont pas alignés : *(voir figure 27)*

D'après le cas précédent, les droites (a) et (b) ne sont pas parallèles, car sinon les droites (OA) et (OB) le seraient et donc les points A, O et B seraient alignés.
Il existe donc un point K tel que $(a)\cap(b)=\{K\}$.

On se place dans le cas où il existe un point K tel que $(a)\cap(b)=\{K\}$, c'est-à-dire, dans le cas où les points A, O et B ne sont pas alignés, et déterminons (k) la polaire du point K.
D'après ce qui précède, comme $K\in(a)$ alors A et K sont conjugués, c'est-à-dire, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OK}=R^2$ ce qui signifie que $A\in(k)$.
De même, $K\in(b)$, donc, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OK}=R^2$ ce qui signifie que $B\in(k)$.
Finalement, $(k)=(AB)$.



(figure 26)



(figure 27)

2.e. Soient 3 points A, B et C alignés sur une droite (d), distincts 2 à 2 et tous distincts du point O (car d'après la question 2.a., la polaire du point O est l'ensemble vide).

* Cas où O appartient à la droite (d) : *(voir figure 28)*

D'après ce qui précède, $(a)\perp(OA)$, $(b)\perp(OB)$ et $(c)\perp(OC)$
Comme $O\in(d)$, alors $(a)//(b)//(c)$.

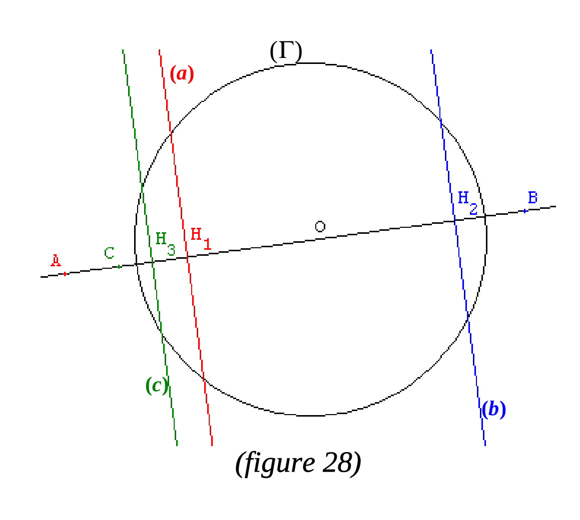
* Cas où O n'appartient pas à la droite (d) : *(voir figure 29)*

D'après la question 2.d., il existe un point K tel que $(a)\cap(b)=\{K\}$.
D'où, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OK}=R^2$ (et $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OK}=R^2$).

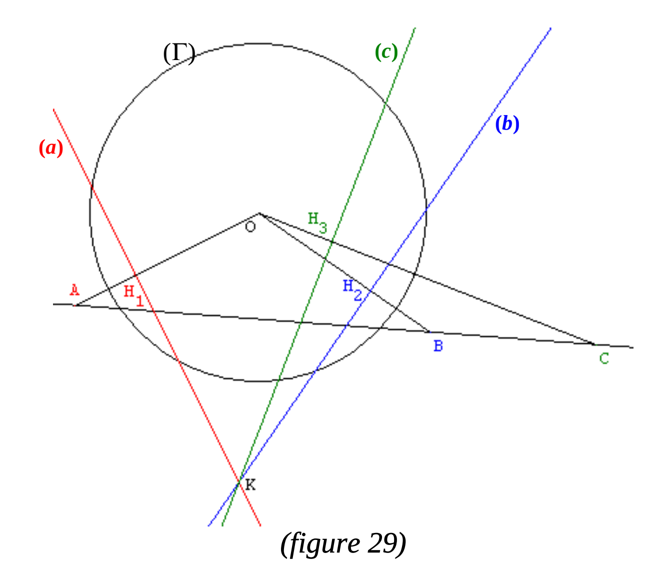
De plus,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OK} &= \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{OK}\\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OK}\\ &= R^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OK}.\end{aligned}$$

Or, d'après 2.d., (AB) est la polaire de K.
Donc, d'après 2.a., $(AB) \perp (OK)$.
De plus, comme A, B et C sont alignés sur une droite (d) alors $(AC) \perp (OK)$.
D'où $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OK} = 0$ et donc $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OK} = R^2$, ce qui signifie que $K \in (c)$.

En conclusion, si les points A, B et C sont alignés sur une droite (d) passant par O, alors les droites (a), (b) et (c), polaires respectives des points A, B et C sont parallèles ; si A, B et C sont alignés sur une droite (d) ne passant pas par O, alors les droites (a), (b) et (c) sont concourantes en un point K.



(figure 28)



(figure 29)

Soient (a), (b) et (c) 3 droites sécantes en K et soient A, B et C les pôles respectifs de (a), (b) et (c).
(Alors, nécessairement, $K \neq O$ car sinon, on aurait, par exemple, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OO} = R^2$ ce qui équivaut à $R = 0$).

$K \in (a)$ et $K \in (b)$. Donc la polaire de K est la droite (AB).
Mais on a aussi : $K \in (a)$ et $K \in (c)$, donc la polaire de K est aussi la droite (AC).

D'après la question 2.a., la polaire d'un point par rapport à un cercle est unique ; donc, les droites (AB) et (AC) sont confondues, ce qui signifie que les points A, B et C sont alignés.

Finalement, l'ensemble des pôles de toutes les droites passant par un point donné est une droite.

<u>Remarque</u> : on vient de démontrer dans cette question les propriétés duales suivantes :

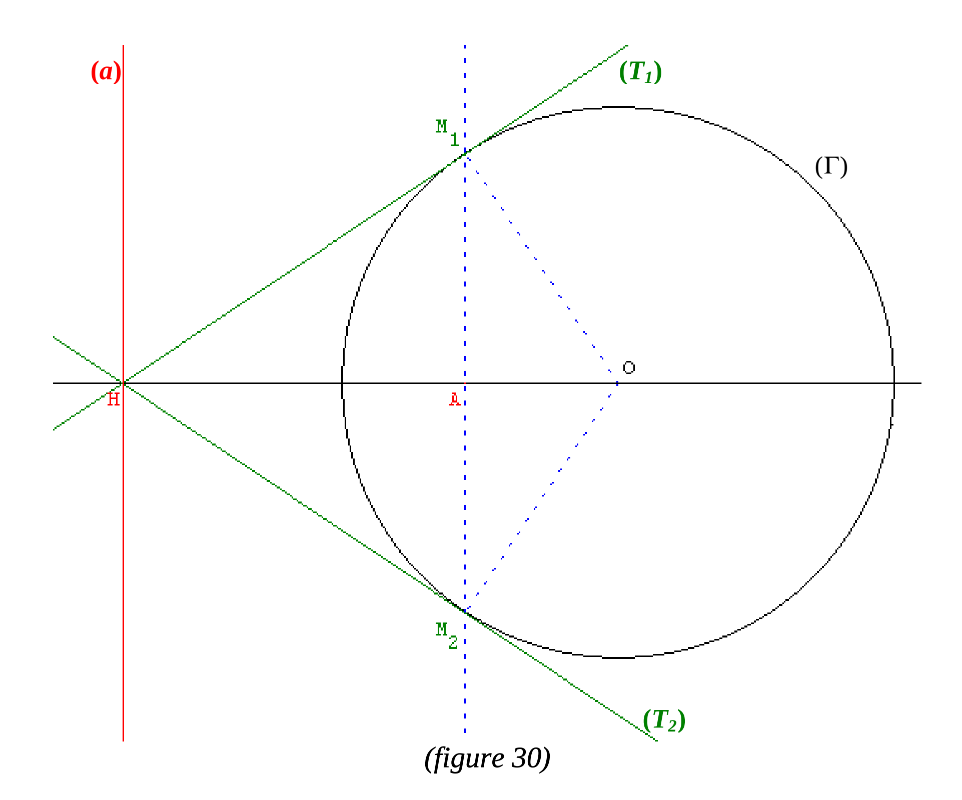
(i) *Par rapport à un cercle, les polaires de points alignés sont concourantes ; le centre du cercle n'étant pas alignés avec les points.*
(ii) *Par rapport à un cercle, les pôles de droites concourantes sont alignés ; les droites n'étant pas concourantes avec le centre du cercle.*

2.f. Soit A un point intérieur au cercle (Γ) et distinct de O.
La perpendiculaire à (OA) passant par A coupe le cercle (Γ) en deux points M_1 et M_2.

Soient (T_1) et (T_2) les tangentes au cercle (Γ) respectivement en M_1 et en M_2.
Comme $O \notin (M_1M_2)$ alors les droites (T_1) et (T_2) sont sécantes en un point H.

D'après la question 2.c., (M_1M_2) est la polaire du point H.
De plus, $A \in (M_1M_2)$.
Donc, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = R^2$, ce qui signifie également que H appartient à la droite (a), polaire du point A.

D'où, d'après la question 2.a., la droite (a) est la perpendiculaire à la droite (OA) passant par le point H. *(voir figure 30)*.



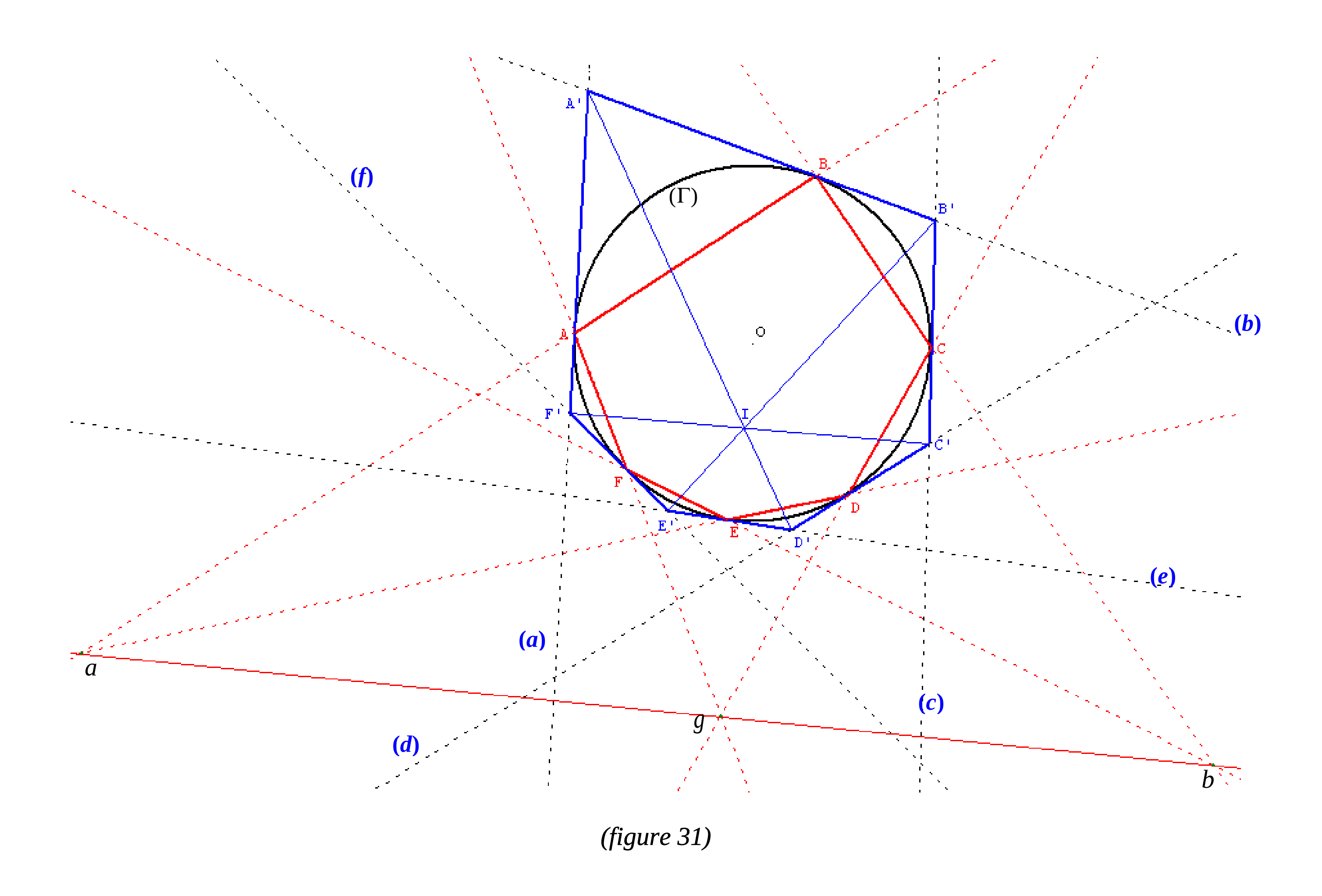
(figure 30)

3. Le théorème de Brianchon comme dual du théorème de Pascal :

Soit $A'B'C'D'E'F'$ un hexagone dont les côtés (a), (b), (c), (d), (e) et (f) sont respectivement tangents à un cercle (Γ) de centre O aux points A, B, C, D, E et F. *(voir figure 31)*.

L'hexagone $ABCDEF$ est donc inscrit dans le cercle (Γ).
Notons a, b et g les points d'intersections respectifs des droites (AB) et (ED), (BC) et (EF), (CD) et (FA). (On suppose que ces 3 points existent).

D'après le théorème de Pascal (voir question 1.), a, b et g sont alignés.



(figure 31)

De plus, les tangentes au cercle (Γ) en *A* et *B* sont sécantes en *A'* et les tangentes au cercle (Γ) en *D* et *E* sont sécantes en *D'*
Donc, d'après la question 2.c., la polaire du point *A'* par rapport au cercle (Γ) est la droite (*AB*) et la polaire du point *D'* par rapport au cercle (Γ) est la droite (*DE*).

De plus, les droites (*AB*) et (*ED*) sont sécantes en a .

Donc d'après la question 2.d., la polaire du point a par rapport au cercle (Γ) est la droite (*A'D'*).

De la même façon, les droites (*B'E'*) et (*F'C'*) sont les polaires respectives des points b et g par rapport au cercle (Γ).

Or les points a , b et g sont alignés ; donc, d'après la question 2.e., les droites (*A'D'*), (*B'E'*) et (*F'C'*) sont concourantes en un point *I*.

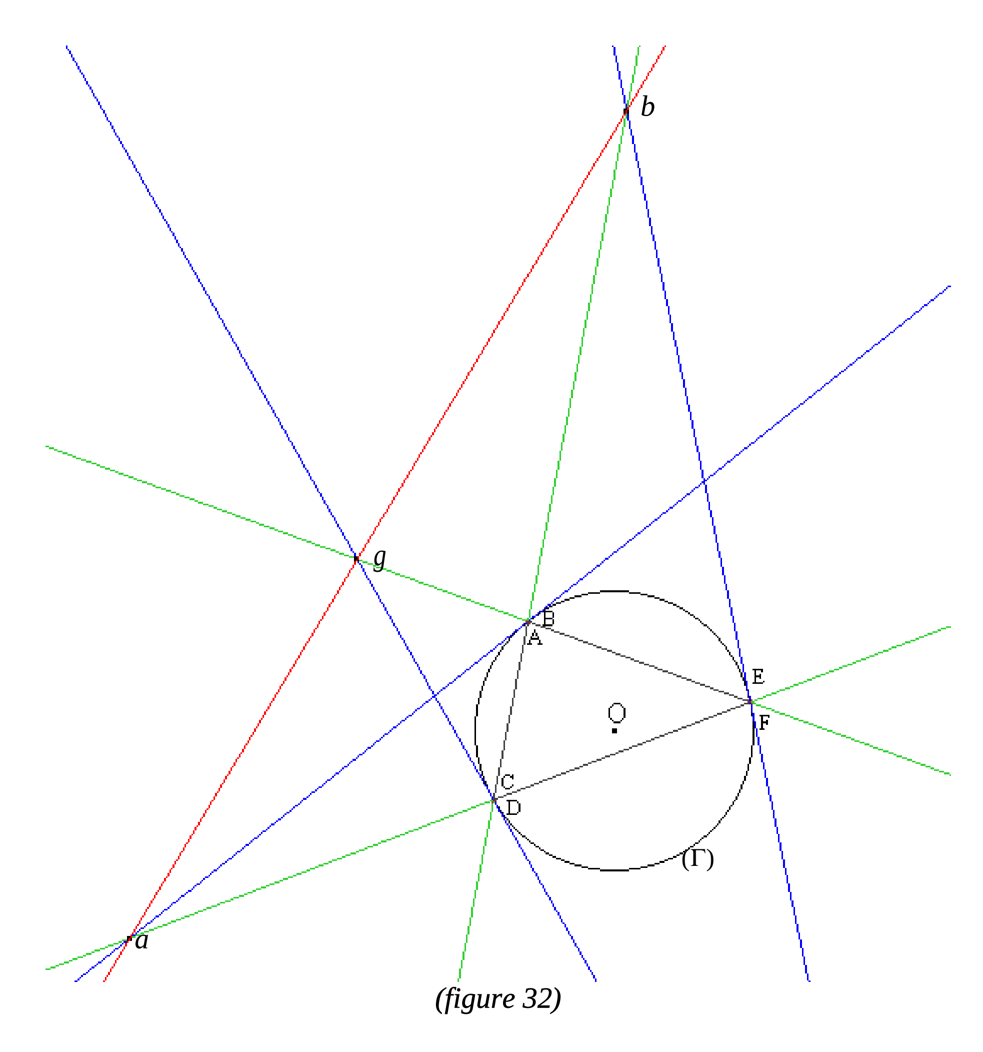
Remarque : On vient de démontrer le théorème de Brianchon comme dual du théorème de Pascal, c'est-à-dire dans le cas où les points a , b et g existent.

Dans le cas où au moins l'un de ces points n'existent pas, en particulier lorsque l'hexagone initial est un hexagone régulier, ce théorème est toujours vrai.

Nous ne ferons pas la preuve de ceci ici, car dans l'esprit de la question, on considère le théorème de Brianchon comme dual du théorème de Pascal donc on considère que les points a , b et g existent.

4. Quelques applications :

4.a.



(figure 32)

Soit *ABCDEF* un hexagone inscrit dans un cercle (Γ) de centre *O*.
Soient a , b et g les points d'intersections respectifs des droites (*AB*) et (*ED*), (*BC*) et (*EF*), (*CD*) et (*FA*). (On suppose que ces 3 points existent). *(voir figure 21)*.

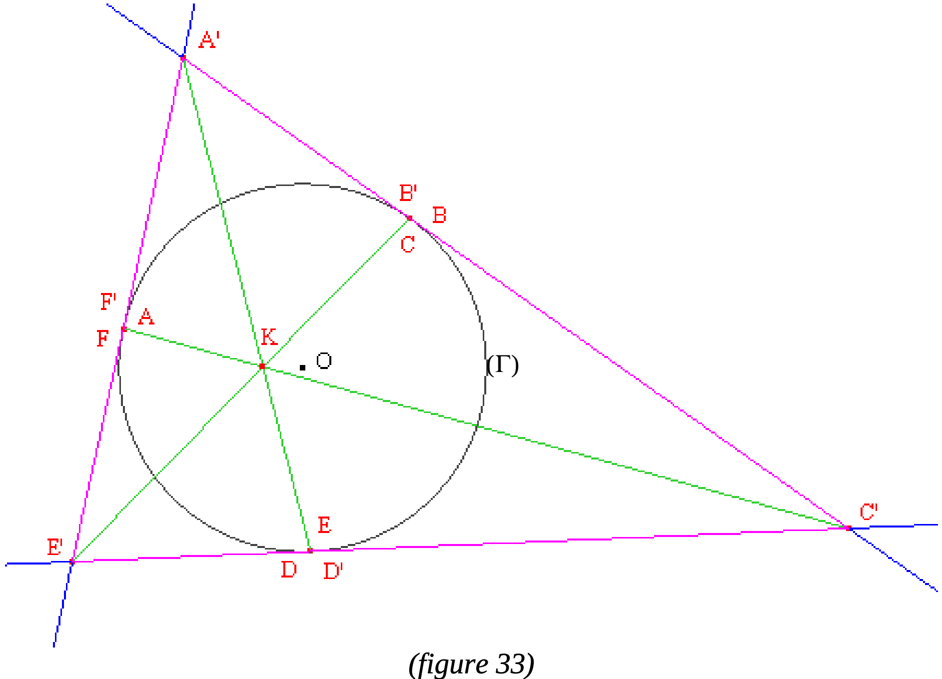
Faisons tendre les sommets l'un vers l'autre, deux à deux, en restant sur le cercle (Γ).
Sur l'exemple de la figure 32, *A* et *B* tendent l'un vers l'autre, *C* et *D* tendent l'un vers l'autre et *E* et *F* tendent l'un vers l'autre.
On obtient un triangle *ADE*, circonscrit au cercle (Γ).

Or en faisant tendre les points *A* et *B* l'un vers l'autre en restant sur le cercle (Γ), le côté (*AB*) de l'hexagone devient la tangente au cercle (Γ) en *A*.
De plus, (*ED*) porte le côté opposé à *A* dans le triangle *ADE* ; ces 2 droites se coupant en a .
De même, (*EF*) est la tangente au cercle (Γ) en *E* et (*BC*) porte le côté opposé à *E* dans le triangle *ADE* ; ces deux droites se coupant en b .
De même, (*CD*) est la tangente au cercle (Γ) en *D* et (*AF*) porte le côté opposé à *E* dans le triangle *ADE* ; ces deux droites se coupant en g .

Or, le théorème de Pascal affirme que les points a , b et g sont alignés.

D'où la propriété obtenue :

Les tangentes aux trois sommets d'un triangle, inscrit dans un cercle, rencontrent les côtés opposés du triangle en trois points alignés



(figure 33)

Soit *A'B'C'D'E'F'* un hexagone dont les côtés (*F'A'*), (*A'B'*), (*B'C'*), (*C'D'*), (*D'E'*) et (*E'F'*) sont respectivement tangents à un cercle (Γ) de centre *O* aux points *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F*. *(voir figure 31)*.

Faisons tendre les côtés l'un vers l'autre, deux à deux, en restant tangents au cercle (Γ). Sur l'exemple de la figure 33, les côtés (*A'B'*) et (*B'C'*) tendent l'un vers l'autre, les côtés (*C'D'*) et (*E'D'*) tendent l'un vers l'autre et les côtés (*E'F'*) et (*F'A'*) tendent l'un vers l'autre.
On obtient un triangle *A'E'C'* dont les côtés sont tangents au cercle (Γ).

Or en faisant tendre les côtés (*A'B'*) et (*B'C'*) l'un vers l'autre, les points *B*, *C* et *C'* coïncident et *B'* devient le point de contact du côté (*A'C'*) et du cercle (Γ).

De même, les points *E*, *D* et *D'* coïncident et *D'* devient le point de contact du côté (*E'C'*) et du cercle (Γ).

De même, les points *A*, *F* et *F'* coïncident et *F'* devient le point de contact du côté (*A'E'*) et du cercle (Γ).

Or, le théorème de Brianchon affirme que les droites (*A'D'*), (*E'B'*) et (*F'C'*) sont concourantes en un point *K*.

D'où la propriété obtenue :

Dans un triangle circonscrit à un cercle, les droites joignant chaque sommet au point de contact du côté opposé et du cercle sont concourantes.

4.b. Soit (Γ) un cercle de centre *O* et de rayon *R*.
Soit *A* un point du plan, distinct de *O*.
Soit la droite (*a*), la polaire de *A* par rapport au cercle (Γ). ((*a*) existe bien d'après la question 2. car *A* et *O* sont distincts).

Notons *A'* le point d'intersection de (*OA*) et de (*a*).

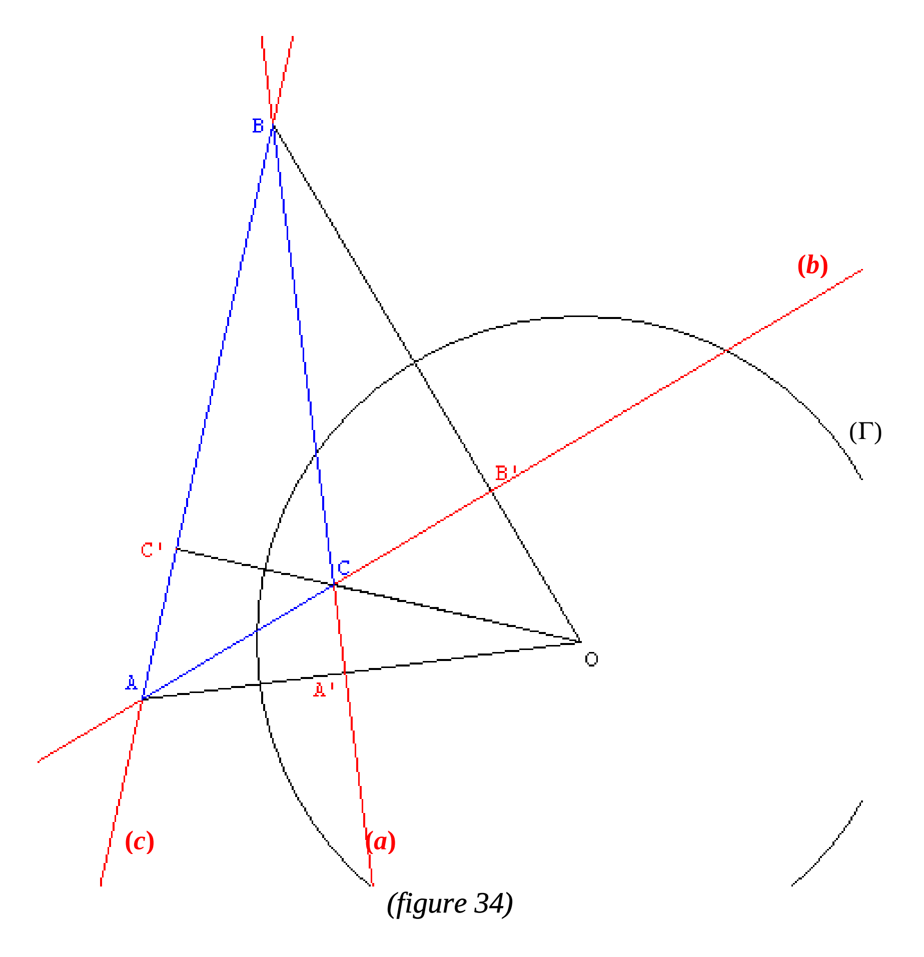
On va raisonner par analyse-synthèse.

On suppose qu'un triangle *ABC* autopolaire existe. *(analyse)*
Notons (*b*) et (*c*) les polaires respectives de *B* et de *C*.

Comme *ABC* est autopolaire alors, $B \in (a)$ et $A \in (b)$ et donc, les points *A* et *B* sont conjugués par rapport à (Γ).

D'où (*b*) est la perpendiculaire à (*OB*) passant par *A*.

De plus, (*c*) est la droite (*AB*) alors, *C* est le point d'intersection des droites (*a*) et (*b*), d'après la question 2.d.



(figure 34)

Réciproquement, soit *B* un point de la droite (*a*). *(synthèse)*

* 1^er cas : $B = A'$.
Dans ce cas, les points *A*, *O* et *B* sont alignés et, d'après la question 2.d., les droites (*a*) et (*b*) sont parallèles.
Donc le point *C* n'existe pas.

* 2^ème cas : $B \neq A'$.
Dans ce cas, les points *A*, *O* et *B* ne sont pas alignés et, d'après la question 2.d., l'intersection des droites (*a*) et (*b*) est réduite à un point.
Donc le point *C* existe.

Finalement, pour construire un triangle autopolaire, on place un point *A* distinct de *O*, on trace sa polaire (*a*), qui coupe (*OA*) en *A'* ; on place un point *B* sur la droite (*a*), distinct de *A'* ; le point *C* est le point d'intersection de la droite (*a*) et de la perpendiculaire à (*OB*) passant par *A*.

Il existe donc une infinité de triangles autopolaires.

Soit *ABC* un triangle.

(Analyse)
On suppose qu'il existe un cercle (Γ) de centre *O* et de rayon *R* tel que *ABC* soit autopolaire par rapport à ce cercle.
Alors (*BC*) est la polaire de *A*. Donc $(OA) \perp (BC)$.
De même $(OC) \perp (AB)$ et $(OB) \perp (AC)$.

Donc, *O* est l'orthocentre du triangle *ABC*.

De plus, on a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2$

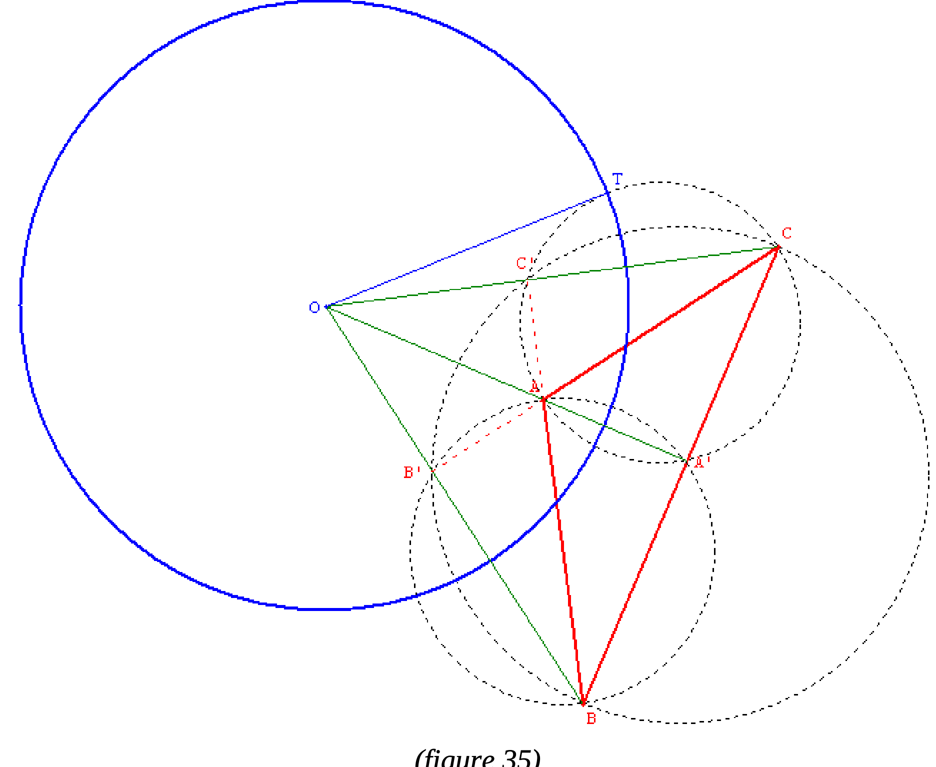
Or, d'après la deuxième partie de la composition, question 2.1.a., $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ est la puissance du point *O* par rapport au cercle de diamètre [*AB*], $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ celle du point *O* par rapport au cercle de diamètre [*AC*] et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ celle du point *O* par rapport au cercle de diamètre [*BC*]. Notons *p* cette puissance commune.

Donc, $R^2 = p$, c'est-à-dire, $R = \sqrt{p}$.

Soit *T* le point de contact de l'une des deux tangentes au cercle de diamètre [*AB*] issue de *O*. (On aurait pu prendre le cercle de diamètre [*AC*] ou celui de diamètre [*BC*]).
Notons *I* le centre de ce cercle et *r* son rayon.
On a : *OTI* triangle rectangle en *T*, donc par Pythagore : $OI^2 = TI^2 + OT^2 = r^2 + OT^2$
D'où $OT^2 = OI^2 - r^2 = p$ d'après la deuxième partie de la composition, question 2.1.a.

Donc *p* est positif, ce qui signifie que *O* est extérieur au cercle de diamètre [*AB*].
De même, *O* est extérieur au cercle de diamètre [*AC*] et au cercle de diamètre [*BC*].

Finalement, si le cercle (Γ) existe alors *O* est l'orthocentre de *ABC*, *O* est extérieur aux cercles de diamètres [*AB*], [*AC*], [*BC*], et le rayon de (Γ) est égale à la longueur *OT* où *T* est le point de contact d'une tangente à l'un des trois cercles précédents, issue de *O*.



(figure 35)

(Synthèse)
Réciproquement, soit *O* l'orthocentre du triangle *ABC*.
On suppose que *O* est extérieur aux cercles de diamètres [*AB*], [*AC*], [*BC*].
Soit *T* est le point de contact d'une tangente au cercle de diamètre [*AC*], issue de *O*.
Soit (Γ) le cercle de centre *O* et de rayon *OT*.

Donc la puissance du point *O* par rapport au cercle de diamètre [*AC*] est égale à OT^2.
De plus la puissance du point *O* par rapport au cercle de diamètre [*AC*] est égale à $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.
D'où $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = OT^2 = R^2$.

De plus, en notant *A'* et *B'* les pieds des hauteurs issues respectivement de *A* et de *B*, on a :
* *A'* appartient aux cercles de diamètres [*AB*] et [*AC*].
* *B'* appartient aux cercles de diamètres [*AB*] et [*BC*].

Donc le point *O* a même puissance par rapport à ces trois cercles.
On en conclut que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2$.
Donc *A* et *B* sont conjugués par rapport au cercle (Γ), ainsi que *A* et *C*.
D'où la polaire de *A* est la droite (*BC*).

De même, la polaire de *B* est la droite (*AC*) et la polaire de *C* est la droite (*AB*).
Donc le triangle *ABC* est autopolaire.

En résumé, un triangle étant donné, il existe un cercle par rapport auquel il est autopolaire si, et seulement si, l'orthocentre du triangle est extérieur aux cercles de diamètres les côtés du triangle ; l'orthocentre du triangle étant le centre du cercle et la rayon étant la longueur de la tangente issue de l'orthocentre à l'un des cercles de diamètres les côtés du triangle.

<u>Remarque</u> : *On peut montrer que la condition « l'orthocentre du triangle est extérieur aux cercles de diamètres les côtés du triangle » est équivalente à la condition « le triangle a un angle obtus ».*

CAPES interne de Mathématiques
session 2001

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [capesint01e]

EXERCICE 1

QUADRILATÈRES CONVEXES CIRCONSCRITS À UN CERCLE

On se propose, dans cet exercice, d'étudier dans le plan quelques configurations formées de quadrilatères convexes dans chacun desquels est inscrit un cercle, ce qui signifie précisément que ce cercle est inclus dans l'intérieur du quadrilatère et que chacun des côtés de ce dernier est tangent au cercle. On dit aussi dans ce cas que **le quadrilatère est circonscrit au cercle.**

Tous les quadrilatères considérés ici seront supposés tels que deux quelconques de leurs sommets soient distincts et que trois quelconques d'entre eux soient non alignés.

On désignera par $(\mathcal{P})$ le plan euclidien orienté par la donnée d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on notera $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1 dans ce plan.

I. Étude des tangentes au cercle $(\mathcal{C})$.

1. Montrer que $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ où t appartient à $]-\pi, \pi]$. Comment peut-on interpréter t géométriquement ?

2. En utilisant le paramétrage de $(\mathcal{C})$ obtenu dans la question précédente, déterminer une équation cartésienne de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$. Justifier que cette tangente est la perpendiculaire en M à la droite (OM).

3. Soit Q un point de $(\mathcal{P})$ de coordonnées (p, q).

   a. Discuter suivant les valeurs prises par $p^2 + q^2$ l'existence ou non d'une tangente à $(\mathcal{C})$ passant par Q et préciser le nombre des tangentes passant par Q lorsqu'il en existe. (On pourra utiliser 2, considérer d'abord le cas $q = 0$ et en déduire le cas général,...).

   b. Indiquer, en la justifiant, une construction à la règle et au compas de la (ou des) tangente(s) à $(\mathcal{C})$ passant par Q dans le cas où elle(s) existe(nt).

4. Déterminer l'ensemble des points Q du plan $(\mathcal{P})$ d'où l'on peut mener deux tangentes à $(\mathcal{C})$ qui soient perpendiculaires l'une à l'autre.

II. Étude de parallélogrammes circonscrits à $(\mathcal{C})$.

1. Montrer qu'il existe un unique cercle inscrit dans un losange quelconque donné.

2. On se propose de démontrer que, réciproquement, si ABCD est un parallélogramme circonscrit à un cercle donné (Γ), c'est un losange.

   a. Montrer que pour tout parallélogramme de $(\mathcal{P})$ les bissectrices intérieures issues de deux sommets consécutifs quelconques sont perpendiculaires.

   b. Montrer que si Ω est le centre d'un cercle (Γ) inscrit dans le parallélogramme ABCD, il appartient à la bissectrice intérieure issue de chaque sommet.

   c. En conclure que ABCD est un losange de centre Ω dès qu'il est circonscrit à un cercle de centre Ω.

3. *a.* A étant un point de $(\mathcal{P})$ quelconque, strictement extérieur au cercle $(\mathcal{C})$, montrer qu'il existe un unique parallélogramme direct ABCD circonscrit à $(\mathcal{C})$ et déterminer une construction de ce parallélogramme à la règle et au compas.

   b. Quel est le lieu des points A de $(\mathcal{P})$ tels qu'il existe un carré ABCD circonscrit à $(\mathcal{C})$?

4. *a.* Soit ABCD un losange circonscrit à $(\mathcal{C})$. Montrer que son aire est égale à 2AB.

   b. Réciproquement, montrer que si ABCD est un losange de centre O dont l'aire est égale à 2AB, alors ABCD est circonscrit à $(\mathcal{C})$.

5. Soit ABCD un losange circonscrit à $(\mathscr{C})$. Notons H la projection orthogonale de O sur la droite (AB).
   a. Montrer que $AH \cdot BH = 1$.
   b. Justifier le résultat classique suivant : « Un point M de $(\mathscr{P})$ appartient au segment [AB] si et seulement si on a MA + MB = AB ».
   c. Étudier sur **R** la fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
   d. En déduire le lieu des points A de $(\mathscr{P})$ tels que l'aire de ABCD soit minimale parmi celles des parallélogrammes circonscrits à $(\mathscr{C})$.

6. On suppose dans toute cette question que ABCD est un losange direct circonscrit à $(\mathscr{C})$.
   a. Montrer que $OA^2 + OB^2 = OA^2 \cdot OB^2$.
   (On pourra utiliser une équation de la droite (AB) dans un repère adapté,...)
   b. Montrer que si A est donné, B est parfaitement défini comme étant le point vérifiant les deux propriétés suivantes :
   (i) $OA^2 + OB^2 = OA^2 \cdot OB^2$.
   (ii) Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est $\frac{\pi}{2}$.
   c. Soit un réel $k > 1$. Déterminer l'ensemble décrit par le point B lorsque le point A décrit le cercle de centre O et de rayon k.
   d. Soit un réel $t > 1$. On note $(\mathscr{E})$ l'ensemble des points de $(\mathscr{P})$ de coordonnées (x, y) tels que $x^2 = t^2$. On considère un point A de $(\mathscr{E})$ et on note u une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$.
   Calculer les coordonnées de B en fonction de t et de u. Justifier que le lieu de B lorsque A décrit $(\mathscr{E})$ admet comme axes de symétrie les droites passant par O et dirigées respectivement par $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Montrer que ce lieu est une ellipse privée de deux points que l'on précisera.

III. Étude de quadrilatères convexes circonscrits à $(\mathscr{C})$ qui ne sont pas des parallélogrammes.

1. On suppose dans cette question que ABCD est un quadrilatère convexe qui n'est pas un parallélogramme et qui est circonscrit à un cercle de rayon 1.
   a. Montrer que AB + CD = AD + BC.
   b. Montrer que si $\mathscr{A}$ est l'aire de ABCD on a :
   $$\mathscr{A} = AB + CD.$$
   On se propose maintenant de démontrer que, réciproquement, si ABCD est un quadrilatère convexe dont l'aire $\mathscr{A}$ vérifie :
   $$\mathscr{A} = AB + CD = AD + BC,$$
   alors ABCD est circonscrit à un cercle de rayon 1.
   Pour cela on commence par étudier une configuration liée à un triangle.

2. Soit EST un triangle non aplati, Ω le centre du cercle inscrit dans ce triangle, I et J les projetés orthogonaux respectifs de Ω sur les droites (ET) et (ES).
   On considère un point U du segment [ET] et un point V du segment [ES] tel que :
   $$ST + UV = TU + SV.$$
   a. Montrer que l'on ne peut avoir à la fois :
   $$U \in [TI] \text{ et } V \in [SJ].$$
   b. On suppose que $V \in]JE]$ et $U \in [TI[$. Montrer qu'alors on devrait avoir $JV \geq VI$, d'où V = E, ce qui conduit à une contradiction.
   c. En déduire $J \in [SV]$ et $I \in [TU]$.
   d. Montrer que STUV est un quadrilatère convexe et que Ω appartient à son intérieur.
   e. Montrer que la droite (UV) est tangente au cercle inscrit dans le triangle EST.

3. Soit maintenant un quadrilatère convexe ABCD tel que AB + CD = AD + BC et que son aire soit égale à AB + CD. Déduire de 2. qu'il existe un unique cercle (Γ) de centre Ω et de rayon 1 tel que ABCD soit circonscrit à (Γ). Montrer que $(\Gamma) = (\mathscr{C})$ si et seulement si les bissectrices intérieures de deux sommets consécutifs de ABCD se coupent en O.

Tournez la page S.V.P.

IV. Étude des trapèzes isocèles convexes circonscrits à $(\mathscr{C})$.

Comme il est d'usage, un trapèze sera défini comme un quadrilatère ayant deux côtés parallèles et deux seulement ; ces côtés sont appelés bases du trapèze.

1. On suppose tout d'abord que ABCD est un trapèze isocèle convexe circonscrit à $(\mathscr{C})$ et dont les bases sont [AB] et [CD].

   a. Rappeler, en donnant les justifications nécessaires, quelle est la nature de la composée d'une réflexion de $(\mathscr{P})$ et d'une translation dans la direction orthogonale à celle de l'axe de la réflexion.

   b. On note K_1, K_2, K_3 et K_4 les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Montrer que la perpendiculaire à (AB) en K_1 est axe de symétrie orthogonale de ABCD et contient les points K_3 et O.

   c. Montrer que O est le milieu de $[K_2 K_4]$.

   d. On note Ω_1 et Ω_2 les milieux respectifs de [AC] et [BD]. Montrer que O est le milieu de $[\Omega_1 \Omega_2]$.

   On se propose maintenant de reprendre cette étude avec les barycentres.

2. Soit donc un quadrilatère convexe quelconque qui n'est pas un parallélogramme et est circonscrit à $(\mathscr{C})$, notons-le encore ABCD. Notons I_1, I_2, I_3 et I_4 les points de contact de $(\mathscr{C})$ avec [DA], [AB], [BC] et [CD]. Notons de plus Ω_1 et Ω_2 les milieux respectifs de [AC] et [BD]. Posons enfin $x = AI_1$, $y = BI_2$, $z = CI_3$ et $t = DI_4$.

   a. Déterminer les barycentres des systèmes pondérés suivants :

   $$\{(D, x), (A, t)\},\ \{(A, y), (B, x)\},\ \{(B, z), (C, y)\} \text{ et } \{(C, t), (D, z)\}.$$

   b. Montrer que le barycentre du système pondéré :

   $$\{(I_1, t + x), (I_2, x + y), (I_3, y + z), (I_4, z + t)\}$$

   est aussi le barycentre du système pondéré :

   $$\{(\Omega_1, t + y), (\Omega_2, x + z)\}.$$

3. Soient R_1, S_1, T_1 et U_1 les points intersections de $(\mathscr{C})$ avec [OA], [OB], [OC] et [OD] respectivement.

   On définit le vecteur $\vec{\omega}$ par :

   $$2\vec{\omega} = (x + y)\,\overrightarrow{OI_2} + (y + z)\,\overrightarrow{OI_3} + (z + t)\,\overrightarrow{OI_4} + (t + x)\,\overrightarrow{OI_1}.$$

   Montrer que :

   $$2\vec{\omega} = I_1I_2 \cdot \overrightarrow{OR_1} + I_2I_3 \cdot \overrightarrow{OS_1} + I_3I_4 \cdot \overrightarrow{OT_1} + I_4I_1 \cdot \overrightarrow{OU_1}.$$

4. Soit J_2 le point de $(\mathscr{P})$ tel que le repère $(O, \overrightarrow{OI_2}, \overrightarrow{OJ_2})$ soit orthonormal direct. On se place dans le plan complexe associé à ce repère.

   Soient alors α, β, γ et δ les angles déterminés par :

   $$2\alpha = (\overrightarrow{OI_1}, \overrightarrow{OI_2}),\ 2\beta = (\overrightarrow{OI_4}, \overrightarrow{OI_1}),\ 2\gamma = (\overrightarrow{OI_3}, \overrightarrow{OI_4}) \text{ et } 2\delta = (\overrightarrow{OI_2}, \overrightarrow{OI_3}).$$

   a. Déterminer, en fonction de α, β, γ et δ les affixes des points R_1, S_1, T_1 et U_1 ainsi que l'affixe du vecteur $\vec{\omega}$, notée θ.

   b. Montrer que θ est nul et que O est le barycentre du système pondéré :

   $$\{(\Omega_1, t + y), (\Omega_2, x + z)\}.$$

   c. Retrouver comme conséquence que si le quadrilatère convexe ABCD est un trapèze isocèle, alors O est le milieu de $[\Omega_1 \Omega_2]$. (Cf. IV.1.*c*.)

EXERCICE 2

MARCHE ALÉATOIRE SUR UN TRIANGLE

Remarque : on pourra utiliser les résultats de la partie I, même non démontrés, dans les parties suivantes. Les parties II et III sont indépendantes.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points :

A, d'affixe 1

B, d'affixe $e^{2i\frac{\pi}{3}}$

C, d'affixe $e^{4i\frac{\pi}{3}}$

(i désignant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

Soit r la rotation de centre O dont l'angle a pour mesure en radians $\frac{2\pi}{3}$.

Par convention, étant donné un sommet quelconque, X, du triangle ABC, on dira que le sommet Y est le sommet suivant de X (ou que Y suit X) si Y = r (X) ; on pourra dire également que X est le sommet précédent de Y (ou que X précède Y). Ainsi : B suit A, C suit B, A suit C. Ou encore : A précède B, B précède C, C précède A.

Un point mobile, M, parcourt aléatoirement le triangle ABC de la façon suivante : soient n un entier naturel et p, q, r trois réels positifs tels que $p + q + r = 1$; si, à l'instant n, le point M se trouve en un sommet donné du triangle ABC, alors, à l'instant $n + 1$:

M se trouvera au sommet suivant avec la probabilité p,
M se trouvera au sommet précédent avec la probabilité q,
M restera au même sommet avec la probabilité r.

Étant donné un sommet quelconque, X, du triangle ABC, on désigne par X_n l'événement : « à l'instant n, le point M se trouve en X », et par $F(X_n)$ la probabilité de cet événement. À l'instant 0, le point M se trouve en A ; on a donc $F(A_0) = 1$, $F(B_0) = 0$, $F(C_0) = 0$.

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement du point M lorsque n tend vers l'infini, dans quelques cas particuliers, puis dans le cas général.

I. Préliminaires.

1. Calculer $F(A_1)$, $F(B_1)$, $F(C_1)$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$F(A_n) + F(B_n) + F(C_n) = 1.$$

3. On pose $a_n = F(A_n)$, $b_n = F(B_n)$, $c_n = F(C_n)$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = r \cdot a_n + q \cdot b_n + p \cdot c_n$$
$$b_{n+1} = p \cdot a_n + r \cdot b_n + q \cdot c_n$$
$$c_{n+1} = q \cdot a_n + p \cdot b_n + r \cdot c_n$$

4. Calculer a_2, b_2, c_2.
5. Étudier le comportement du point M dans les trois cas particuliers suivants :
   a. $r = 1$ (d'où $p = q = 0$)
   b. $p = 1$ (d'où $q = r = 0$)
   c. $p = q = r \left(= \frac{1}{3}\right)$.

Tournez la page S.V.P.

II. Étude du cas $p = q$.

A. On se place dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$ (et $r = 0$).

1. n étant un entier naturel, on pose :

$$u_n = a_n - b_n, \quad v_n = b_n - c_n, \quad w_n = c_n - a_n.$$

Démontrer que les suites (u_n), (v_n), (w_n) sont des suites géométriques.

2. Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n uniquement. Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

4. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n uniquement. On admettra que toute suite (a_n) vérifiant

$$2\,a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

s'écrit
$$a_n = \alpha\, r^n + \beta\, s^n$$

où α, β, r, s sont des nombres réels que l'on déterminera, r et s vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2\,r^{n+2} = r^{n+1} + r^n \qquad 2\,s^{n+2} = s^{n+1} + s^n.$$

Puis étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n).
Que peut-on en conclure pour le comportement du point M ?

B. *Généralisation.* Soit maintenant $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. On se place dans le cas $p = q$ (d'où $r = 1 - 2p$) et on généralise l'étude faite ci-dessus, en utilisant les mêmes notations.

1. Démontrer que les suites (u_n), (v_n), (w_n) sont des suites géométriques.

2. Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n uniquement. Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+2} = (p + 2r)\, a_{n+1} + (2p^2 - pr - r^2)\, a_n.$$

4. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n uniquement, puis étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n). Que peut-on en déduire pour le comportement du point M ? (On utilisera, pour le calcul de a_n, une méthode analogue à celle indiquée en A.4.).

III. Étude du cas général.

On suppose ici que p, q, r sont trois réels positifs tels que :

$$p + q + r = 1.$$

On se place dans l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^3$, rapporté à sa base canonique. On pose $V_n = (a_n, b_n, c_n)$ et on considère la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$$

Soit Φ l'application linéaire admettant S pour matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^3$. D'après la partie I, on a donc, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = \Phi(V_n)$.

1. On note j la racine cubique de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive $\left(j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$.
Soient les vecteurs de $\mathbf{C}^3$:

$$u = (1, 1, 1)\,;\ v = (1, j, j^2)\,;\ w = (1, j^2, j).$$

a. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbf{C}^3$.

b. Démontrer que l'on a $\Phi(u) = u$, $\Phi(v) = \lambda v$, $\Phi(w) = \mu w$, avec :

$$\lambda = r + qj + pj^2, \quad \mu = r + pj + qj^2.$$

c. Démontrer que les modules des nombres complexes λ et μ sont inférieurs ou égaux à 1 (on précisera pour quelles valeurs de p, q, r a lieu l'égalité, ainsi que les valeurs de λ et μ correspondantes).

2. Déterminer les coordonnées (x_0, y_0, z_0) de V_0 dans la base (u, v, w).
3. Calculer a_n, b_n, c_n.
4. Déterminer les limites éventuelles des suites (a_n), (b_n), (c_n) lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on en déduire pour le comportement du point M ?

Concours 2001 : corrigé de l'exercice 1

QUADRILATÈRES CONVEXES CIRCONSCRITS À UN CERCLE

I. Etude des tangentes au cercle $(\mathcal{C})$

1. Soit $M(\cos t, \sin t)$. $OM^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donc $M \in (\mathcal{C})$.
Réciproquement soit M un point de $(\mathcal{C})$ et soit θ la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.
Alors les coordonnées de M sont par définition $(\cos t, \sin t)$.
Donc $(\mathcal{C}) = \{M(\cos t, \sin t)\ , t \in]-\pi; \pi]\ \}$

2. $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ est un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ en M ; l'équation de la tangente est :

$$\begin{vmatrix} x - \cos t & -\sin t \\ y - \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{x\cos t + y \sin t - 1 = 0}$$

On remarque que : $\overrightarrow{OM}.\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = 0$. Donc la tangente est perpendiculaire en M à la droite (OM).

3.
- On suppose que $q = 0$.
Pour qu'une tangente à $(\mathcal{C})$ passe par Q il faut et il suffit qu'il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que : $p\cos t = 1$.
Si $|p| < 1$ il n'existe aucune valeur de t
Si $|p| = 1$ on obtient une valeur de t ($t = 0$ ou $t = \pi$)
Si $|p| > 1$ il existe deux valeurs de t convenant
- On suppose que $q \neq 0$.
On peut se ramener au cas précédent par une rotation de centre O. En conclusion :
Si $p^2 + q^2 < 1$ il n'y a pas de tangente passant par Q.
Si $p^2 + q^2 = 1$ une seule tangente passe par Q.
Si $p^2 + q^2 > 1$ il existe deux tangentes passant par Q.
- construction des tangentes passant par Q.
Si $OQ > 1$ on construit le milieu du segment $[OQ]$ et on trace le cercle de diamètre $[OQ]$. Soient A et B les points d'intersection des deux cercles. Comme $[OQ]$ est un diamètre les triangles OQA et OQB sont rectangles en A et B. Les points d'intersection de ce cercle avec $(\mathcal{C})$ sont donc les points de contact des tangentes issues de Q avec le cercle.
Si $OQ = 1$ la tangente est la droite passant par Q et perpendiculaire à $[OQ]$!

4. Cette question peut être résolue par le calcul ou géométriquement.

- *solution analytique* :
Si un point $Q(p, q)$ du plan convient, il existe un réel θ tel que :

$$\begin{cases} p\cos\theta + q\sin\theta = 1 \\ -p\sin\theta + q\cos\theta = 1 \end{cases}$$

On élève au carré les deux égalités et on les ajoute membre à membre. On obtient : $p^2 + q^2 = 2$.
Réciproquement supposons que Q est tel que : $p^2 + q^2 = 2$.
D'après la question précédente il existe deux tangentes à $(\mathcal{C})$ issues de Q. Donc il existe deux réels θ_1 et θ_2 tels que :

$$\begin{cases} p\cos\theta_1 + q\sin\theta_1 = 1 \\ p\cos\theta_2 + q\sin\theta_2 = 1 \end{cases}$$

les deux tangentes sont distinctes donc : $\theta_2 - \theta_1 \neq 0\ (\pi)$
On effectue la résolution du système :

$$p = \frac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \qquad q = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$$

On en déduit : $p^2 + q^2 = 1 + \tan^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$. Par suite :

$$p^2 + q^2 = 2 \iff \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\pi}{4}\ \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

On obtient : $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$
ce qui signifie que les deux tangentes sont perpendiculaires.

- *solution géométrique* :
  On commence par remarquer que pour le point qui correspond à $p = 1$ et $q = 1$ c'est vrai et par rotation pour tout point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
  Réciproquement, si les tangentes issues de Q sont perpendiculaires et si on note T et T' les points de contact avec $(\mathcal{C})$, le quadrilatère $OTQT'$ est alors un carré dont le côté mesure 1. Par conséquent $OQ = \sqrt{2}$.
  En conclusion l'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

II. Etude de parallélogrammes circonscrits à $(\mathcal{C})$

1. Soit $ABCD$ un losange quelconque de centre O. Si un cercle convient son centre se trouve sur les bissectrices des angles du losange. C'est donc le point O et son rayon est égal à la distance de O à $[AB]$. Inversement le cercle défini ainsi convient.

2. (a) Soit $ABCD$ un parallélogramme du plan. Les bissectrices intérieures issues des sommets A et Bont pour vecteurs directeurs :

$$\overrightarrow{u} = \frac{AB}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} \qquad \overrightarrow{V} = \frac{BA}{\|\overrightarrow{BA}\|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|}$$

On sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. donc :

$$\overrightarrow{V} = \frac{AD}{\|\overrightarrow{AD}\|} - \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

On calcule le produit scalaire : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1 - 1 = 0$.
Donc les deux bissectrices intérieures considérées sont perpendiculaires.

(b) Le point Ω est équidistant des demi-droites $(A, \overrightarrow{AB})$ et $(A, \overrightarrow{AD})$. Donc il appartient à la bissectrice intérieure issue de A. Même raisonnement pour les trois autres sommets.

(c) Si le parallélogramme $ABCD$ est circonscrit à un cercle de centre Ω alors les droites (ΩA), (ΩB), (ΩC), (ΩD) sont perpendiculaires. On en déduit que Ω est le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ et que ces diagonales sont perpendiculaires. Donc $ABCD$ est un losange de centre Ω.

3. (a) On peut supposer que le point A appartient à l'axe des abscisses et que son abscisse est strictement supérieure à 1. Nécessairement les points B et D sont les intersections avec l'axe des ordonnées des tangentes issues de A au cercle, l'ordonnée de B étant positive. Le point C est le symétrique de A par rapport à O. Inversement le parallélogramme ainsi construit convient car par symétrie $[CB]$ et $[CD]$ sont aussi tangentes au cercle.
Pour réaliser la construction géométrique on utilise le cercle de diamètre $[OA]$ pour obtenir les points de contact de $[AB]$ et $[AD]$ avec le cercle.

(b) Pour que $ABCD$ soit un carré circonscrit à $(\mathcal{C})$ il faut et il suffit que les tangentes au cercle issues de A soient perpendiculaires. D'après la question I.4 l'ensemble est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

4. (a) Soit H le projeté orthogonal de O sur $[AB]$.
L'aire du losange $ABCD$ est : $\mathcal{A} = 4 \times \dfrac{1}{2} OH \times AB = 2AB$.

(b) Réciproquement si l'aire du losange vaut $2AB$ alors $OH = 1$ et par suite $ABCD$ est circonscrit à $(\mathcal{C})$.

5. (a) Le triangle OAB est rectangle en O. Donc : $AH.BH = OH^2$. Comme $OH = 1$ on a : $AH.BH = 1$

(b) Démontrons que : $M \in [AB] \Longleftrightarrow MA + MB = AB$:
$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$.
On élève au carré :
$MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = AB^2$
M appartient à $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.
Par suite :
M appartient à $[AB]$ si et seulement si : $MA^2 + MB^2 + 2MA.MB = AB^2$
Ce qui est équivalent à : $MA + MB = AB$.

(c) Comme f est impaire on se limite à $x > 0$. La fonction est dérivable.

$$\forall x > 0 \qquad f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$ est :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

(d) On sait que l'aire de $ABCD$ est $2AB$.
On suppose que A se déplace sur l'axe des abscisses et on pose : $OA = x$ avec : $x > 1$
Comme H est entre A et B on a :

$$AB = AH + HB = AH + \frac{1}{AH} = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = f(\sqrt{x^2 - 1})$$

L'étude de f montre que AB est minimum si : $\sqrt{x^2 - 1} = 1$
En élevant au carré on trouve : $x = \sqrt{2}$.
Le lieu cherché est donc le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

6. (a) Le triangle OAB est rectangle. On a donc la relation :

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2}$$

On sait que : $OH = 1$; on en déduit que :

$$OA^2 + OB^2 = OA^2.OB^2$$

(b) La relation : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ exprime que B appartient à la demi-droite image de $]OA)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$OB^2(OA^2 - 1) = OA^2$$

On sait que $OA > 1$. Donc : $OB = \frac{OA}{\sqrt{OA^2 - 1}}$

Cette relation détermine la position de B sur la demi-droite précédente.

(c)

$$OA = k \quad \Longrightarrow \quad OB = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Donc B appartient au cercle de centre O et de rayon $\frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Donc, lorsque A décrit le cercle de centre O et de rayon k , le point B décrit le cercle de centre O et de rayon $\frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}$

(d) Soit $t > 1$. L'ensemble $(\mathcal{E})$ est formé par deux droites parallèles à l'axe des ordonnées. Les coordonnées de A sont $(t, t\tan u)$. On obtient les coordonnées de B en utilisant les relations de la question 6.b :

$$B\left(-\sqrt{\frac{t^2}{t^2 - \cos^2 u}}\sin u\ ,\ \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - \cos^2 u}}\cos u\right)$$

Les changements de paramètre : $u \longmapsto -u$ et $u \longmapsto \pi - u$ donnent les propriétés de symétrie par rapport aux axes de coordonnées.

$$x^2 + \left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right)y^2 = \left(\frac{1}{t^2 - \cos^2 u}\right)(t^2\sin^2 u + (t^2 - 1)\cos^2 u) = 1$$

Le lieu de B est l'ellipse d'équation :

$$\boxed{x^2 + \left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right)y^2 = 1}$$

privée des points de coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$ car $u \neq \frac{\pi}{2}$ et $u \neq -\frac{\pi}{2}$.

CAPES INTERNE DE MATHEMATIQUES SESSION 2001
ELEMENTS DE SOLUTION

EXERCICE 2

I. Préliminaires

1. $F(A_1)$ est la probabilité que le point M se trouve en A à l'instant n. Comme on sait qu'à l'instant 0 le point se trouve en A, on a d'après les données du texte :

$$F(A_1) = r \quad F(B_1) = p \quad F(C_1) = q$$

2. A l'instant n, le point M se trouve soit en A, soit en B, soit en C. L'union de ces trois évènements incompatibles est égale à l'univers, et donc on a bien pour tout entier naturel n :

$$F(A_n) + F(B_n) + F(C_n) = 1$$

   (a) Les évènements A_n, B_n et C_n forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totale s'applique, et on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = F(A_{n+1}) &= p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) + p(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= p(A_n) \times p(A_{n+1}/A_n) + p(B_n) \times p(A_{n+1}/B_n) + p(C_n) \times p(A_{n+1}/C_n) \\ &= a_n \times r + b_n \times q + c_n \times p \end{aligned}$$

   Le même raisonnement fournit les deux autres résultats. On a donc pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= ra_n + qb_n + pc_n \\ b_{n+1} &= pa_n + rb_n + qc_n \\ c_{n+1} &= qa_n + pb_n + rc_n \end{aligned}$$

3. Connaissant $a_1 = r$, $b_1 = p$ et $c_1 = q$, on trouve

$$a_2 = r^2 + 2pq \quad b_2 = 2pr + q^2 \quad c_2 = 2qr + p^2$$

4. Etudions les cas particuliers suivants :

   (a) $r = 1$ (d'où $p = q = 0$). Il vient en reportant dans le système obtenu à la question 3.

$$a_{n+1} = a_n \quad b_{n+1} = b_n \quad c_{n+1} = c_n$$

   Ces égalités sont valables pour tout entier n, ce qui prouve que le point M est immobile.

(b) p= 1 (d'où $q = r = 0$). On obtient

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} = c_n & b_{n+1} = a_n & c_{n+1} = b_n \\ a_{n+2} = b_n & b_{n+2} = c_n & c_{n+2} = a_n \\ a_{n+3} = a_n & b_{n+3} = b_n & c_{n+3} = c_n \end{array}$$

On en déduit que le point M décrit dans l'ordre les différents sommets : A, B, C, A, ...

(c) $p = q = r (= \frac{1}{3})$. On obtient

$$a_{n+1} = b_{n+1} = c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$$

d'où

$$a_n = b_n = c_n = \frac{1}{3}$$

Le point M est donc situé de manière équiprobable sur chacun des sommets.

II) Etude du cas $p = q$

A) On se place dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$ (et $r = 0$)

1. Dans ce cas, on a les égalités suivantes, obtenues à partir de la question I) 3) :

$$a_{n+1} = \tfrac{b_n + c_n}{2} \quad b_{n+1} = \tfrac{a_n + c_n}{2} \quad c_{n+1} = \tfrac{a_n + b_n}{2}$$

On a alors les égalités pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = -\frac{1}{2} u_n$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. On démontre de même que (v_n) et (w_n) sont aussi deux suites géométriques de raison $-\frac{1}{2}$.

2. On a $u_0 = a_0 - b_0 = 1$, et pour tout entier n :

$$u_n = u_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On trouve de même :

$$v_n = 0 \quad w_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On remarque évidemment que la suite (v_n) est nulle.

3. On a pour tout entier n :

$$a_{n+1} + a_n = \frac{b_n + c_n}{2} + a_n$$

tandis que

$$2a_{n+2} = 2\left(\frac{b_{n+1} + c_{n+1}}{2}\right) = \frac{a_n + c_n}{2} + \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n + c_n}{2} + a_n$$

ce qui prouve bien l'égalité demandée.

4. On suppose que r est non nul. Dans ce cas, r est solution de l'équation

$$2r^{n+2} = r^{n+1} + r^n \Leftrightarrow 2r^2 = r + 1 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = -\frac{1}{2}$$

On obtient le même résultat pour s. Dans ce cas, la suite (a_n) a pour expression :

$$a_n = \alpha \times 1^n + \beta \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \alpha + \beta \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ permettent facilement de déterminer α et β, d'où

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

De la relation

$$b_n = a_n - u_n$$

on obtient alors :

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

et enfin comme $v_n = 0$, on a $c_n = b_n$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

Au bout d'un grand nombre de tours, le point M se répartit de manière équiprobable sur un des trois points du triangle.

B. Généralisation.

Soit maintenant $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. On se place dans le cas $p = q$ (d'où $r = 1 - 2p$) et on généralise l'étude faite ci-dessus, en utilisant les mêmes notations.

1. En reprenant le raisonnement effectué précédemment :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= (ra_n + qb_n + pc_n) - (pa_n + rb_n + qc_n) \\ &= (r-p)a_n + (q-r)b_n + (p-q)c_n \\ &= (1-3p)(a_n - b_n) \\ &= (1-3p)u_n \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} r - p &= (1-2p) - p = 1 - 3p \\ q - r &= p - r = 3p - 1 \\ p - q &= 0 \end{aligned}$$

On a donc prouvé que la suite (u_n) est géométrique de raison $(1-3p)$. Le même calcul établit que (v_n) et (w_n) sont aussi géométriques avec la même raison.

2. On en déduit comme précédemment que pour tout entier n :

$$u_n = (1-3p)^n \quad v_n = 0 \quad w_n = -(1-3p)^n$$

La suite (v_n) est la suite nulle.

3. Pour tout entier naturel n, on a:

$$\begin{aligned}(p+2r)\,a_{n+1} + \left(2p^2 - pr - r^2\right) a_n &= (p+2r)\,(ra_n + qb_n + pc_n) + \left(2p^2 - pr - r^2\right) a_n \\ &= \left(2p^2 + r^2\right) a_n + (pq + 2rq)\, b_n + \left(p^2 + 2rp\right) c_n\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= ra_{n+1} + qb_{n+1} + pc_{n+1} \\ &= r\,(ra_n + qb_n + pc_n) + q\,(pa_n + rb_n + qc_n) + p\,(qa_n + pb_n + rc_n) \\ &= \left(r^2 + 2pq\right) a_n + \left(2rq + p^2\right) b_n + \left(2rp + q^2\right) c_n \\ &= \left(r^2 + 2p^2\right) a_n + (2rq + pq)\, b_n + \left(2rp + p^2\right) c_n\end{aligned}$$

sachant que $p = q$. On a donc bien établi l'égalité demandée.

4. La suite (a_n) s'écrit donc :

$$a_n = \alpha r^n + \beta s^n$$

où r et s vérifient l'équation du second degré :

$$X^2 = (p+2r)\,X + \left(2p^2 - pr - r^2\right)$$

dont les solutions sont 1 et $(1-3p)$. Pour tout entier n, on a alors

$$a_n = \alpha \times 1^n + \beta \times (1-3p)^n$$

Les conditions initiales

$$a_0 = 1 \quad a_1 = r$$

permettent de trouver :

$$\alpha = \frac{r+3p-1}{3p} = \frac{(1-2p)+3p-1}{3p} = \frac{1}{3}$$

$$\beta = \frac{1-r}{3p} = \frac{1-(1-2p)}{3p} = \frac{2}{3}$$

On en déduit donc :

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (1-3p)^n \quad b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (1-3p)^n$$

Comme

$$0 < p \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 3p \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 1-3p < 1$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} (1-3p)^n = 0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

On retrouve dans le cas général la conclusion que nous avions trouvée à la question 4 de la partie A.

III. Etude du cas général

1. (a) Calculons simplement le déterminant de ces trois vecteurs :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = 3j^2 - 2j - j^4 = 3\left(j^2 - j\right) \neq 0$$

car $j^3 = 1$ et donc $j^4 = j$. Comme ce déterminant est non nul, ces trois vecteurs forment une base de C^3.

(b) Calculons la matrice de $\Phi(u)$:

$$\begin{bmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r+q+p \\ r+q+p \\ r+q+p \end{bmatrix} = (r+q+p) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ce qui prouve bien l'égalité $\Phi(u) = u$. De même, $\Phi(v)$ a pour matrice :

$$\begin{bmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + jq + j^2 p \\ rj + qj^2 + p \\ rj^2 + q + pj \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + jq + j^2 p \\ j\left(r + jq + j^2 p\right) \\ j^2\left(r + jq + j^2 p\right) \end{bmatrix} = \left(r + jq + j^2 p\right) \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{bmatrix}$$

ce qui prouve bien que $\Phi(v) = \lambda v$. On prouve de mêm que $\Phi(w) = \mu w$.

(c) On a :

$$|\lambda| \leq \left|r + jq + j^2 p\right| \leq |r| + |j| \times |q| + |j|^2 \times |p|$$

Or, on sait que $|j| = 1$, donc

$$|\lambda| \leq r + q + p \leq 1$$

De même pour μ. Calculons $|\lambda|^2$:

$$\begin{aligned} \left|r + jq + j^2 p\right|^2 &= \left|r + \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) q + \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 p\right|^2 \\ &= \left|\left(r - \tfrac{q}{2} - \tfrac{p}{2}\right) + i\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(q-p)\right|^2 \\ &= \left(r - \tfrac{q}{2} - \tfrac{p}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}(q-p)^2 \\ &= r^2 + q^2 + p^2 - rq - rp - pq \end{aligned}$$

Remarquons ensuite que

$$r + p + q = 1 \Rightarrow (r + p + q)^2 = 1 \Rightarrow r^2 + p^2 + q^2 = 1 - 2pq - 2pr - 2qr$$

On en déduit que l'égalité $|\lambda| = 1$ a lieu si et seulement si :

$$1 = (1 - 2pq - 2pr - 2qr) - rq - rp - pq \Leftrightarrow pq + pr + qr = 0$$

Comme les trois réels p, q et r sont positifs, cette égalité est vérifiée si et seulement si

$$pq = pr = qr = 0$$

Deux cas sont alors possibles :
Soit $p = r = 0$ et $q = 1$, d'où $\lambda = j$ et $\mu = j^2$
Soit $q = r = 0$ et $p = 1$, d'où $\lambda = j^2$ et $\mu = j$.

2. Désignons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique. On a par définition :

$$\begin{aligned} V_0 &= x_0 u + y_0 v + z_0 w \\ &= x_0 (e_1 + e_2 + e_3) + y_0 \left(e_1 + j e_2 + j^2 e_3\right) + z_0 \left(e_1 + j^2 e_2 + j e_3\right) \end{aligned}$$

Comme $V_0 (1, 0, 0)$ dans la base canonique, l'unicité de la décomposition d'un vecteur sur une base permet d'obtenir le système d'équations :

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 1 \\ x_0 + j y_0 + j^2 z_0 = 0 \\ x_0 + j^2 y_0 + j z_0 = 0 \end{cases}$$

On résout ce système avec les formules de Cramer. Le déterminant du sytème a déjà été calculé à la question 1, et sa valeur est $3\left(j^2 - j\right)$. On a alors :

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j & j^2 \\ 0 & j^2 & j \end{vmatrix}}{3\,(j^2 - j)} = \frac{j^2 - j^4}{3\,(j^2 - j)} = \frac{j^2 - j}{3\,(j^2 - j)} = \frac{1}{3}$$

On trouve de même $y_0 = \frac{1}{3}$ et $z_0 = \frac{1}{3}$.

3. Une récurrence immédiate fournit $V_n = \Phi^n (V_0)$. Or, dans la base (u, v, w), la matrice de Φ est égale à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

donc celle de Φ^n dans cette même base est égale à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

Le vecteur V_n a donc pour coordonnées dans cette base :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\lambda^n}{3} \\ \frac{\mu^n}{3} \end{bmatrix}$$

On en déduit les coordonnées de V_n dans la base canonique en utilisant la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\lambda^n}{3} \\ \frac{\mu^n}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\lambda^n}{3} + \frac{\mu^n}{3} \\ \frac{1}{3} + j\frac{\lambda^n}{3} + j^2\frac{\mu^n}{3} \\ \frac{1}{3} + j^2\frac{\lambda^n}{3} + j\frac{\mu^n}{3} \end{bmatrix}$$

soit les égalités :

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{\lambda^n}{3} + \frac{\mu^n}{3}$$
$$b_n = \frac{1}{3} + j\frac{\lambda^n}{3} + j^2\frac{\mu^n}{3}$$
$$c_n = \frac{1}{3} + j^2\frac{\lambda^n}{3} + j\frac{\mu^n}{3}$$

4. Dans le cas où $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

On retrouve les conclusions de la question II) B) 4. Dans le cas où $|\lambda| = 1$, on a $\lambda = j$ et $\mu = j^2$, et on retrouve les cas particuliers étudiés dans la partie I..

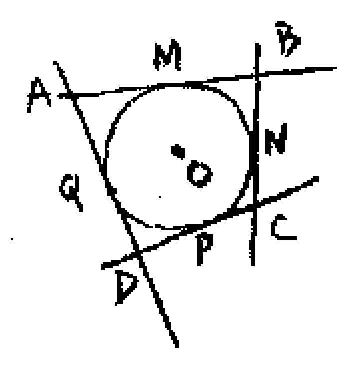
QUADRILATERES CONVEXES CIRCONSCRITS

A UN CERCLE

corrigé des parties III et IV

III

1.



a. Si M, N, P, Q sont les points de contact de [AB], [BC], [CD], [DA] avec (C), on a

AM = AQ
BM = BN
CN = CP
DP = DQ

d'où AM + BM + CP + DP = AQ + DQ + CN + BN

c-à-d AB + CD = AC + BD

b. O étant le centre de (C), OM, ON, OP, OQ sont les hauteurs des triangles OAB, OBC, OCD, ODA.

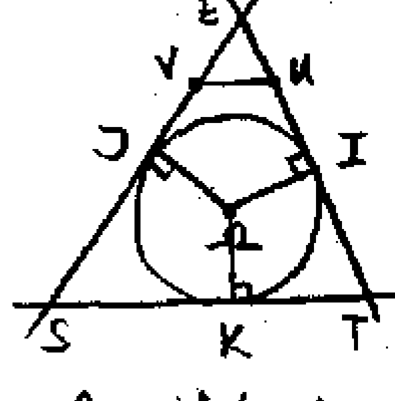
$\mathcal{A}$ = aire(OAB) + aire(OBC) + aire(OCD) + aire(ODA)

$= \frac{1}{2}$ AB.OM + $\frac{1}{2}$ BC.ON + $\frac{1}{2}$ CD.OP + $\frac{1}{2}$ DA OQ

$= \frac{1}{2}$ (AB + BC + CD + DA) × 1

= AB + CD = AD + BC

2.



Soit K le projeté orthogonal de Ω sur (ST).

Les angles $T\hat{S}\Omega$ et $S\hat{T}\Omega$ ont une somme inférieure à $\frac{\pi}{2}$ (c'est la moitié de $T\hat{S}E + S\hat{T}E$) donc sont

aigus tous les deux. D'où $K \in [ST]$. De même $I \in [ET]$ ②
$J \in [ES]$

a. Si $U \in [TI]$ et $V \in [SJ]$

$TU \leqslant TI$ et $SV \leqslant SJ$

d'où $TU + SV \leqslant TI + SJ = TK + SK = TS$

d'où $TU + SV < ST + UV$

car $U \neq V$ et $UV > 0$

b. $SV = SJ + JV$, $TU = TI - IU$,

d'où $SV + TU = SJ + TI + JV - IU$

$= ST + JV - IU$

Donc $ST + JV - IU = UV + ST$

d'où $JV = IU + UV \geqslant VI$ par l'inégalité triangulaire.

Mais $\Omega J = \Omega I$, $EJ = EI$,

ce qui montre que la médiatrice de $[IJ]$ est (ΩE).

Comme $V \in [EJ[$, $VJ \leqslant VI$.

On en tire $VJ = VI$. V est le point de $[EJ[$ sur (ΩE), donc $V = E$

$ST + UV = TU + SV$ devient

$ST + UE = TU + SE$

$SJ + TI + UE = TI + UI + SJ + JE$

$UE = UI + JE$

$UE + UI = 2UI + JE$

$IE = 2UI + JE$

$2UI = 0$ ✱

c. On a donc, par exclusion des autres cas,
$J \in [SV]$ et $[I \in TU]$

d. Si $V = J$

$ST + UV = SV + TU$ devient $ST + JU = SJ + TU$

$\Leftrightarrow SJ + IT + JU = SJ + IT + IU$

$\Leftrightarrow JU = IU$

$\Leftrightarrow U = E$ (déjà vu)

Inversement, si $U = E$, alors
$ST + UV = SV + TU$ devient $ST + EV = SV + TE$,
et comme (cf ci-dessus) $ST + JE = SJ + TE$,
on a $JE - EV = SJ - SV$
Soit $JV = -JV$, donc $JV = 0$ et $V = J$

On a donc $V = J \Leftrightarrow U = E$.
De même $U = I \Leftrightarrow V = E$

Dans chacun de ces cas limite, le quadrilatère $STUV$ est alors tel que deux de ses côtés consécutifs sont alignés. Il est donc convexe.

Si $V \in]EJ[$ et $U \in]EI[$

Dans le triangle STE, S et E sont de part et d'autre de (TV), puisque $[SE]$ coupe (TV) en V.
Comme T est sur (TV), et que E n'est pas sur (TV), et que $U \in]TE[$, U et E sont du même

côté de (TV)

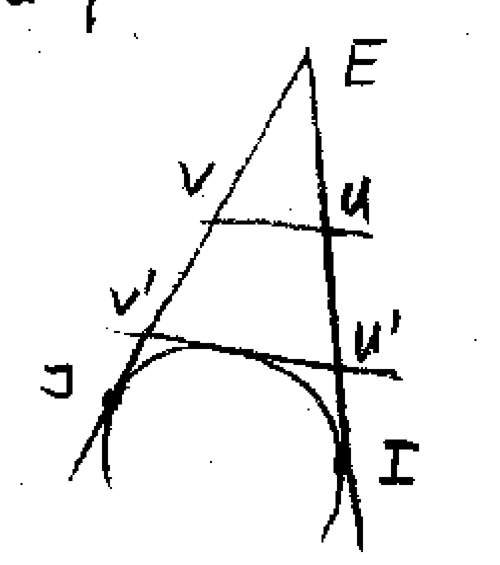
U et S sont donc de part et d'autre de (TV).

De la même façon, T et V sont de part et d'autre de (US). Les droites (US) et (TV) sont donc sécantes en un point de]US[et de]TV[, ce qui montre que STUV est convexe.

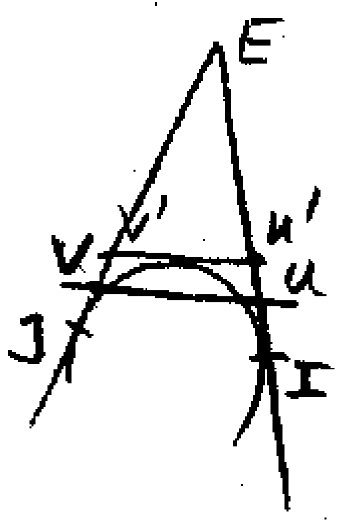
Ω est à l'intérieur (résultat connu) du triangle IJK. Comme ce triangle, par la convexité de STUV, est à l'intérieur de STUV, on a que Ω est intérieur à STUV.

e. Soit R le rayon du cercle inscrit dans le triangle STE, d la distance de Ω à (UV).

Soit (U'V') la tangente au cercle, parallèle à (UV), passant entre E et Ω, et telle que $V' \in]EJ[$, $U' \in]EI[$



Cas 1.



Cas 2.

Comme $STU'V'$ est circonscrit à un cercle, on a : $ST + U'V' = SV' + TU'$

Comme d'autre part $ST + UV = SV + TU$

on a $|U'V' - UV| = UU' + VV'$

Si $U'V' - UV = UU' + VV'$

$$U'V' = U'U + UV + VV'$$

impossible si les points U, U', V, V' ne sont pas alignés. Donc $U = U'$, $V = V'$

de même si $UV - U'V' = UU' + VV'$.

Donc la droite UV est bien tangente au cercle inscrit dans EST.

3. En vertu de 2, un tel quadrilatère est sur un certain cercle, de rayon R.

Comme l'aire de $ABCD$ est alors $R(AB + CD) = R(AD + BC)$, on a que $R = 1$.

Le cercle (Γ) est égal à $(\mathcal{C})$ ssi son centre est O, c-à-d ssi les bissectrices intérieures de deux sommets consécutifs (facilement sécantes) se coupent en O.

[$0 < \alpha + \beta < 2\pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < \pi$]

$\frac{\alpha}{2}$ $\beta/2$

IV

1. a. On sait que si (D) et (D') sont deux droites parallèles, et si $\vec{u}$ est tel que $D' = t_{\vec{u}}(D)$, alors $S_{D'} \circ S_D = t_{2\vec{u}}$.

(dém. facile en considérant les milieux H de MM' et H' de $M'M''$, qd $M \xmapsto{S_D} M' \xmapsto{S_{D'}} M''$

Si maintenant D est une droite et $\vec{u}$ un vecteur $\perp$ à D, on considère $D' = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(D)$

alors $S_{D'} \circ S_D = t_{\vec{u}}$

et $t_{\vec{u}} \circ S_D = (S_{D'} \circ S_D) \circ S_D = S_{D'}$

Avec $D'' = t_{-\frac{\vec{u}}{2}}(D)$, on obtient

$$S_D \circ S_{D''} = t_{\vec{u}}$$

et $S_D \circ t_{\vec{u}} = S_D \circ (S_D \circ S_{D''}) = S_{D''}$.

Dans les deux cas, la transformation en question est une réflexion, d'axe translaté de la précédente, par $t_{\frac{\vec{u}}{2}}$ ou $t_{-\frac{\vec{u}}{2}}$ suivant l'ordre de la composition.

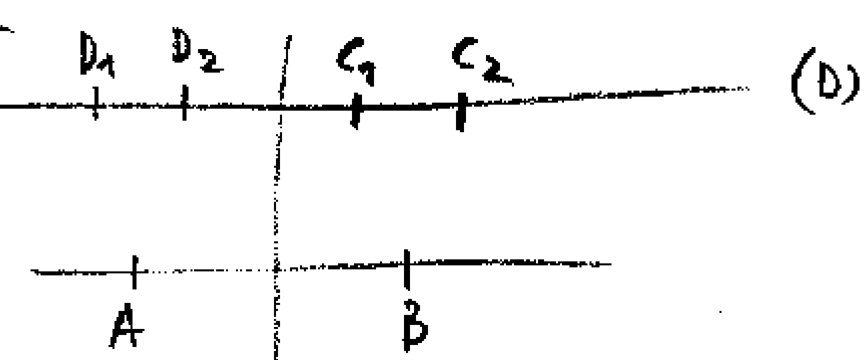
b.

D K3 C
K4 O K2
A K1 B

Montrons qu'un trapèze isocèle ABCD, de bases AB et CD, possède pour axe de symétrie la médiatrice de AB.

Etant donné A et B, les deux autres sommets C et D sont sur une parallèle (D) à (AB), et tels que $AD = BC = \ell$, où $\ell > \text{dist}((D), AB)$ (si $\ell = \text{dist}((D), AB)$, C et D sont les projetés orthogonaux de B et A sur (D), et la figure est un rectangle.)

Il y a donc deux solutions pour C, disons C_1 et C_2, et deux solutions pour D, disons D_1 et D_2



Les triangles isocèles AD_1D_2 et BC_1C_2 ont m̂ base et même hauteur : ils sont donc isométriques. Leurs angles à la base sont égaux, ce qui montre que leurs côtés sont parallèles. Ils sont donc image l'un de l'autre par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$. En renommant éventuellement D_1, D_2 en D_2, D_1, on a $\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{D_2C_2} = \overrightarrow{AB}$.

ABC_1D_1 et ABC_2D_2 sont donc des parallélogrammes et pas des trapèzes.

D'autre part, si (Δ_1) est la médiatrice de $[D_1 D_2]$ et (Δ) celle de $[AB]$, on a que $(\Delta_1) // (\Delta)$ (car $(\Delta)_1 \perp (D) // (AB) \perp (\Delta)$), et que $(\Delta_1) \ni A$, d'où $(\Delta) = t_{\frac{\overrightarrow{AB}}{2}}(\Delta_1)$

Comme $D_1 \overset{S_{\Delta_1}}{\longmapsto} D_2$ et $D_1 \overset{t_{\overrightarrow{AB}}}{\longmapsto} C_1$

on a que

$$D_2 \overset{S_{\Delta_1}}{\longmapsto} D_1 \overset{t_{\overrightarrow{AB}}}{\longmapsto} C_1$$

soit

$$D_2 \overset{S_{\Delta}}{\longmapsto} C_1$$

De même $D_1 \overset{S_{\Delta}}{\longmapsto} C_2$,

si bien que dans un trapèze isocèle les deux bases ont même médiatrice, qui est axe de symétrie de la figure.

Il reste à montrer que O est sur cet axe. Comme O est centre d'un cercle tangent à AD et à BC, O est sur la bissectrice intérieure du secteur angulaire bordé par ces droites et contenant le trapèze, c'est-à-dire sur son axe de symétrie.

Enfin, comme K_1 est milieu de $[AB]$, et que $B = S_{(AB)}(A)$, K_1 est sur l'axe de symétrie, de m, K_3.

c. Le point de contact de $(\mathscr{C})$ avec (AB) est la projection orthogonale de O sur (AB). Comme $(OK_1) \perp (AB)$, et que $K_1 \in (AB)$, c'est K_1.

De même K_3 est le point de contact de $(\mathscr{C})$ avec (CD).

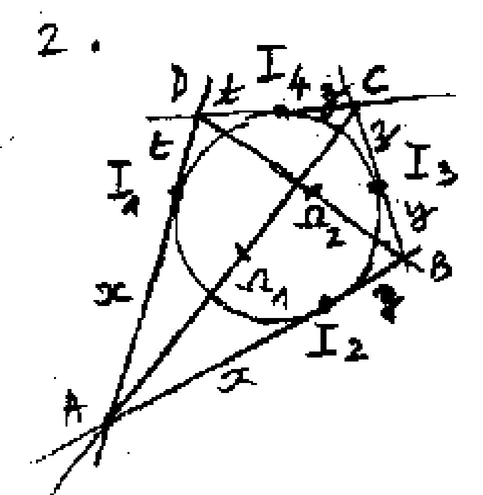
La projection sur (AD) parallèlement à (AB) du milieu O de $[K_1K_3]$ est le milieu K_4 de $[AD]$. De même, la projection sur (BC) parallèlement à (AB) de O est K_2.

Par conséquent, K_4 O et K_2 sont alignés sur une même parallèle à (AB), qui est donc invariante par la réflexion conservant $ABCD$.

Comme cette reflexion transforme (AD) en (CB), $K_4 = (AD) \cap (K_4K_2)$ est transformé en $(BC) \cap (K_4K_2)$, qui est K_2. Le milieu de K_2K_4 est donc à l'intersection de (K_2K_4) et de l'axe de la réflexion, c'est donc O.

d. En utilisant comme ci-dessus le théorème de la projection d'un milieu, on voit que $\Omega_1 = (AC) \cap K_2K_4$, et que $\Omega_2 = (BD) \cap (K_2K_4)$. Comme d'autre part (AC) et (BD) s'échangent dans la reflexion laissant invariant $ABCD$, on a que cette reflexion échange Ω_1 et Ω_2. D'où, comme ci-dessus, O est le milieu de $\Omega_1\Omega_2$.

2.



a. Les deux tangentes menées de A à $(\mathscr{C})$ déterminent des segments AI_1 et AI_2 de longueurs égales : $AI_2 = x$.

De m, $BI_3 = y$, $CI_4 = z$, $DI_1 = t$.

Si $X = \text{Bar}\{(D,x),(A,t)\}$, on a $x.\overrightarrow{DX} + t\overrightarrow{AX} = \vec{0}$, ce qui montre que $X = I_1$.

De m, $\text{Bar}\{(A,y),(B,x)\} = I_2$,

$\text{Bar}\{(B,z),(C,y)\} = I_3$

$\text{Bar}\{(C,t),D(,z)\} = I_4$.

b. $\text{Bar}\{(\Omega_1, t+y),(\Omega_2, x+z)\}$

$= \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{t+y}{2}\right),\left(C, \frac{t+y}{2}\right),\left(B, \frac{x+z}{2}\right),\left(D, \frac{x+z}{2}\right)\right\}$

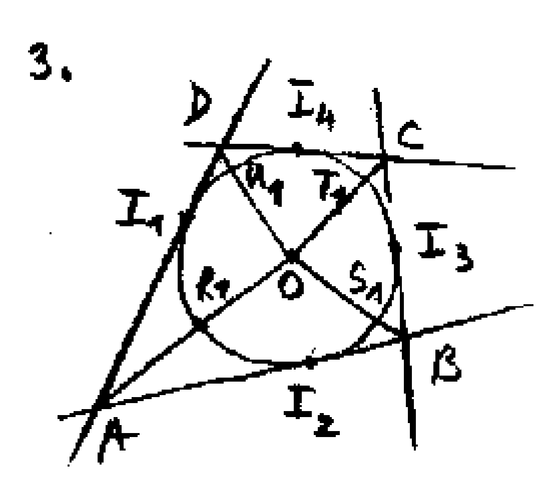
$= \text{Bar}\{(A, t+y),(C, t+y),(B, x+z),(D, x+z)\}$

$= \text{Bar}\{(A,t),(A,y),(C,t),(C,y),(B,x),(B,z),$
$(D,x),(B,z)\}$

$= \text{Bar}\{\underbrace{(A,t),(D,x)},\underbrace{(A,y),B(x)},\underbrace{(B,z),(C,y)}$
$\underbrace{(C,t),(D,z)}\}$

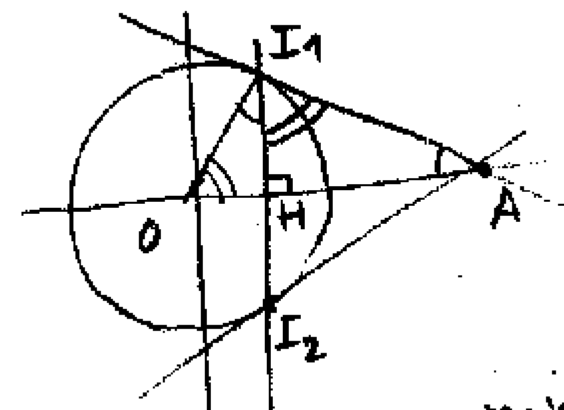
$= \text{Bar}\{(I_1, t+x), (I_2, x+y),$
$(I_3, y+z), (I_4, z+t)\}$

3.



$$2\vec{\omega} = (x+y)\,\overrightarrow{OI_2} + (y+z)\,\overrightarrow{OI_3} + (z+t)\,\overrightarrow{OI_4} + (t+x)\,\overrightarrow{OI_1}$$

$$= x(\overrightarrow{OI_1} + \overrightarrow{OI_2}) + y(\overrightarrow{OI_2} + \overrightarrow{OI_3}) + z(\overrightarrow{OI_3} + \overrightarrow{OI_4}) + t(\overrightarrow{OI_4} + \overrightarrow{OI_1})$$



soit $H = [I_1 I_2] \cap [OA]$

Alors $(\overrightarrow{OI_1} + \overrightarrow{OI_2}) = 2 \cdot OH \cdot \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$

mais $\dfrac{OH}{OI_1} = \dfrac{I_1H}{AI_1}$

soit $OH = \dfrac{I_1 H}{x}$, d'où $2OH = \dfrac{I_1 I_2}{x}$

Donc

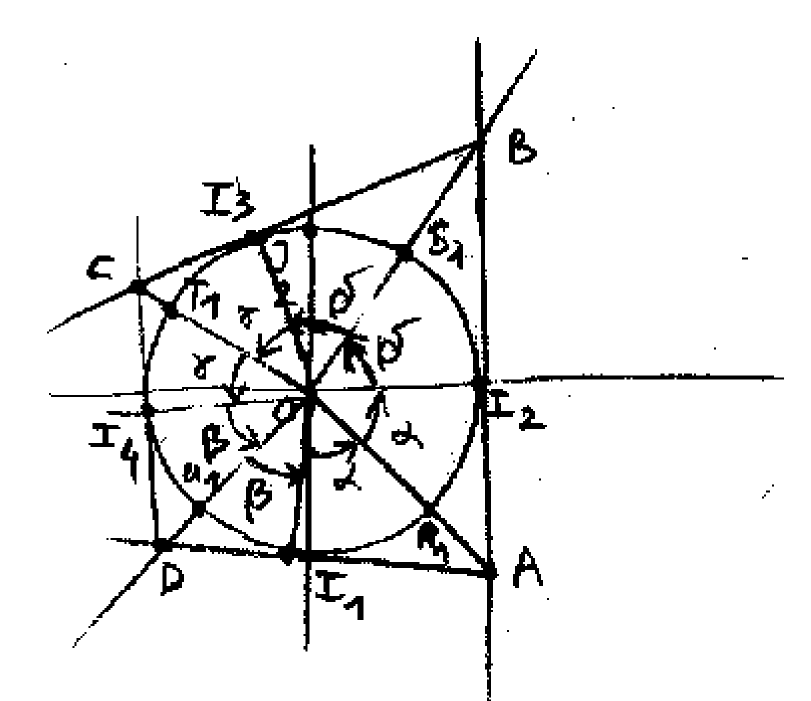
$$x(\overrightarrow{OI_1} + \overrightarrow{OI_2}) = I_1I_2 \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = I_1I_2\,\overrightarrow{OR_1}$$

De même

$$y(\overrightarrow{OI_2} + \overrightarrow{OI_3}) = I_2I_3\,\overrightarrow{OS_1}\text{, etc., d'où}$$

le résultat demandé.

4.



a. La droite AO est bissectrice des ½ droites $[OI_1)$ et $[OI_2)$, d'où $(\overrightarrow{OI_1}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI_2})$, etc.

D'où : $S_1\,(e^{i\delta})$

$T_1\,(e^{i(2\delta+\gamma)})$

$U_1\,(e^{i(2\delta+2\gamma+\beta)})$

$R_1\,(e^{i(2\delta+2\gamma+2\beta+\alpha)})$

Et on a $R_1\,(e^{-i\alpha})$ car $2\alpha+2\beta+2\delta+2\gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$

Comme $I_1 I_2 = 2\sin\alpha$, $I_2 I_3 = 2\sin\delta$, etc., on a

$$2\theta = 2\sin\alpha \,.\, e^{i(\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)} + 2\sin\delta \,.\, e^{i\delta} + 2\sin\gamma \,.\, e^{i(2\delta+\gamma)} + 2\sin\beta \; e^{i(2\gamma+2\delta+\beta)}$$

mais

$$2\sin\alpha \; e^{i\alpha} = 2\sin\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$= \sin 2\alpha + i(1-\cos 2\alpha)$$
$$= i - i(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$$
$$= i - i\,e^{2i\alpha}$$

si bien que

$$\theta = (i - i e^{2i\alpha})\, e^{2i(\beta+\gamma+\delta)} + (i - i e^{2i\delta}) + (i - i e^{2i\gamma})\, e^{2i\delta} + (i - i e^{2i\beta}) \,.\, e^{2i(\gamma+\delta)}$$

$$= i\Big[e^{2i(\beta+\gamma+\delta)} - e^{2i(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} + 1 - e^{2i\delta} + e^{2i\delta} - e^{2i(\gamma+\delta)} + e^{2i(\gamma+\delta)} - e^{2i(\beta+\gamma+\delta)}\Big]$$

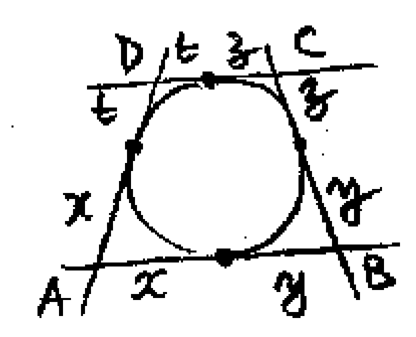
$$= i\Big[-e^{2i(\beta+\gamma+\delta+\alpha)} + 1\Big] = 0 \text{ car } 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0 \pmod{2\pi}$$

Par définition de $\vec{\omega}$, si X est le barycentre de $\{(\Omega_1, t+y), (\Omega_2, x+z)\}$

$$\overrightarrow{OX} = 2\vec{\omega}.$$

On a donc que $X = O$.

c. Si $ABCD$ est un trapèze isocèle, on a



$$x + t = z + y$$

le barycentre X est donc un milieu.

D'où O milieu de $\Omega_1\Omega_2$.